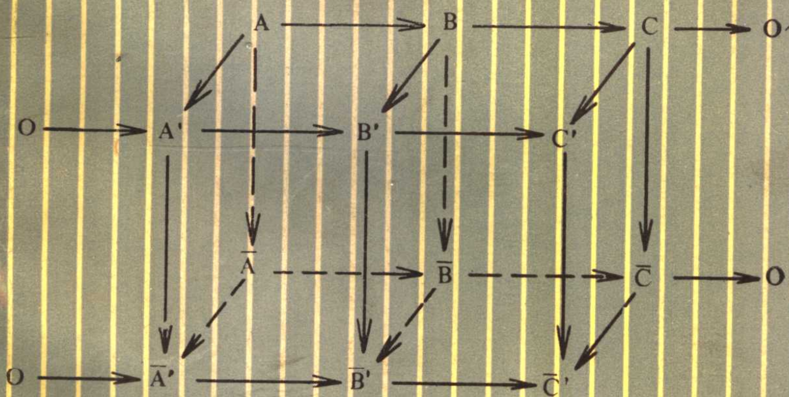
TONG TIAO
DAI SHU CHU BU

同调代数初步

陈昭木 编



福建科学技术出版社

同调代数初步

陈 昭 木 编

●

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

三明市印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　8.625印张　189千字

1984年12月第1版

1984年12月第1次印刷

印数：1—3,380

书号：7211·4　　定价：1.35元

序　　言

同调代数是继代数拓扑发展而来的。本世纪五十年代才有它的第一本专著，六十年代得到迅速发展，现在已成为代数学的不可缺少的重要组成部分。可是，当前国内有关同调代数方面的中文教材或书籍，尚难见到。本书正是在这样的情况下而编写的。

本书是同调代数的入门书，是一学期的教材。在编写中我们注意到以下几点：

一、不求全而重于基本训练。我们虽然没有提及张量积与Tor函子，但对Hom与Ext^1函子作了比较充分的讨论，对于同调代数的基本方法给予应有的重视。我们相信学习本书后，读者便可以阅读同调代数方面较深的书籍与文献。

二、力求通俗易懂。本书只要读者有近世代数的初步知识就可以顺利地阅读它。在编写方面，尽量注意到由浅入深，由表及里，循序渐进，逐步诱导的方法。推理尽可能详尽，对所引用的论据都有交代，勿须另外参考其他书籍，以减少读者的困难。对于重要概念和定理的引进，注意到前后联系，说理明确，有本有源，使读者易于接受而不突然。

三、充分发挥习题的作用，习题是本书的一个重要组成部分，本书的习题基本上有如下几种类型：“基本题”，以助读者加深理解正文内容，掌握解决问题的基本手法；“伏笔题”，有的是作为以后定理或习题的论据，有的先进行一定的训练，以便对以后问题的提出及论证能更容易理解、接

受；“加深题”，为了不影响编幅，我们把一些定理有机地编为习题，以加宽加深对理论的理解。

本书附有习题参考答案，对比较简单的习题，仅作提示，对较难的习题，作参考解答，以备校核。读者将会发现在独立完成一定数量习题之后，对正文的理解，对问题的看法都会有“另有天地”之感。

记号的说明：本书谈到前面定理，若是只说明定理的数目，指的是本节的定理。若是加有其他数目，指的是其他章节的定理。如“Ⅲ，2，定理1，”指的是第三章第二节定理1；“§1定理2”，指的是本章第一节定理2。

本书承蒙福建师范大学数学系主任林辰教授审核，特此表示衷心感谢。黄洛生同志、杨长贵同志、薛卫民同志对本书的编写提供了非常宝贵的意见，本书的习题与解答都是他们提供和完成的。黄震同志在本书的抄写和校对方面帮了许多忙。在此均表谢意。

限于水平，错误、不当之处，在所难免，敬请读者批评指正。

陈 昭 木

一九八二年八月十五日

目　录

第一章　模

"模"在同调代数中扮演着重要的角色，是作为本书的预备知识。本章将对Λ-模进行初步讨论。

本书所讨论的环都假设它是有单位元的，但不要求是交换的。

§1　模的概念

模的概念可看作是线性空间概念的推广，只是把线性空间的基域改为有单位元的环。确切的定义如下：

定义　设Λ是一个有单位元的环，A是一个加群（即$(A, +)$是个可换群），若果还有一个"左数乘"运算：$\Lambda \times A \subseteq A$（即对于任意$\lambda \in \Lambda$，$x \in A$来说，A中有唯一确定的元素与之对应，写为$\lambda x \in A$。）满足如下性质：

