全国农民中等专业学校试用教材

概率初步与测量学

（全国通用本）

辽宁省教育厅　主编

吉林科学技术出版社

全国农民中等专业学校试用教材

概率初步与测量学

（全国通用本）

辽宁省教育厅　主编

吉林科学技术出版社

主　审　刘良和　赵　廉

主　编　高兴亚

编　者　张秀岩（第一篇）

　　　　高兴亚　高永发（第二、三、四篇）

全国农民中等专业学校试用教材

概率初步与测量学

（全国通用本）

辽宁省教育厅　主编

责任编辑：卢光园

*

吉林科学技术出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米16开本　13.25印张　310,000字

1986年8月第1版　1986年8月第1次印刷

印数：1—11,000册

书号：16376·63　定价：1.85元

前　言

1984年教育部委托河南、湖南、湖北、广东、山东、四川、辽宁、吉林、黑龙江省教育、高教厅（局）和北京市成人教育局负责组织编写的农民中等专业学校农学、果林、畜牧兽医三个专业的教材，共31科，除供全国农民中等专业（技术）学校使用外，也可作为同类专业中级技术人员培训班的课本，还可供农业中学、农村中级职业技术学校和普通高中及自学者选用。

我国农村正处在一个历史性的转变时期。农村经济开始向专业化、商品化、现代化转变，迫切需要培养各种专业技术人才和管理人才。目前全国已有农民中等专业（技术）学校和各类培训学校三千多所，随着农业经济的发展，各种农民职业技术学校还将会不断增多。这套教材就是为适应这一新形势的需要而编写的。

编写这套教材，以教育部颁发的全国农民中等专业学校农学、果林、畜牧兽医三个专业的各科教学大纲为依据。教材的内容符合农民中等专业（技术）学校的办学方向及培养目标，与现行普通农业中等学校同类专业的教材基本保持同等水平。为使这套教材具有农民中等专业学校的特色，符合成人学习的特点，在编写时突出了理论联系实际，学以致用的原则．着重对具有实用与推广价值的专业基本理论和基础知识作了较为系统的阐述，并在此基础上，加强基本技能的训练，以增强学员在实际生产中分析问题和解决问题的能力。每章后面编有复习思考题，教材最后一般都附有实验、实习指导。为了配合教学，四川省教育厅根据三个专业的教学大纲绘制了一套教学挂图，可供选用。

我国地域辽阔，各地的生产条件和生产情况不相同，所以农学、果林专业课分南、北方两种版本，其余基础课、专业基础课和专业课教材为全国通用。希望各地、各单位在使用教材时，从实际出发，因地制宜，补充一些符合当地生产实用的科学技术知识。

编写全国农民中等专业学校教材，还是初次尝试，尚缺乏经验。各地在使用教材时，请及时提出批评和建议，以便今后修改完善。

全国农民中等专业学校
教材编写领导小组

目　录

第一篇　概率初步

第二篇　测量的基本知识和基本工作

第三篇 大比例尺地形测量与地形图的应用

第四篇 果园（农田）建设中的测量工作

第一篇　概 率 初 步

第一章　概率的基本概念

第一节　事件与概率

一、必然现象与随机现象

在自然界和人类社会中广泛地存在着两类不同的现象，一类叫确定性现象，（或必然现象），另一类叫随机现象。

确定性现象的特点是：一个现象在一定基本条件组实现下肯定发生或肯定不发生的这类现象，称为必然现象或确定性现象。如在物理学中我们知道，在没有外力作用的条件下，匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动；又如在标准大气压力之下，将水加热到100℃时，水必然会沸腾。而在没有外力作用的条件下，作匀速直线运动的物体改变其匀速直线运动状态是不可能的；在标准大气压力之下，将水加热到100℃时，水不沸腾是不可能的。以上就是确定性现象的最典型的例子。

在上面列举的例子中又可以分为两类，即必然事件和不可能事件。

在一定的条件下，必然会发生的事情叫做必然事件；在一定的条件下，必然不会发生的事情叫做不可能事件。如作匀速直线运动的物体，在"没有外力作用"这一条件下，结果"该物体将继续作匀速直线运动"是必然事件；在"标准大气压力之下，将水加热到100℃"这一条件之下，结果"水沸腾"就是必然事件。而在前一条件之下，结果"该物体改变匀速直线运动状态"就是不可能事件；在后一条件下，结果"水不沸腾"就是不可能事件。

