高等学校教学用书

微 分 学

H. H. 魯 金 著
張理京 譚家岱譯

人民教育出版社

高等学校教学用書

微　分　学

H. H 魯 金 著
張理京　譚家岱譯

人民教育出版社

本書系根据苏联国立"苏維埃科学"出版社（Государственное издательство "Советская наука"）出版的魯金（Н. Н. Лузин）著"微分学"（Диференциальное исчисление）1953年第四版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等工业学校教科書。

簡装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本书暂以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

微　　分　　学

Н. Н. 魯金著

張理京　譚家岱譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

商务印书館上海厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·228　开本 787×1092 1/32　印張 15

字数 400,000　印数 115,001—123,000　定价(6) ￥1.12

1951年6月上册初版（共印 70,000）

1954年7月下册初版（共印 68,000）

1956年11月合訂本第1版　1962年3月上海第13次印刷

原編者的話

“苏維埃科学”出版社出版的这第四版数学分析教程，給高等工业学校用的两卷教本“微分学”及“积分学”，跟1952年的第三版比較起来是沒有什么修改的。其中只不过訂正了一些个别的小錯誤。

这两卷教本的作者 H. H. 魯金院士(1883—1950)是苏联大数学家之一，苏联有好几代的工程师和教师都是照着他的書来学習的。

H. H. 魯金在1883年12月10日生于湯姆斯克城的一个公务員家庭中。1901年秋季他在湯姆斯克地方的中学畢业后进入莫斯科大学数理系数学組，到1906年畢业。他在該校跟俄罗斯的名教授 H. E. 茹可夫斯基，Б. К. 莫罗捷也夫斯基，Д. Ф. 叶戈罗夫学習，他們对魯金后来的科学活动有很大的影响。

大学畢业后，魯金繼續留校，准备从事大学教学生涯。

1909年魯金参加候补碩士考試，获得“純粹数学”教研組講师的称号。

1914年魯金开始在莫斯科大学講授基础課程及專业課程。他那卓越的講課才能跟他那善于誘导青年学生的能力結合在一起，鼓舞了青年人学習科学的热忱，激發了他們的自信心。在魯金一生的教学生涯中，他始終是新鮮数学思想的不竭源泉，而且他善于用生动的形式来講授这些思想。魯金的講課極为人所欢迎，他的每堂課总吸引很多的听众。

1916年魯金提出他的碩士学位論文“积分及三角級数”。这篇論文的研究是这样的深入和重要，以致使当局違反了一向的傳統，讓这位青年数学家跳过了碩士学位，直接授予他数学博士的学位。魯金的那篇

論文即使到了今日也还沒有失却它的意义；1951 年該文刊印为單行本的科学專著。

1917 年魯金当选为莫斯科大学数学教授。莫斯科大学中研究实变数函数論方面的大批数学小組的产生，就标志了魯金在該校教学工作的成績。

魯金在他的周圍团結了各种不同年龄的科学工作者：其中有跟他同事多年的成熟的学者，也有学生和研究生中剛从事科学工作的青年数学家。魯金教养了整整的一批学者，其中有許多人在过去和今日都在数学發展史上起了很大的作用。

1927 年魯金当选为苏联科学院通訊院士，到 1929 年当选为正式院士。从那时起魯金主要是在科学院的科学研究机关中工作。魯金在他的晚年主持斯捷克洛夫数学研究所实变数函数論組，并参与自动控制与远距离控制研究所的工作。

魯金的主要科学研究工作在实变数函数論方面；在这門学問上，他获得許多結果，以極重要的發現丰富了数学这門科学。魯金在实变数函数論方面的著作現今已成为經典性的文选。在三角級数及解析函数論方面，魯金也有極重要和深入的研究，在解析函数論方面他曾用实变数函数論的方法来研究。

魯金在他的創造性工作中并不只停留在純粹理論研究的范圍內。他在应用数学方面也作了許多研究，这就是在代数和分析上的数值計算法方面，特别是他对于用賈普利金法来近似积微分方程的問題作了重要的研究。

苏联政府对魯金的功績有很高的評价，并在 1945 年授与他劳动紅旗勛章。

1950 年 2 月 28 日魯金因心臟病突然去世。

苏联偉大学者、教师、爱国者魯金的名字在苏联科学史上占有光荣的地位。

目 录

第一章　基本公式

§1．初等代数及几何的公式　为了讀者参考方便起見，我們把一些基本公式开列在下面，先从代数开始。

(1) **二次方程** $ax^2+bx+c=0$。

其解照下面的公式来求：$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

根的性質只由根号下的表达式 $\Delta=b^2-4ac$ 来决定，Δ 这个式子称为判别式。若 $\Delta>0$，两个根是实数且不相等；若 $\Delta=0$，两个根是实数而且相等，若 $\Delta<0$，根是虛的。

(2) **对数**

$$\lg ab=\lg a+\lg b;\qquad \lg a^n=n\lg a;\qquad \lg 1=0;$$

$$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b;\qquad \lg\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\lg a;\qquad \lg_a a=1。$$