（i）　$\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$

（ii）　$(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$

（iii）$\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2)x$

（iv）　$1x = x$

这里x，x_1，x_2是A的任意元，λ，λ_1，λ_2是Λ的任意元，1是Λ的单位元。我们就称A是一个左Λ-模。

我们可以相似地定义右Λ-模如下：

定义　设Λ是一个有单位元的环，A是一个加群，若果还有一个"右数乘"运算，满足如下性质：

(i′)　$(x_1+x_2)\lambda = x_1\lambda + x_2\lambda$

(ii′)　$x(\lambda_1+\lambda_2) = x\lambda_1 + x\lambda_2$

(iii′)　$(x\lambda_1)\lambda_2 = x(\lambda_1\lambda_2)$

(iv′)　$x1 = x$

（x，x_1，$x_2 \in A$，λ，λ_1，$\lambda_2 \in \Lambda$，1是Λ的单位元）则称A是一个右Λ-模.

容易看出，如果Λ是一个交换环，那末，一个左Λ-模可以看成一个右Λ-模，因为我们只需给以定义，$x\lambda = \lambda x$（$\lambda \in \Lambda$，$x \in A$）就可以了. 反之，一个右Λ-模也可以看是一个左Λ-模. 因而在Λ是交换环的情况下，左Λ-模与右Λ-模勿须加以区别.

其次，左Λ-模与右Λ-模的理论是平行的. 以后如无特殊说明，所述的Λ-模，一般都是指左Λ-模.

举几个例子.

例 1　设V是一个域P上的线性空间，则V是一个P-模.

例 2　设R是一个有单位元的环，A是R的一个左（右）理想，则A是R的一个左（右）R-模.

例 3　设F是域E的一个子域，则E是一个F-模.

例 4　设G是一个加群，则G是一个Z-模（Z是整数环）. 因为若k是一个整数，按通常的倍数定义

$$kx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{k\text{个}},\quad (x \in G,\ k > 0)$$

$$0x = 0,$$

$$kx = -((-k)x).\quad (\text{若}k < 0)$$

容易验证它满足模定义的四个条件.

这就是说每一个加群都可看是一个Z-模. 因此，通常

我们对加群与Z-模并不加以区别。

例5 设F是一个域，$G=\{g_1, g_2\cdots g_n\}$，（其运算记为乘法）。令

$$F[G]=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ig_i \middle| a_i\in F,\ g_i\in G\right\}$$

这里a_ig_i是形式定义，没有具体意义．F〔G〕中两个元素相等规定为：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ig_i=\sum_{i=1}^{n}b_ig_i \Longleftrightarrow a_i=b_i \quad (i=1, 2\cdots, n)$$

我们再给F〔G〕如下“加法”与“数乘”的定义：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ig_i+\sum_{i=1}^{n}b_ig_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)g_i$$

$$k\left(\sum_{i=1}^{n}a_ig_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(ka_i)g_i \qquad (k\in F)$$

如果我们令

$$0g_1+\cdots+0g_{i-1}+1g_i+0g_{i+1}+\cdots+0g_n=g_i,$$
$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

容易验证，F〔G〕是一个以$g_1, g_2, \cdots, g_n$为基的F上的线性空间。因而F〔G〕是一个F-模。

实际上，F〔G〕是一个结合代数，通常称为群代数，群代数对群的表示论有重要的意义。

最后，我们介绍双模的概念。在下面的定义中谈到的模可以是左模，也可以是右模。

定义 假设A是Λ-模又是Γ-模，（对这两者，A的加法结构是保持一致的。）若果A对Λ的“数乘”与对Γ的

“数乘”是可交换的，（比如，A是左Λ-模又是左Γ-模，则有$\lambda(\gamma a)=\gamma(\lambda a)$；又如，A是左$\Lambda$-模又是右$\Gamma$-模，则有$(\lambda a)\gamma=\lambda(a\gamma)$，以上是对任意$\lambda\in\Lambda$，$a\in\Gamma$，$\gamma\in A$.）则称A是一个$(\Lambda,\Gamma)$-双模。