可以看到，必然事件和不可能事件都是和一组基本条件相联系的，并且必然事件的反面就是不可能事件，不可能事件的反面就是必然事件。

在概率论中，必然事件通常用Ω表示，不可能事件用$\varnothing$表示。

随机现象的特点是，在一定的基本条件下，多次进行同一试验或多次观察同一现象，所得到的结果并不完全一样，而往往有些差异，并且在每次试验或观察之前，我们不能准确地预言将会出现什么结果。

例1.1.1　考虑向桌面上投掷一枚均匀的硬币，每掷一次看作是一次试验，则每次试验可能出现两种结果："国徽向上"（以后简称出现"正面"），"币值向上"（以后简称出现"反面"）。掷硬币之前我们无法预计出现哪一个结果。

例1.1.2　向靶射击考虑命中环数．把射击一次看作一次试验，则在该试验下可能出现的结果有很多，譬如，"命中3环"、"命中8环"、"命中0环"(即脱靶)、"命中的环数不超过3"、"命中的环数超过8"、"命中的环数在3与8之间"等等，在射击之前我们是无法预计将出现哪一个结果的。

例1.1.3　在一位车工车削的一批外圆直径为10（单位：毫米）的车轴中，随意地抽取

一件进行检查，在测量之前，我们也是无法预言这个车轴的直径是多少，这是因为受各种偶然因素的影响，这批车轴的直径总不会正好都是10毫米。

对于随机现象，我们首先关心的是试验的结果，今后把一试验下的每一个结果称为一个**随机事件**，并简称为**事件**。

例如，在例1.1.1中，“正面”、“反面”都是掷一枚硬币这一试验下的事件；在例1.1.2中列举的那些结果中的每一个都是向靶射击一次这一试验之下的事件；在例1.1.3中，“车轴的直径为10.01毫米”、“车轴的直径为9.98毫米”、“车轴的直径在9.98毫米与10.01毫米之间”都是观察一车轴的直径这一试验下的事件。

事件一般用大写的拉丁字母A，B，C，…，等来表示。

我们把例1.1.2中的事件加以分析会看到，事件有简单和复杂之分，复杂的事件可以“分解”为同一试验下的较简单的事件。例如，若用A_k表示事件“命中k环”($k=0,1,2,\cdots,10$)，用A表示事件“命中不超过3环”，用B表示事件“命中超过8环”，用C表示事件“命中环数在3与8之间”，则A_0，A_1，…，A_{10}是简单的事件，A，B，C是较复杂的事件，因为A包括了A_0，A_1，A_2，A_3这四种情况，B包括了A_9，A_{10}这两种情况，C包括了A_3，A_4，…，A_8这六种情况。一般地，我们把象A_0，A_1，…，A_{10}这样，在一定的研究范围内，不能再分解的事件称为**基本事件**，把象A，B，C那样，由基本事件复合而成的事件称为**复合事件**。

例1.1.4 从三件一等品a_1，a_2，a_3和两件二等品b_1，b_2中任取三件，从这五件产品中任取三件的每一个组合是一个基本事件，于是，基本事件总数为$C_5^3=10$个。

具体地写出来就是：

$$
\begin{aligned}
&A_1=(a_1,a_2,a_3), &\quad& A_6=(a_2,a_3,b_1)\\
&A_2=(a_1,a_2,b_1), && A_7=(a_2,a_3,b_2)\\
&A_3=(a_1,a_2,b_2), && A_8=(a_1,b_1,b_2)\\
&A_4=(a_1,a_3,b_1), && A_9=(a_2,b_1,b_2)\\
&A_5=(a_1,a_3,b_2), && A_{10}=(a_3,b_1,b_2)
\end{aligned}
$$

“恰好有一件是二等品”这一随机事件就是一个复合事件，它是由基本事件A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7组成的；“至少有一件是二等品”也是一个复合事件，它是由基本事件A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7，A_8，A_9，A_{10}组成的。

二、频率的稳定性与事件的概率

经过人们长期的实践发现，虽然在一次试验中某结果（即事件）可能出现也可能不出现，即它是否出现具有随机性，但是在大量重复试验之下却呈现出明显的规律性——频率的稳定性。