(3) **牛頓的二項式定理**（n 是正整数）

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n。$$

(4) **阶乘** $n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$。

在下列初等几何的公式中，字母 r 或 R 表示半徑，h 表示高，S 表示底面积，l 表示基綫長。

(5) **圓**　周長$=2\pi r$；面积$=\pi r^2$。

(6) **圓扇形**　面积$=\dfrac{1}{2}r^2\alpha$ 式中 α 为扇形的圓心角，以弧度計。

(7) **稜柱体**　体积$=Sh$。

(8) **稜錐体**　体积$=\dfrac{1}{3}Sh$。

(9) **正圓柱体**　体积$=\pi r^2h$；側面积$=2\pi rh$；全面积$=2\pi r(r+h)$。

(10) **正圓錐**　体积$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$；側面积$=\pi rl$；全面积$=\pi r(r+l)$。

(11) **球**　体积$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$；面积$=4\pi r^2$。

(12) 正截錐体 体积 $=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$；侧面积 $=\pi l(R+r)$。

§2. 三角公式 下面的公式，很多是有用处的。

(1) 角的度量 角的大小有两种量法；根据这两种量法就定出两种不同的單位。

六十分度 單位角是一个周角的 $\frac{1}{360}$，称为一度。

弧 度 單位角是圓周上長度等于半徑的弧段所对的圓心角；这个單位标为一弧度。

这两种度量單位的基本关系用下面的方程表示

$$180\text{ 度}=\pi\text{ 弧度},$$

其中 $\pi=3.14159\cdot$ 由此得：

$$1\text{ 度}=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}=0.0174\cdots\text{弧度}$$

及

$$1\text{ 弧度}=\frac{180}{\pi}\text{ 度}=57.29\cdots\text{度}。$$

由弧度的定义可得：

$$\text{一个角的弧度数}=\frac{\text{角所截出的弧段}}{\text{半徑}}。$$

这方程使我們可以从一种度量法化成另一种。

(2) 三角函数間的关系

$$\cot x=\frac{1}{\tan x};\ \sec x=\frac{1}{\cos x};\ \csc x=\frac{1}{\sin x};$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\ \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x;\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x。$$

(3) 角的簡化公式

角	正弦	余弦	正切	余切
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$90°-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$90°+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$180°-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$180°+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$270°-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$270°+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$-\tan x$
$360°-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$

(4) $x+y$ 及 $x-y$ 的三角函数

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y};\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}。$$

(5) $2x$ 及 $\frac{x}{2}$ 的三角函数

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\quad \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x};$$
$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\quad \tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$$
$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x;\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x。$$

(6) 加法定理

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}。$$

(7) 斜角三角形中角与边的关系

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，

$$S=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)},$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}，\text{式中 } p=\frac{a+b+c}{2}。$$

§3. 平面解析几何公式　最重要的公式开列如下：

(1) 两点 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。$$

線段 M_1M_2 的斜率：$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\varphi$。

其中点为：$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$。

(2) 兩直線的交角　　$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

(兩直綫平行时：$k_1=k_2$；兩直綫垂直时：$k_1k_2=-1$)。

(3) 直綫方程的各种形式

点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$。

斜截式：$y=kx+b$。

两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$。

截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

(4)点 $M_1(x_1, y_1)$到直綫 $Ax+By+C=0$ 的距离：

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}。$$

(5)直角坐标与極坐标的关系式：

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\operatorname{arc}\tan\frac{y}{x}。$$

(6)圓周方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圓心(a, b)。

(7)抛物綫方程

頂点在原点：$y^2=2px$，焦点$\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$。

$x^2=2py$，焦点$\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$。

頂点在(a, b)：$(y-b)^2=2p(x-a)$，軸 $y=b$。

$(x-a)^2=2p(y-b)$，軸 $x=a$。

对称軸为 OY 軸：$y=Ax^2+C$。

(8)其他曲綫方程

中心在原点，焦点在 OX 軸上的橢圓：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

中心在原点，焦点在 OX 軸上的双曲綫：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1。$$

中心在原点，漸近綫为坐标軸的等边双曲綫：

$$xy=m。$$

§4. 立体解析几何公式　最重要的几个公式如下：

(1)兩点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$間的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。$$

(2)直綫

方向余弦：$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$。

方向系数：m, n, p。

它們之間的关系有

$$\frac{\cos\alpha}{m}=\frac{\cos\beta}{n}=\frac{\cos\gamma}{p},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。$$

$$\cos\alpha=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{p}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}。$$

对于通过两点(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)的直綫来說，有下面的式子：

$$\frac{\cos\alpha}{x_2-x_1}=\frac{\cos\beta}{y_2-y_1}=\frac{\cos\gamma}{z_2-z_1}。$$

(3)**兩根直綫**：

方向余弦：$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma; \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$。