由此可见，(Λ,Γ)-双模可分为同侧的（同是左模，或同是右模）与异侧的（一是左模，另一是右模）两类。对于异侧的，当需要表明侧向时，我们常以${}_\Lambda A_\Gamma$表示A为左Λ-模又是右Γ-模的双模。

例6 每一个Λ-模都是一个$(\Lambda, \mathbf{Z})$-双模。

例7 假设Γ是环Λ的中心，则每一个Λ-模都是(Λ, Γ)-双模。

例8 设Λ是一个环，令$A=\Lambda$，则A是一个${}_\Lambda A_\Lambda$双模。

例9 设Λ是一个非交换环，令$A=\Lambda$，易见A不是同侧(Λ,Λ)-双模。

习 题 1.1

1．证明：每一个加群A都是EndA-模．这里EndA是A的自同态环，即$\mathrm{End}A=\{\sigma \mid \sigma: A\to A \text{为群同态}\}$．

2．设A是一个左Λ-模，f是环Γ到环Λ的一个环同态，且$f(1_\Gamma)=1_\Lambda$，这里1_Γ与1_Λ分别是Γ与Λ的单位元．如果我们定义

$$ax=f(a)x,\quad (a\in\Gamma,\ x\in A)$$

试证：A是一个左Γ-模．

3．设A是一个加群。证明：A是一个左Λ-模的充要条件是存在一个环同态

$$f: \Lambda\to \mathrm{End}A,\ f(1)=1_A\text{（A的恒等映射）},$$

这里EndA是A的自同态环．

4．设A是一个左Λ-模，令

$$0:_{\Lambda}A=\{\lambda\in\Lambda \mid \lambda x=0,\ \forall x\in A\}.$$

则 $0:_{\Lambda}A$ 是 Λ 的一个理想。假设 I 是含于 $0:_{\Lambda}A$ 内的任一个理想，我们定义：

$$(a+I)x=ax,\ (a\in\Lambda,\ x\in A)$$

则 A 也是一个 Λ/I-模。

5．设 A 是一个加群，m 是一个整数，则 A 是一个 Z_m-模的充要条件是 $mA=0$。

§2 模同态

定义 设 f 是左 Λ-模 A 到左 Λ-模 B 里的一个映射，若果 f 满足 Λ-线性，即对任意 x，x_1，$x_2\in A$，$\lambda\in\Lambda$，均有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$
$$f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

则称 f 为一个 Λ-模同态映射或简称 Λ-同态。并记以 $f: A\longrightarrow B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$。

若果 A 与 B 都是右 Λ-模，f 是 A 到 B 里的 Λ-同态，那么（1，2，1）就应该改为

$$f(x\lambda)=f(x)\lambda$$

若果 A 与 B 是同类型的（Λ，Γ）-双模，而且 f 既是 Λ-线性又是 Γ-线性，那么我们就称 f 为双同态映射。

命题 设 $f: A\longrightarrow B$ 和 $g: B\longrightarrow C$ 都是 Λ-同态，则它们的合成 $gf: A\longrightarrow C$ 也是 Λ-同态，用图1.1表示：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

图 1.1

说该图1.1是交换的，指的是$h=gf$。上面的实箭头表示已知的Λ-同态，虚箭头表示待求的Λ-同态。

证 令$h=gf$，则

$$h(x)=(gf)(x)=g(f(x))\in C \quad (\forall x\in A)$$

$$\begin{aligned} h(x_1+x_2) &=(gf)(x_1+x_2)=g(f(x_1+x_2))\\ &=g(f(x_1)+f(x_2))\\ &=g(f(x_1))+g(f(x_2))\\ &=(gf)(x_1)+(gf)(x_2)\\ &=h(x_1)+h(x_2) \end{aligned}$$

$$(\forall x_1, x_2\in A)$$

$$\begin{aligned} h(\lambda x) &=(gf)(\lambda x)=g(f(\lambda x))\\ &=g(\lambda f(x))=\lambda(g(f(x)))\\ &=\lambda((gf)(x))=\lambda h(x) \qquad (\forall \lambda\in\Lambda,\ x\in A) \end{aligned}$$

故h是A到C的一个Λ-同态。

现在我们把所有的由Λ-模A到Λ-模B的Λ-同态组成一个集合，以$Hom_\Lambda(A, B)$表示之，即

$$Hom_\Lambda(A, B)=\{f \mid f: A\longrightarrow B\}$$

我们按通常映射的加法与数乘的定义，对$Hom_\Lambda(A, B)$定义加法与“数乘”如下：

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

$$(\forall f_1, f_2\in Hom_\Lambda(A, B), x\in A)$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda(f(x)) \quad (\forall f\in Hom_\Lambda(A, B),\ \lambda\in\Lambda)$$