下面首先介绍频率的概念。

若在N次重复试验中，事件A出现了n次，则称n为事件A在N次试验中出现的**频数**，且称比值$\frac{n}{N}$为在N次试验中A出现的**频率**。A在N次试验中出现的频率记为$F_N(A)$。于是

$$F_N(A)=\frac{n}{N}.$$

从直观上可以想象，在投掷一枚均匀的硬币的试验中，虽然在一次掷硬币之前，我们不

能预计将出现“正面”，还是出现“反面”，但是，如果我们将这枚硬币重复地投掷多次，出现“正面”的频率应该近似于50%。为验证这一点，历史上曾有人做过这种试验，其结果见表1。

表1

实验者	掷的总次数	出正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

又如，在相同条件下对某种油菜籽进行发芽试验，结果如表2。

表2

每批试验粒数N	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽的粒数n	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽的频率n/N	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

如果对以上试验记录加以分析，我们对随机现象可以有一个进一步的了解，这就是：

(1) 随机现象具有双重性：即随机性和确定性。随机性指的是，在一次试验之下，某事件A是否出现事先是无法预言的；确定性指的是，在大量重复试验之下，该事件出现的频率在一个固定的数值附近摆动，而呈现出一定的稳定性，并且随着试验次数的增大，这种现象愈加显著。这个固定的数值只与事件A有关，而与做试验的人无关，是客观存在的。如前一例中事件“正面”出现的频率摆动于0.5附近，后一例中，种子发芽的频率摆动于0.9附近。

(2) 频率的稳定性是度量事件A出现可能性大小的客观基础。这就是说，若事件A在大量重复试验中出现的越频繁，则事件A在一次试验之下出现的可能性也就越大。而事件A在大量重复试验之下出现的频繁程度又可以用频率来刻划，关于这一点从我们的生活常识也是很容易理解的。另外，虽然频率具有随机性（指的是在不同的N次重复试验中，A出现的频率并不一定都是同一数值，在某N次重复试验中A出现的频率究竟是多少事先无法预计），但是事件A在大量重复试验中出现的频率稳定于某固定的常数$P(A)$（为表明这个常数与A的依赖关系，将这个常数记为$P(A)$），这个值是客观存在的，它是不以人们主观意志为转移的，因而我们可以用$P(A)$来刻划事件A出现的可能性大小。比如，在上面的例子中，我们可以用0.5来刻划事件“正面”出现的可能性大小，又可以用0.9来刻划事件“种子发芽”出现的可能性大小。于是我们对事件出现的可能性大小可以定量的加以研究。

若在N次重复试验中，事件A出现的频率$F_N(A)=\frac{n}{N}$随着试验次数N的增大而稳定于某个固定的常数$P(A)$，则把$P(A)$称为事件A的**概率**。

一般说来，一个事件A的概率虽然我们不能精确地测定它，但只要试验次数N充分大，我们就可以用频率$\frac{n}{N}$来近似它，从而看到概率统计方法的特点是，必须通过大量重复试验才能找到随机现象的规律性。于是用概率统计方法解决实际问题时，资料越丰富（资料就是试验的结果或数据），得到的结论就越符合实际。

从频率与概率之间的密切关系中，可以看到概率具有以下几条基本性质：

(1) 任何事件A的概率$P(A)$介于0与1之间，即

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

这是因为，若在N次重复试验中A出现n次，则$0 \leqslant n \leqslant N$，从而$F_N(A)=\frac{n}{N}$介于0与1之间，又概率是频率的稳定值，所以$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) 必然事件的概率等于1，即

$$P(\Omega)=1.$$

这是因为,$F_N(\Omega)=\frac{N}{N}=1$，所以$P(\Omega)=1$.

(3) 不可能事件的概率等于零，即

$$P(\varnothing)=0$$

这是因为，$F_N(\varnothing)=\frac{0}{N}=0$，所以$P(\varnothing)=0$.

如果A不是不可能事件，但A出现的概率$P(A)$很小（接近于零），则在大量次数的重复试验中，A出现的频率也是非常小的，称这样的事件A为*小概率事件*. 根据前面讲过的概率的意义，可以认为，*小概率事件在一次试验之下几乎是不可能发生的*. 通常把概率不超过0.05的事件看作是"小概率事件"，有时也把不超过0.10的事件当作小概率事件.

