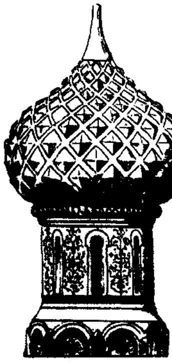
俄罗斯数学
教材选译

微积分学教程

（第一卷）（第8版）

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
□ 杨弢亮 叶彦谦 译
□ 郭思旭 校

高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

微积分学教程

(第一卷)(第8版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著

□ 杨弢亮 叶彦谦 译

□ 郭思旭 校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2005–5740 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1

ISBN 5–9221–0436–5

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第1卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥尔茨著; 杨弢亮, 叶彦谦译. —3版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 1

ISBN 7–04–018303–X

I.微... II.①菲...②杨...③叶... III.微积分 – 高等学校 – 教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 142129 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 – 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京新丰印刷厂		
		版 次	1954 年 10 月第 1 版
开 本	787 × 1092 1/16		2006 年 1 月第 3 版
印 张	33.75	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字 数	690 000	定 价	45.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 18303–00

序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 但引进基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

编者的话

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作, 曾多次再版, 并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富, 诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多, 在同类教材中尚无出其右者. 很多现代著名数学家都提到, 正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱, 让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年, 其内容却并未过时, 现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用. 不仅如此, 尽管出现了新的一批优秀教材, 但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起, 其读者群就一直不断扩大, 现在还包括许多数理特长中学 (译注：在俄罗斯, 除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学, 还有以数学与物理学为重点培养方向的中学, 其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容, 学生则要经过特别的选拔.) 的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分 (不含测度论和一般集合论). 数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授, 也 (全部或大部分) 包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用, 第二卷研究黎曼积分理论与级数理论, 第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例, 正如前文所说, 通常这些内容非常有趣, 其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.

另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里 · 米哈伊洛维奇 · 菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们的研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基

俄罗斯数学教材选译

• 数学天元基金资助项目 •

	书名	作者
	数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
	数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
*	微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
*	微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
*	微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
	数学分析讲义	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
	代数学引论 I: 基础代数	А. И. 柯斯特利金
	代数学引论 II: 线性代数	А. И. 柯斯特利金
	代数学引论 III: 代数结构基础	А. И. 柯斯特利金
*	微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
	现代几何学: 方法与应用 (I) 几何曲面、变换群与场	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
	现代几何学: 方法与应用 (II) 流形上的几何与拓扑	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
	现代几何学: 方法与应用 (III) 同调论引论	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
*	函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
*	复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
	常微分方程	Л. С. 庞特里亚金
	奇异摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
	随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
*	经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿尔诺德
*	理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
	连续介质力学 (I)	Л. И. 谢多夫
	连续介质力学 (II)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

定购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购. 书款通过邮局汇款或银行转帐均可. 购书免邮费, 发票随后寄出.

通过邮局汇款:

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部

邮政编码: 100011

通过银行转帐:

单位名称: 北京高教沙滩读者服务部

开 户 行: 北京银行德外支行

银行帐号: 700120102030302

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电　　话: 010–58581118, 010–58581117, 010–58581116, 010–58581115, 010–58581114

传　　真: 010–58581113

目　录

绪论　实数

§1. 有理数域

1. 前言 读者对于有理数及其性质, 从中学的教材内便很熟悉了. 在那时, 初等数学的要求, 已趋向于必须扩大数的领域. 的确,在有理数中即使是正整数 (自然数) 的根, 例如 $\sqrt{2}$, 也常常并不存在. 就是说, 并没有这样的有理数 $\frac{p}{q}$ (式中 p 及 q——自然数), 其平方能等于 2.

为了证明, 试假定其反面: 设有分数 $\frac{p}{q}$, 其平方为 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. 我们可以假设 $\frac{p}{q}$ 是既约分数, 即 p 和 q 是没有公约数的. 因 $p^2=2q^2$, 故 p 为偶数: $p=2r$(r—— 整数), 于是 q 为奇数. 用 p 的式子代入, 得: $q^2=2r^2$, 由此推得 q 为偶数. 所得的矛盾便证明了我们的命题.

同时, 若我们仅停留在有理数的范围内, 那么在几何学上便已显然知道, 并非一切的线段都能有一个**长度**. 例如考察边长为单位长度的正方形, 其对角线就不可能有有理长度$\frac{p}{q}$, 因若不然, 依毕达哥拉斯定理, 这长度的平方应等于 2, 而我们已看到这是不可能的.

在本绪论内, 我们要做这样一件工作: 在有理数域中添上新的数 —— 无理数, 以扩大有理数域的范围. 同时, 我们要证明, 对有理数施行算术运算及用等号、不等号结合它们等普通性质, 在扩大的领域内仍然是真实的. 为了对扩大后的数域验证上述性质, 需选出为数最少的**基本性质**, 使其余的一切性质都能作为形式逻辑的结果而从之推出: 所要验证的便仅限于这些基本性质了.