容易验证，对如上加法来说$Hom_\Lambda(A, B)$构成一个加群。

如果Λ是一个交换环，对于以上加法与数乘，$Hom_\Lambda(A, B)$构成一个Λ-模。注意，在一般情况下，$Hom_\Lambda(A, B)$未必是一个Λ-模（见习题1·2,3(3)）。

Λ-同态的合成与加法，数乘运算，显然满足如下规则：

(i) $g(f_1+f_2)=gf_1+gf_2$

(ii) $(g_1+g_2)f=g_1f+g_2f$

(iii) $(\lambda g)f=g(\lambda f)=\lambda(gf)$

以上$f,f_1,f_2\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$，$g,g_1,g_2\in \mathrm{Hom}_\Lambda(B,C)$，$\lambda\in\Lambda$。因此$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$是一个有单位元的环，这个环叫做A的自同态环，有时也记为$\mathrm{End}_\Lambda A$。

最后，再谈一谈Λ-同态的几种不同类型。

定义 假设$f: A\longrightarrow B$是一个Λ-同态。

(1)当$x\neq y$时，则有$f(x)\neq f(y)$，我们就说这个f是一个单同态，并记以$f: A\rightarrowtail B$。

(2)若果f是从A到B上的一个映射，则说f是一个满同态，并记以$f: A\twoheadrightarrow B$。

(3)若果f既是单同态又是满同态，则说f是一个同构映射，并记以$f: A\xrightarrow{\sim} B$或$f: A\cong B$

若果两个Λ-模A与B之间存在一个同构映射，则说A与B同构，记$A\cong B$。

定义 设$f: A\longrightarrow B$与$g: B\longrightarrow A$是两个Λ-同态．若果

$$gf=1_A \quad 与 \quad fg=1_B$$

则说f是可逆同态，g为f的逆同态。

易见f是可逆的充要条件是f为同构映射。

下面证明单同态与满同态的泛性定理。

定理1 设$f: A\longrightarrow B$是一个Λ-同态，则下面命题是等价的：

(1) f是单同态；

（2） 对于任意Λ-同态g_1与g_2，若$fg_1=fg_2$，则$g_1=g_2$。

证 假设（1）成立，令g_1，g_2：$X\longrightarrow A$是Λ-同态，即

$$X \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

若$fg_1=fg_2$，则

$$fg_1(x)=fg_2(x) \quad (\forall x\in X)$$

但f是单同态，所以$g_1(x)=g_2(x)$，于是$g_1=g_2$。

假设（2）成立，若（1）不成立，即f不是单同态，于是存在a_1，$a_2\in A$，$a_1\neq a_2$且$f(a_1)=f(a_2)$。现在我们取$X=\Lambda$，并令

$$g_i(\lambda)=\lambda a_i, \qquad (\forall \lambda\in\Lambda,\ i=1,\ 2)$$

易见g_1，g_2：$\Lambda\longrightarrow A$都是Λ-同态。由于

$$g_1(1)=a_1\neq a_2=g_2(1)$$

所以$g_1\neq g_2$。由（2），得$fg_1\neq fg_2$，即存在一个$\lambda\in\Lambda$，使得$fg_1(\lambda)\neq fg_2(\lambda)$。于是

$$\lambda f(a_1)=\lambda fg_1(1)=fg_1(\lambda)\neq fg_2(\lambda)$$
$$=\lambda fg_2(1)=\lambda f(a_2)$$

这与$f(a_1)=f(a_2)$矛盾。

定理 2 经设f：$A\longrightarrow B$是一个Λ-同态，则下面命题等价：

（1） f是满同态；

（2） 对于任意Λ-同态g_1与g_2，若果$g_1f=g_2f$，则$g_1=g_2$。

定理2的证明方法类似于定理1，这里就作为习题，请读者自己证明。

我们从定理 1 与定理 2 分别得到了单同态与满同态的等价命题，它们有一个共同的特点：单同态与满同态的定义都是从作用 f 之后的元素的状况来刻划的，而它们的等价命题却是从 f 是否满足"左可消"与"右可消"来刻划，它们不涉及具体模中的元素，而是从有关的全体（如必需考虑所有的等式 $g_1f = g_2f$ 或 $fg_1 = fg_2$）来考察问题。因此，我们常把定理 1 与定理 2 中的命题（2）分别叫做单同态与满同态的泛性。