概率除了具有上述性质之外，还有其它性质，我们将在第三节中介绍.

习　题　1-1

1. 举出几个在日常生活中遇到的必然事件、不可能事件及随机事件的例子.

2. 指出下列事件是必然事件．不可能事件、还是随机事件.

(1) 如果a，b都是实数，那么$a+b=b+a$；

(2) 从一副扑克牌中任意抽取一张，得到"黑桃"；

(3) 明天下雨；

(4) 某百货商店，在9点到10点钟内接待顾客200人；

(5) $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$　a，b，c均为实数），若$b^2-4ac>0$，则方程有两个相等的实根；

(6) 连掷两次硬币，出现两次"正面向上".

3. 在100粒大豆中（其中90粒好豆，10粒虫豆），随机地取出5粒.

(1) 求该随机试验的基本事件总数；

(2) 求"取出的5粒中恰有3粒好豆，2粒虫豆"所包含的基本事件数.

4. 某试验站做小麦种子发芽率的试验，结果如下表：

每批试验粒数N	5	10	50	100	300	600
发芽的粒数n	5	8	44	91	272	542
发芽的频率n/N	1	0.8	0.88	0.91	0.907	0.903

计算各次的频率，并观察出这批小麦种子发芽的概率.

第二节　概率的古典定义

一、古典概型及概率的古典定义

由前节知道，要想得到一个事件的概率，必须通过大量次数的重复试验，求出该事件的频率，然后用求得的频率作为该事件概率的近似值．但是，有些事件可以归结成一些模型，不必通过重复试验，而利用模型本身所具有的特点，可以直接计算事件的概率．

古典概型就是一类最简单而又常见的随机现象的模型．

先看两个例子．

例1.2.1　在测量物体长度时，常发生误差，如果只考虑误差的正负，则这一试验下的基本事件只有两个：正误差和负误差，而且出现“正误差”和出现“负误差”的可能性是一样的．

例1.2.2　设袋中装有外形、大小、质量完全一样的球10个，每个球上分别标有号码1，2，…，10．现从中任取一个球，在这个试验下基本事件共有10个，即“取到1号球”，“取到2号球”，…，“取到10号球”等，且因为这10个球所处的地位是平等的．因此，这10个基本事件出现的可能性是相等的．

这两个例子给出的随机现象具有如下共同特点：

（1）基本事件的个数是有限的；

（2）每个基本事件出现的可能性是一样的．

通常称（1）为有限性，（2）为等可能性．把具有以上两个特点的随机现象的模型称为*古典概型*．

在古典概型中，若基本事件总个数为n，事件A中所包含的基本事件个数为m，则定义事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

这样给出的概率定义称为*概率的古典定义*．

值得注意的是，只有当随机现象可以归结为古典概型时，才能用公式（1.2.1）计算概率．

二、利用古典定义直接计算概率的例子

例1.2.3　在例1.2.2中，若用A表示事件“取出的球是前5号”，求事件A的概率．

解　显然满足古典概型中有限性和等可能性的要求．在此问题中，基本事件总个数n为10，事件A中所包含的基本事件个数m为5，由公式（1.2.1）有

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

例1.2.4　某号码锁有3个拨盘，每个拨盘上有从0到9共10个数字．当3个拨盘上的

数字组成某一个三位数字（开锁号码）时，锁才能打开。若不知道该锁号码，能一次打开的概率是多少？

解 这里每一个三位数就是一个基本事件，这些基本事件是等可能的，总数为 10^3 个，故属于古典概型。

设A表示“一次打开”这一事件，显然，它只包含一个基本事件（即该锁的号码）。于是

$$P(A)=\frac{1}{10^3}=0.001$$

例1.2.5 在100件产品中，有95件合格品，5件次品。从中任取 2 件，计算：

（1） 2 件都是合格品的概率；

（2） 2 件都是次品的概率；

（3） 1 件是合格品，1 件是次品的概率。

解（1）设“2 件都是合格品”为事件A。

从100件产品中任取 2 件的每一组合是一个基本事件，又从100件产品中任意 2 件被抽取到的可能性是相等的，因此属于古典概型。其基本事件总数为C_{100}^2个。 事件A所包含的基本事件数为C_{95}^2个。于是

