大学数学辅导丛书

高等数学学习指导

（上册）

主　编　孙法国
副主编　韦奉岐　王拉省
主　审　文　容

西北工业大学出版社

大学数学辅导丛书

高等数学学习指导

（上 册）

主　编　孙法国

副主编　韦奉岐　王[illegible]省

主　审　文　容

西北工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/孙法国主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.9

ISBN 7-5612-1830-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 082440 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072　电话：029-88493844

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西友盛印务有限公司

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：9.5

字　　数：246 千字

版　　次：2004 年 9 月第 1 版　　2004 年 9 月第 1 次印刷

定　　价：13.00 元

前　　言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课。为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了此书。本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考资料。

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》(第四版)的章节顺序，分为十二章，每章分为七个部分。

一、本章小结

二、释疑解难

三、典型例题分析

四、综合练习题

五、模拟检测题

六、综合练习题答案与提示

七、模拟检测题答案与提示

本书有以下几个特点：①对每章的内容及方法做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点及难点。②从释疑解难入手，分析概念，克服难点，抓住了学习高等数学的关键。③通过典型例题介绍方法，注重分析和一题多解，使读者掌握学习高等数学的方法。④精心设计综合练习题和模拟检测题，力求通过练与考使读者掌握考点并适应高等数学考试。⑤在附录部分提供了三套模拟检测题，以供读者检测之用。

本书第一、九章由韦奉岐编写，第二、十二章由胡新利编写，第

三、十一章由孙法国编写，第四章由王晓东编写，第五章由成涛编写，第六、八章由王拉省编写，第七、十章由杨阿莉、马盈仓编写，全书由孙法国统稿，文容审稿。

限于编者水平及撰稿时间仓促，若有疏漏之处，敬请读者批评指正，以便修改。

编　者

2004 年 7 月于西安

目　　录

第一章　函数与极限

一、本章小结

(一) 本章小结

1. 函数的概念

函数的定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对任何的 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 称 D 为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量或函数．

对于函数概念应注意以下几点：

(1) 确定函数的两个要素：定义域和对应法则.

(2) 两个函数相同的条件：定义域相同，并且对应法则相同.

2. 函数的特性

(1) 有界性：设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得 $x \in I$ 时，$|f(x)| \leqslant M$，这时称函数 $f(x)$ 在 I 有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 无界.

注　① 正数 M 不是惟一的，但也不是任意的.

② 由于正数 M 不惟一，所以定义中的 $|f(x)| \leqslant M$ 也可以换成 $|f(x)| < M$.

③ 函数 $f(x)$ 是否有界与所讨论的区间有关. 例如，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界，但在 $(0, +\infty)$ 内无界.

(2) 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于 I 内的任何两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$）则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加（或减少）的函数. 这时区间 I 就称为单调区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

注　单调性与区间有关. 例如，$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加，因而在 $(-\infty, 0]$ 上或 $[0, +\infty)$ 上是单调的，但在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的.

(3) 奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x \in D$，必有 $-x \in D$）. 如果对于任一 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$（或 $f(-x) = -f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶（或奇）函数.

注　① 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

② 存在既是奇函数又是偶函数的函数，$f(x) = 0$ 就是，而且是惟一的.

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 t，对于任一 $x \in D$，有 $(x \pm t) \in D$，且 $f(x+t) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，t 称为 $f(x)$ 的周期.

注　① 若 t 是 $f(x)$ 的周期，则 kt（k 为整数）也是 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

② 不是任何周期函数都有最小正周期，例如，$f(x) = C$（C 为常数）是周期函数，周期为任何实数，但实数里没有最小正数.

③ 若 $f(x)$ 是周期为 t 的函数，则在定义域内每一个长度为 t 的区间上，函数图形有相同的形状.

3. *反函数*

反函数的定义：设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，在 D 上必有确定的 x 值（这样的 x 值可能不止一个）与之对应，使 $f(x) = y$，这时 x 也是 y 的函数，称为 $y = f(x)$ 的反函数，记作 $x = \varphi(y)$，或 $x = f^{-1}(y)$.

注　① 通常以 x 表示自变量，y 表示因变量，反函数 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 记为 $y = \varphi(x)$ 或 $y = f^{-1}(x)$.

② 把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=\varphi(x)$ 画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

③ 若 $y=f(x)$ 是单值单调增加(或减少)的，则它的反函数 $y=\varphi(x)$ 也是单值单调增加(或减少)的.

4. 复合函数

复合函数的定义：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 成为 x 的函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 这个函数称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量.

注　① 函数的复合是有条件的，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\ln u, u=-x^2$，因为 $u=-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所对应的函数值 $u=-x^2\leqslant 0$，因而 $y=\ln u$ 没有意义，所以 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 不能复合成一个复合函数. 可见，$u=\varphi(x)$ 值域不能完全落在 $f(u)$ 的定义域之外. 只有 $u=\varphi(x)$ 值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交非空时，它们才能复合.

② 一个函数是否为复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关. 例如 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，$y=\sqrt{1-\cos^2 x}(0\leqslant x\leqslant\pi)$，是相同函数，但对应法则的表示方法不同，前者不是复合函数，而后者是以复合函数的形式出现的(由 $y=\sqrt{u}, u=1-v^2, v=\cos x$ 复合而成).

③ 一定要会分析复合函数的复合关系. 例如，$y=\sqrt{\cos 2x}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=2x$ 复合而成；$y=\cos^2(2x+1)$ 可看作由 $y=u^2, u=\cos v, v=2x+1$ 复合而成.

5. 基本初等函数

定义：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数.

注　一定要掌握基本初等函数的定义域、值域、图形和它们所具有的函数特性.