方向系数：$m, n, p; m', n', p'$。

若θ为两直綫的交角：則

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

$$\cos\theta=\frac{mm'+nn'+pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}。$$

平行条件：$\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}$。

垂直条件：$mm'+nn'+pp'=0$。

(4)**若直綫过点(x_1, y_1, z_1)而方向系数为m, n, p，則其方程为**

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}。$$

(5)**平面**　平面$Ax+By+Cz+D=0$中，系数A, B, C是垂直于該平面的直綫的方向系数。

若平面过点(x_1, y_1, z_1)且跟方向系数为A, B, C的直綫垂直，則其方程为：

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0。$$

(6)**兩平面**

方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0。$$

其交綫的方向系数为：

$$BC'-CB',\ CA'-AC',\ AB'-BA'。$$

若θ为二平面的交角，則

$$\cos\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}。$$

§5. 希腊字母

字母	俄文發音	字母	俄文發音
$A\ \alpha$	Альфа	$N\ \nu$	Ни
$B\ \beta$	Бета	$\Xi\ \xi$	Кси
$\Gamma\ \gamma$	Гамма	$O\ o$	Омикрон
$\Delta\ \delta$	Дельта	$\Pi\ \pi$	Пи
$E\ \varepsilon$	Эпсилон	$P\ \rho$	Ро
$Z\ \zeta$	Дзета	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	Сигма
$H\ \eta$	Эта	$T\ \tau$	Тау
$\Theta\ \theta\ \vartheta$	Тета	$\Upsilon\ \upsilon$	Ипсилон
$I\ \iota$	Иота	$\Phi\ \varphi$	Фи
$K\ \varkappa$	Каппа	$X\ \chi$	Хи
$\Lambda\ \lambda$	Ламбда	$\Psi\ \psi$	Пси
$M\ \mu$	Ми	$\Omega\ \omega$	Омега

第二章　数

§6. 有理数　所有正負整数、分数以及零，統称为有理数。本書中，假定讀者都已熟知这些数的大部份初等性質，以及一般算术教本中所講的关于这些数的用法。

讀者都知道，算术中的四个基本运算：加、减、乘、除，施行在有理数上之后，得出的結果仍是有理数。这就是說，用这样的方法，我們得不到任何別的数。

§7. 有理数的实用意义　从实用观点来看，为了完成度量起見，我們无需再知道有理数以外的別的数。

应該注意到，实际上来度量一个已給量这件事，常常是件不定的事。例如，具体地給了我們一根直綫綫段，要来量它的長度。这种具体綫段的两端，我們知道总是有些不定的，因为我們总可以用另一根綫段，和所給綫段相差小到无法覺出的(为此，只要使它們的長度的差，在我們所用仪器的灵敏度之外就行了)来代替所給綫段。

像这样，我們就有无穷多彼此極其接近的有理数，其中每一个都完全可以作为上述具体綫段的“眞正”長度。像这样自由选择一个近似数作为所需結果的事，在实踐上也是極常用到的。因为在任何算术計算中，如果把其中要施行运算的那些数略微改变，得出来的結果也改变得極小，所以为了計算方便起見，常只取所量那个量的很有限的几位小数。例如，我們常常只取

$$\pi=3.14$$

而把較准确数値

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46\cdots$$

中的其余一切位数都略去。

这样看来，为了应付度量实踐上的需要，單單是一些有理数就已經完全够用了，因为用了它們就可以把度量实施到任意的准确程度。但是，当我們要解决几何、力学及理論物理学中的問題，而达到絕对准确的程度时，單靠这些有理数就不够用了，因为那时已必須通曉所謂无理数了。

現在我們来看这些新的数是怎样产生的，以及应当怎样来了解它們。

§8. 有理数跟直綫上的点的对比 有理数列是本身到处稠密的，因为两个有理数之間，无論它們如何靠近，总可以找出随便多少个中間的有理数来。正因为这样，所以乍看起来，好像有理数列之間，完全沒有新数的任何容身之地。

可是，上述那种初步印象是非常錯誤的，因为有理数列間到处都有空隙；我們只要把全部有理数列跟直綫上的点列作一对比，这事就变得很明显了。

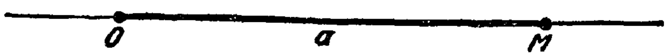

圖 1.

为了要实現这种对比，我們取一直綫，两边无止尽地延長，在直綫上取一原点 O，并取一定的長度單位，作为度量綫段之用。很明显，对于任何一个預先給好的有理数 a，总可以作一根以 a 为長度的綫段，并可依照着 a 是正或是負，来把这綫段从 O 起放到它的右边或左边。这样我們就得到一定的端点 M，拿来作为对应于有理数 a 的点[①]。因此我們可以說，对于任何一个有理数，直綫上总有而且也只有一个点跟它对应(圖 1)。

这样得到的点 M，我們把它想像是黑色不透明的；正是这个点，我

① 在圖 1 中 a 是取作正的。