$$P(A)=\frac{C_{95}^2}{C_{100}^2}\approx 0.90$$

（2）设“2 件都是次品”为事件B。则事件B所包含的基本事件数为C_5^2个。于是

$$P(B)=\frac{C_5^2}{C_{100}^2}\approx 0.002$$

（3）设“任取 2 件，1 件是合格品，1 件是次品”为事件 C，则事件C 所包含的基本事件数为$C_{95}^1\cdot C_5^1$个。于是

$$P(C)=\frac{C_{95}^1\cdot C_5^1}{C_{100}^2}\approx 0.096$$

例2.2.6 箱中盛有60个黑球，40个白球，从箱中逐次取出 3 个球，在下面两种情况下分别计算：（1）事件“取出的 3 个球都是黑球”的概率；（2）事件“取出的 3 个球中恰有两个白球”的概率。

① 返回抽样。即每次抽取一个看明黑白后放回，然后再抽取下一个。

② 不返回抽样。即每次抽取一个，取出后不放回，在剩下的球中再抽取下一个。

解（1）设A表示事件“从100个球中任取 3 个，这 3 个都是黑球”。

① 在返回抽样方式下，基本事件总数为

$$(60+40)^3=100^3$$

而且这100^3个基本事件是等可能的，因此属于古典概型。而A中所包含的基本事件数为60^3个。所以

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=\left(\frac{3}{5}\right)^3=0.216$$

② 在不返回抽样方式下，基本事件总数为

$$100\times 99\times 98=A_{100}^{3}$$

而且这A_{100}^{3}个基本事件也是等可能的，因此也属于古典概型。而A中所包含的基本事件数为

$$60\times 59\times 58=A_{60}^{3}$$

所以

$$P(A)=\frac{A_{60}^{3}}{A_{100}^{3}}=0.212$$

（2）设B表示事件“取出的3个球中恰有两个白球”。

① 在返回抽样方式下，事件B中所包含的基本事件数为

$$C_{3}^{2}\times 60\times 40\times 40$$

所以

$$P(B)=\frac{C_{3}^{2}\times 60\times 40^{2}}{100^{3}}=0.288$$

② 在不返回抽样方式下，事件B中包含的基本事件数为$C_{3}^{2}\times 60\times A_{40}^{2}$

所以

$$P(B)=\frac{C_{3}^{2}\times 60\times A_{40}^{2}}{A_{100}^{3}}\approx 0.289$$

我们把在返回抽样方式下得到的结果改写一下，有

$$P(B)=\frac{C_{3}^{2}\times 60\times 40^{2}}{100^{3}}=C_{3}^{2}\times(0.4)^{2}\times 0.6$$

注意到0.4恰是“从箱中任取一球，此球是白球”的概率，而0.6恰是“从箱中任取一球，此球是黑球”的概率。上面的计算结果表明，如果采取返回抽样方式从箱中任取3个球，其中恰有两个白球的概率可直接得到，此概率为$C_{3}^{2}(0.4)^{2}0.6$。是否有解决这类问题的一般公式呢？我们将放到下节中去研究。

其次，把在不返回抽样方式下得到的结果改写一下，有

$$P(B)=\frac{C_{3}^{2}\times 60\times A_{40}^{2}}{A_{100}^{3}}=\frac{\frac{3!}{2!\,1!}A_{60}^{1}A_{40}^{2}}{A_{100}^{3}}$$

$$=\frac{\frac{A_{60}^{1}}{1!}\cdot\frac{A_{40}^{2}}{2!}}{\frac{A_{100}^{3}}{3!}}=\frac{C_{60}^{1}C_{40}^{2}}{C_{100}^{3}}$$

此结果表明，如果采取不返回抽样方式，从箱中任取三个球，其中恰有两个白球的概率与

一次从箱中取出三个球，其中恰有两个白球的概率是一样的。

一般地，若箱中装有N个球，其中有M个白球，$N-M$个黑球，采取不返回抽样方式从中任取n个球，则“取出的n个球中恰有m个（$m\leqslant M$）白球”（设为事件A）的概率为

$$P(A)=\frac{C_M^m\ C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \tag{1.2.2}$$