6. 初等函数

定义：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次

复合步骤而得到的并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

7. 双曲函数

(1) 双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(2) 双曲余弦函数 $\operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(3) 双曲正切函数 $\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

8. 取整函数

设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数,记作 $y = [x]$.

9. 极限的概念

(1) 数列极限的定义:如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n > N$ 的一切 x_n,不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a$ $(n \to \infty)$. 如果数列没有极限则说数列是发散的.

注 ① ε 是任意给定的正数,ε 的大小刻划变量 x_n 与常数 a 的接近程度. ε 是任意给定的,一旦给定就相对固定下来了,即在寻找 N 的过程中不变.

② N 是正整数,它刻划了从 N 以后所有的项 x_n 都满足 $|x_n - a| < \varepsilon$. N 依赖于 ε,并且不惟一.

③ 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的几何解释:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,数列 $\{x_n\}$ 落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外的点只有有限个(至多 N 个)(见图 1-1-1). 由此推知收敛数列必有界.

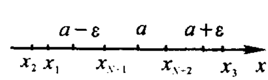

图 1-1-1

(2) $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限的定义:设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义(x_0 点可除外),如果 $\forall \varepsilon > 0$(不论多么小),$\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$,则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$.

注 ① ε 是任意给定的正数,ε 的大小刻划 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度. ε 是任意给定的,一旦给定就相对固定下来了,即在寻找 δ 的过程中不变.

② δ 是正数,它用来刻划 x 与 x_0 的接近程度,δ 与 ε 和 x_0 有关,当 x_0 给定后,δ 依赖于 ε. δ 不惟一.

③ 当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限存在与否,与 x_0 点邻域的函数值变化趋势有关,与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关. 若有定义,与 $f(x_0)$ 的值是什么也无关. 这就是在定义中为什么不把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 写成 $|x - x_0| < \delta$ 的原因.

④ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何解释:$\forall \varepsilon > 0$ 作平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$,$y = A - \varepsilon$ 介于这两条直线之间是一横条区域,依定义,对于给定的 x_0,存在点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,当 $y = f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内,但 $x \neq x_0$ 取值时,这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 或 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$,亦即这些点落在上面所作的横条区域内(见图 1-1-2).

⑤ 由极限定义以及左右极限的定义可知:$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

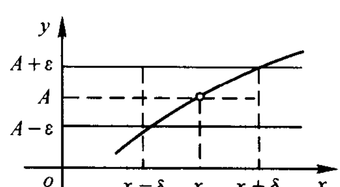

图　1-1-2

(3) $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限的定义:设函数 $f(x)$ 对绝对值无论怎么样大的 x 都有定义,如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$,则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

如果 $x > 0$ 且无限增大(记作 $x \to +\infty$),只把上面定义中的 $|x| > X$ 改为 $x > X$,就可得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 的定义;同样,$x < 0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x \to -\infty$),只把上面定义中 $|x| > X$ 改为 $x < -X$,便得 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的定义.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

10. 无穷大与无穷小

无穷小的定义:设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$(或 $X > 0$),当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 时,$|f(x)| < \varepsilon$,那么称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$).

无穷大的定义:如果 $\forall M > 0$(正数 M 无论多大),$\exists \delta > 0$(或 $X > 0$),当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 时,$|f(x)| > M$,那么称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

注 ① 不要把无穷小与很小的数混为一谈. 无穷小是在自变量某一变化过程中以零为极限的量.

② 无穷小(或无穷大) 是对自变量的某一变化过程而言的. 说函数是无穷小(或无穷大) 时一定要强调自变量的变化过程.

③ 若函数 $f(x)$ 是无穷大,则 $f(x)$ 必无界;反之,不一定成立. 例如,函数 $f(x) = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但由于 $f(x)$ 的绝对值并不是无限增大的,故 $f(x) = x\cos x$ 当 $x \to \infty$ 时不是无穷大.

④ 无穷大与无穷小的关系:在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为

无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

⑤ 函数极限与无穷小的关系：$\lim f(x) = A$的充分必要条件是：$f(x) = A + \alpha(x)$，其中$\lim\alpha(x) = 0$，即$\alpha(x)$为无穷小.

11. 无穷小阶的比较

(1) 无穷小阶的定义：设α及β是同一极限过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$，

若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$；

若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$；

若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha \sim \beta$；

若$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$，$k > 0$，则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

(2) 等价无穷小的一个重要性质. 定理：若$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且$\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(3) 常用的一些等价无穷小：当$x \to 0$时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$，$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$，$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$，$a^x - 1 \sim x\ln a(a > 0, a \neq 1)$.

12. 极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的积是无穷小.

(4) 若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$,则

(ⅰ) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(ⅱ) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$.

(ⅲ) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

注 ① 四则运算法则对数列同样成立.

② 四则运算法则中的(ⅰ)(ⅱ)可推广到有限个函数的情形.

③ 由法则(4)中的(ⅱ)可推知:$\lim Cf(x) = C\lim f(x)$ (C 为常数)及 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

(5) 几个常用公式

① $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}.$$

② 当 $a > 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(6) 复合函数的极限运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$,且在 x_0 某去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u) = A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a}f(u) = A$.

注 把上述法则中$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$换成$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$或$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$,而把$\lim\limits_{u\to a}f(u) = A$换成$\lim\limits_{u\to\infty}f(u) = A$,类似地有:$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to\infty}f(u) = A$或$\lim\limits_{x\to\infty}f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to\infty}f(u) = A$.

13. 极限存在准则

(1) 单调有界原理:单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则:若 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$.特别,若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,($n = 1$,