习 题 1.2

1．设 $f: A \to B$ 是一个 Λ-同态，证明下面命题是等价的：

（1） f 是满同态；

（2） 对于任意 Λ-同态 g_1 与 g_2，若 $g_1f = g_2f$，则 $g_1 = g_2$。

2．证明：

（1） 若果 fg 是满同态，则 f 必是满的；

（2） 若果 fg 是单同态，则 g 必是单的。

3．设 A，B 是左 Λ-模，证明：按通常映射的加法与数乘

（1） $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 是一个加群；

（2） 当 Λ 是交换环时，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 是一个左 Λ-模；

（3） 试举一个 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 不是左 Λ-模的例子；

（4） $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$ 是一个有单位元的环。

4．设 A 是一个左 Λ-模．证明：

（1） 对于如下数乘运算

$$(\lambda f)(x) = f(x\lambda)$$

（这里 $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)$，$x, \lambda \in \Lambda$．）加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)$ 是一个左 Λ-模．

（2） $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A) \cong A$．

5．试确定 $\mathrm{Hom}_Z(Z, Z_n)$ 与 $\mathrm{Hom}_Z(Z_n, Z)$，这里 $Z_n = Z/(n)$。

§3　子模与商模

定义　设A是一个Λ-模，B是A的一个子集，若果B对于A的加法与Λ与A的数乘来说也构成一个Λ-模，则称B为A的一个子模，A为B的扩模。

从定义可见，如果B是A的一个子模，则B首先是A的一个子群，而且$\Lambda\times B\subseteq B$。我们有下面判别定理：

定理1　设B是Λ-模A的一个非空子集，则B是A的一个子模的充要条件是：

（1）　$x_1, x_2\in B\Longrightarrow x_1+x_2\in B$

（2）　$x\in B,\ \lambda\in\Lambda\Longrightarrow\lambda x\in B$

证　若果B是A的一个子模，显然（1），（2）两条成立。反之若（1），（2）两条成立，我们要证B是A的一个子模。先证B是A的一个子群。因为

$\forall x\in B$，由（2），知$(-1)x\in B$，又

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=[1+(-1)]x$$
$$=0x=0$$

所以　　$-x=(-1)x\in B$

再由（1），知B是A的一个子群。

由（1），（2），显然模定义中条件i—iv在B中也成立，故B是A的一个子模。

假设B是Λ-模的一个子模，则B是A的一个子群．由于A是一个加群，因而每一个子群都是不变子群，于是B在A中的陪集全体就构成一个商群A/B，亦即

$x_1, x_2\in A$同在一个陪集的充要条件是$x_1-x_2\in B$。

如果我们以$\bar{x}$表示x所在的陪集，则A/B对如下的陪

集加法

$$\overline{x_1}+\overline{x_2}=\overline{x_1+x_2}$$

来说构成一个加群。现在我们再给以Λ与A/B的乘法定义如下：

$$\lambda\overline{x}=\overline{\lambda x}$$

容易验证，A/B是一个Λ-模。我们就把这个Λ-模 A/B 叫做Λ-模A关于子模B的商模。或简称Λ-模A的商模。

显然

$$\eta: x\longmapsto\overline{x}$$

是Λ-模A到A/B上的一个Λ-同态，我们称这个映射 η 为A到A/B上的自然同态。

由此可见，A的每一个子模B都带来包含映射 $j: B\longrightarrow A$（以后我们常用符号 $j: B\longrightarrow A$ 表示包含映射）与自然同态 $\eta: A\longrightarrow A/B$. 前者为单的，后者为满的。现在，假设 $f: A\longrightarrow B$ 是Λ-同态，则f也分别为A与B各带来一个子模。具体地说，有下面两个命题：

命题1 设A，B是任意两个Λ-模，若 $f\in Hom_{\Lambda}(A,B)$，则f的象集

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

是B的一个子模。

证 显然f(A)是B的一个非空子集。

（1） 设 $y_1, y_2\in f(A)$，则存在 $x_1, x_2\in A$，使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$。于是

$$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)\in f(A)$$

（2） 设 $y\in f(A)$，$\lambda\in\Lambda$ 则存在 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，于是