这个模型通常称为超几何分布概型，许多问题可以归结为这一模型，如产品抽样检查中，将产品视为球，其中合格品视为黑球，不合格品视为白球，则例1.2.5中的概率计算问题就属于这类，可以用公式（1.2.2）直接求得。在例1.2.5中，可看作共有100个球，其中有95个黑球，5个白球，于是由公式（1.2.2）有

$$P(A)=\frac{C_{95}^2\ C_5^0}{C_{100}^2}; \qquad P(B)=\frac{C_{95}^0\ C_5^2}{C_{100}^2};$$

$$P(C)=\frac{C_{95}^1\ C_5^1}{C_{100}^2}$$

公式（1.2.2）还可以推广。

例1.2.7 设一批产品共100件，其中有一等品70件，二等品20件，三等品10件，从中任取10件检查，求取出的10件产品中恰有5件一等品，3件二等品，2件三等品的概率。

解 设A表示事件“取出的10件产品中，恰有5件一等品，3件二等品，2件三等品”，则

$$P(A)=\frac{C_{70}^5\ C_{20}^3\ C_{10}^3}{C_{100}^{10}}$$

习 题 1-2

1. 从10个同类产品中（其中有8个正品，2个次品），任意抽取3个，求3个都是正品的概率。

2. 一个均匀材料做的立方体的骰子：

（1）抛掷一次出现奇数点的概率是多少？

（2）抛掷两次出现点数的和为7的概率是多少？

3. 把10本书任意地放在书架上，求其中指定的3本放在一起的概率。

4. 电话号码由5个数字组成，每个数字可以是从0到9中的任意一个数，求电话号码由完全不相同的数字组成的概率。

5. 一套书共有上、中、下三册，将它们任意摆到书架的同一层上去，各册自左至右或自右至左恰好成上、中、下的顺序的概率是多少？

6. 在80件产品中，有50件一等品，20件二等品，10件三等品，从中任取3件，计算：

（1）3件都是一等品的概率；

（2）2件是一等品、1件是二等品的概率；

（3）一等品、二等品、三等品各1件的概率。

7. 假设在100粒大豆中，有10粒虫豆，90粒好豆。现在从这100粒大豆中随机取出5粒，其中恰有3粒虫豆，2粒好豆的概率是多少？

8. 将一枚硬币连掷三次，求（1）出现2次正面向上，一次正面向下；（2）一次正面向上，2次正面向下的概率各是多少？

9. 用火车运载两种类型的产品，各为m，n件；有消息证实，在路途中有两件产品损坏，求损坏的两件是不同类型产品的概率。

10. 100只外形相同的同型号的三极管，按一定要求进行分类，有40只属于A类，有60只属于B类，在下列两种不同的抽样中，事件"从100只中随机抽取3只，这3只都属于A类"的概率各是多少？

（1）返回抽样；（2）不返回抽样。

第三节 事件的关系及事件的概率的运算

一、事件的关系

我们知道，在一定的条件下对某随机现象进行观察，它会出现各种各样的事件，而事件与事件之间是存在着某种关系的，研究事件之间的关系，不仅可以帮助我们认识事件的本质，而且还可以大大简化一些复杂事件的概率计算。

例1.3.1 观察电话总机在某段时间内接到的呼唤次数。设A_k表示事件"接到k次呼唤"（$k=0, 1, 2, \cdots$），A表示事件"接到3到5次呼唤"，B表示事件"接到3到6次呼唤"，C表示事件"接到4到6次呼唤"。

例1.3.2 在检查某种圆柱形产品时，如果产品的长度和直径都合格，则该件产品才算是合格的。今从一批这种产品中任取一件，令

A表示事件"产品合格"，$\bar{A}$表示事件"产品不合格"，

D表示事件"直径合格"，$\bar{D}$表示事件"直径不合格"，

L表示事件"长度合格"，$\bar{L}$表示事件"长度不合格"，

B表示事件"直径合格但长度不合格"。

上面的两例中出现的事件之间显然是有一定的联系的。下面我们就来介绍事件之间的几种主要关系。

1. 包含　对任意事件A、B，如果事件A发生必然导致件B发生，则称事件B包含事件A，并记为$A\subset B$，或$B\supset A$。

说某事件A发生是什么意思呢？在第一节中，我们曾讲过任何一个复合事件都是由基本事件构成的，如在例1.3.1中A_0，A_1，A_2，…都是基本事件，A是由A_3，A_4，A_5这三个基本事件构成的，这时也说A_3，A_4，A_5是属于A的基本事件。当有属于A的一个基本事件出现时，我们就说A发生了。如A_4出现了，即"接到4次呼唤"这一结果出现了，这时"接到3到5次呼唤"即事件A就发生了；反之，若说A发生了，则必有属于A的一个基本事件出现。如在例1.3.1中，若"接到3到5次呼唤"发生了，则"接到3次呼唤"，"接到4次呼唤"，"接到5次呼唤"这三个基本事件必有一个出现。