因此, 我们列举有理数域的下列一些基本性质. 同时我们将用一些例子来证明, 它们的另一些众所周知的性质是怎样从基本性质推导出来的. 我们这里所说的 “数”,

总是指的有理数, 用字母 $a, b\cdots$ 等来表示它们.

2. 有理数域的序 首先让我们约定: 所谓相等的数就是同一数的各种不同形式. 换言之, "相等"(=) 的概念即指 "恒等". 因此, 我们不再列举相等的数的性质.

有理数域的序得自 "大于"(>) 的概念, 与之有关的是第一组性质.

I 1° *每一对数 a 与 b 之间必有且仅有下列关系之一*

$$a = b,\ a > b,\ a < b;$$

I 2° *由 $a > b$ 及 $b > c$ 推得 $a > c$(> 的传递性)*;

I 3° *若 $a > b$, 则必能求得一数 c, 使*

$$a > c, \quad \text{且} \quad c > b^{①}$$

(*稠密性*).

"小于"(<) 的概念作为派生的而引入. 说 $a < b$, 当且仅当 $b > a$ 时. 显而易见, 由 $a < b$ 及 $b < c$, 即得 $a < c$(< 的传递性). 实则, 由假设, 不等式 $a < b$ 及 $b < c$, 相当于不等式 $b > a$ 及 $c > b$; 由此推得 $c > a$ (I 2°), 或即 $a < c$.

在对有理数施行算术运算时所要牵涉到的 "大于" 这一概念的其他性质, 将在以后随时指出之.

3. 有理数的加法及减法 第二组性质是关于加法的, 即关于求两数之和的运算的. 对于每一对数 a 及 b, 存在着一个 (唯一的) 数, 被称为 a 及 b 的**和**(记成 $a + b$). 这概念具有下列的性质:

II 1° $a + b = b + a$(*加法的交换性*);

II 2° $(a + b) + c = a + (b + c)$(*加法的结合性*).

零这个数比较特殊, 它具有下列特性:

II 3° $a + 0 = a$;

此外,

II 4° *对每一数 a 存在着 (与它对称的) 数 $-a$, 使* $a + (-a) = 0$.

在这些性质的基础上, 首先解决加法的逆运算即**减法**的问题. 通常称使 $c + b = a$② 的数 c 为数 a 及 b 的**差**, 假若如此, 便发生这样的数的存在及唯一性的问题.

设 $c = a + (-b)$, 则得 [II 2°, 1°, 4°, 3°]

$$c + b = [a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a + [b + (-b)] = a + 0 = a,$$

因此, 这 c 满足于差的定义.

---

①在这条件下也说成: 数 c 位于数 a 与 b 之间; 显然, 这样的数有无限个之多.

②依 I 1°, 定义差的这个等式可写成: $b + c = a$.

反之, 令 c' 为数 a 及 b 的差, 即有 $c'+b=a$. 在这等式两边各加 $(-b)$, 并变换其左边 [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

结果得 $c'=a+(-b)=c$.

这样, 就证明了数 a 及 b 的差的存在及单值性; 把它记成 $a-b$.

由差的单值性可以推得一系列的推论. 首先, 由 II 3° 推得 $0=a-a$, 因而得出结论: 除去数 0 以外, 具有相似于 II 3° 的性质的数不存在. 其次, 由此推得与所给数对称的数的唯一性: $-a=0-a$.

因为由 $a+(-a)=0$ 可推得 $(-a)+a=0$[II 1°], 所以 $a=-(-a)$, 即数 a 及 $-a$ 为互相对称的数. 我们再来证明对称数满足下述性质:

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

为此, 只需证明

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

而这由 II 1°,2°, 4°, 3°, 便可推得.

最后, 再引进联系 $>$ 与加号的一个性质.

II 5° *由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$.*

它使我们得以在不等式的两边各加上一个等量; 用它又可证明两不等式

$$a>b \quad 和 \quad a-b>0$$

是相当的. 其次, 由 $a>b$ 推得 $-a<-b$. 实则, 由 $a>b$ 引致 $a-b>0$; 但 $a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=(-b)-(-a)$, 因此这不等式可改写成: $(-b)-(-a)>0$, 由此 $-b>-a$ 或 $-a<-b$.

特别是, 由 $a>0$ 推得 $-a<0$, 由 $a<0$ 推得 $-a>0$. 若 $a\neq 0$, 则在两个互相对称的数 a 及 $-a$ 中, 必有一个 (且仅一个) 将大于 0; 它即称为数 a 或数 $-a$ 的**绝对值**, 记成

$$|a|=|-a|.$$

零的绝对值就定为零: $|0|=0$.

根据性质 II 5°, 可以逐项地合并不等式: 由 $a>b$ 及 $c>d$ 推得 $a+c>b+d$. 实际上, 由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$; 仿此, 由 $c>d$ 推得 $c+b>d+b$, 或 [II 1°] $b+c>b+d$, 然后由 I 2°, 最后即得 $a+c>b+d$.