由包含关系的定义可知，在例1.3.1中若A发生，就意味着属于A的某个基本事件出现，比如说A_3出现了，因A_3也是属于B的基本事件，所以，这时B发生。(如果出现的是A_4，A_5也是如此) 于是，$A\subset B$。

因此，也可以这样来定义包含关系：若每一个属于A的基本事件都属于B，则说B包含

A.

显然，对任一事件A有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. **相等** 若$A\subset B$ 且$B\subset A$，则称A与B相等。

若A与B相等，则A与B包含的基本事件是相同的，故相等的事件被认为是一样的事件，不加区别。

3. **事件的交** 由事件A和事件B同时发生而构成的事件称为事件A与事件B的交，并记为$A\cap B$，或简记为AB。

显然在例1.3.2中，$A=DL$。

A与B的交AB是由A与B同时发生而构成的一个新的事件。AB发生与A，B同时发生是一样的，于是，当任何一个属于事件AB的基本事件出现时，事件AB就发生，这时，A，B都发生，因此该基本事件既属于A又属于B，从而A与B的交事件是由同时属于A和B的基本事件构成的。

在例1.3.1中，因为A是由A_3，A_4，A_5这三个基本事件构成的，B是由A_3，A_4，A_5，A_6这四个基本事件构成的，所以，AB是由A_3，A_4，A_5这三个基本事件构成的，于是$AB=A$。

4. **互斥事件** 若在一次试验中，事件A与事件B不能同时发生，则称事件A与事件B互斥（或互不相容）。

这就是说，若A与B互斥，则A与B的交事件AB不可能包含有A，B公共的基本事件，否则A，B就有可能在一次试验中同时发生，而不可能事件$\varnothing$是在每次试验中都不发生的事件，因此，$\varnothing$也不可能含有任何基本事件，所以，当A与B互斥时，有$AB=\varnothing$。

显然，在一试验下的所有基本事件是两两互斥的。如在例1.3.1中，A_0，A_1，A_2，…它们中的任何两个都是互斥的；又如在例 1.3.2 中，A与$\overline{A}$，A与$\overline{D}$，A与$\overline{L}$也都是互斥事件.

5. **事件的并** 由事件A与事件B至少发生一个而构成的事件，称为事件A与事件B的并事件，并记为$A\cup B$。

由定义可知，$A\cup B$是由A与B至少发生一个而构成的一个新的事件。

"$A\cup B$发生"与"或A发生或B发生或AB发生"这两种说法是一样的，又因为$AB\subset A$，所以，"$A\cup B$发生"与"或A发生或B发生"这两种说法是一样的。于是，事件$A\cup B$是由或属于A或属于B的基本事件全体构成的事件，如在例1.3.1中，A是由基本事件A_3，A_4，A_5构成的，C是由基本事件A_4，A_5，A_6构成的，则$A\cup C$是由基本事件A_3，A_4，A_5，A_6构成的，从而有$A\cup C=B$。

6. **互逆事件** 若事件A与事件B同时满足：$AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则称A与B是互逆事件，且称A是B的（或B是A的）**逆事件**。当B是A的逆事件时，将B记为$\overline{A}$。在此记号之下，$\overline{A}$是A的逆事件；由定义A又是$\overline{A}$的逆事件，当然可以把A写为$\overline{\overline{A}}$，于是，$\overline{\overline{A}}=A$。

必然事件是每次试验之下都要发生的事件，因此，它包含了所有的基本事件。由$A\cup\overline{A}=\Omega$可知，无论试验中出现哪个基本事件，这个基本事件要么属于A，要么属于$\overline{A}$(因为这个基本事件属于Ω)，从而，在一次试验之下，A与$\overline{A}$必然要发生一个；由$A\overline{A}=\varnothing$可知，$A$与$\overline{A}$在一次试验中是不可能同时发生的。所以，互逆的两个事件A和$\overline{A}$，在一次试验中，必然要发生一个且只能发生一个。