全国高校统一招生

数学试题分类题解

朱长雄　涂军训　周家其

广西教育出版社

前　言

高考命题遵循的原则是试题必须既有利于各类高校挑选合格的新生，又有利于改进中学各科的教学．数学是中学的一门主课，现在高考数学试题确定按满分120分计入总分，这不仅反映了数学在各学科中的地位，而且提高了数学考试成绩的好坏对录取新生的影响程度．因此，历年来的高考数学试题，是广大师生共同关心和着手研究的课题．为了向中学数学教师提供研究的参考资料，也为了帮助参加高考的中学生和社会青年了解1978年以来高考数学试题的命题情况，考查的主要知识、方法和解题的技能技巧，把握好备考复习的重点、难度、知识面，掌握好考纲的要求尺度，我们于1985年编写了《全国高校统一招生数学试题分类题解(1978—1985)》一书．该书出版以后，不少读者来信对我们所做工作给予支持和鼓励，希望我们逐年续编下去，并要求将每年高考数学备用试题（以下简称副题）和进行高考改革实验的上海市、广东省的高考数学试题收入本资料．这次重版，我们采纳了这些好的意见．

本书分四部分．第一部分是高考试题分类与解答．这部分是以1978年至1987年高考数学试题（含文、理科）考查的主要知识为依据，分代数、三角、几何(平几、立几、解几)和微积分初步等知识系统编排．每系统再按教材内容顺序分节，每节又分题型(选择题、填空题、基本题和综合题)，按考题出现的时间顺序编排并进行解答．对分类编入的试题都

标明考试的年份，并选择了较优的解法或给出多种解法。还对一些重要的问题给出说明。

第二部分是高考副题分类与解答。这部分的编排方法与第一部分相仿。

第三部分是数学试题考查的主要知识和能力分析。该部分按年度分文、理科将试题考查的主要知识内容、数学基本方法和能力要求，进行分析后分类列制成表，方便读者大致了解每年数学文理科试题考查的概貌。其中，分科的累计分数是以各题考查的主要知识为依据，按该题赋分累计估算的(每题中渗透考查的其他科知识，不另计得分列入累计)。

第四部分是附录。这部分是按年度编入进行高考改革实验的上海市和广东省1985年以来的高考数学文、理科试题及其解答。

由于我们水平有限，难免有错误或不当之处，欢迎读者批评指正。

编者

1987年9月

目　录

第一部分　正　题

第二部分　副　　题

第三部分 试(正)题考查的主要知识和能力分析一览表

附 录 广东省、上海市高考数学试题及解答

广东省

第一部分　正　　题

代　　数

一、数

1. 选择题：每一个小题都给出代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个结论是正确的，请把正确结论的代号写在题后圆括号内.*

(1) [**83年理科**] 三个数a，b，c不全为零的充要条件是：

(A) a,b,c都不是零.

(B) a,b,c中最多有一个是零.

(C) a,b,c中只有一个是零.

(D) a,b,c中至少有一个不是零.

答：(D).

(2) [**84年文理科**]数集$X=\{(2n+1)\pi,\ n\text{是整数}\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi,\ k\text{是整数}\}$之间的关系是：

(A) $X\subset Y$，　　(B) $X\supset Y$，

(C) $X=Y$，　　(D) $X\neq Y$.

答：(C).

---

* 凡本书中的选择题，都是给出若干个结论，其中只有一个结论是正确的选择题，以下不再重述.

(3) [84 年理科] 如果 n 是正整数，那么

$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值

(A) 一定是零； (B) 一定是偶数；

(C) 是整数但不一定是偶数；

(D) 不一定是整数.

答：(B)。

说明：解答数学选择题的方法大体有：准确运算，严密推理，筛选弃谬，等价变形，特值检验，几何图解等几种。例如上题中第(2)小题，可作如下的判断：

解一：如果把数集X和Y看作三角方程的解集，那么这两个集合都表示终边与X轴的负半轴重合的角的集合，因此应选(C)。

解二：$\because n$，k均为整数，

则 $n=\begin{cases}2k,\\2k-1.\end{cases}\quad(k\in Z)$

$\therefore\quad 2n+1=\begin{cases}2(2k)+1=4k+1\\2(2k-1)+1=4k-1.\end{cases}\quad(n,\ k\in Z)$

故 $(2n+1)\pi=(4k\pm1)\pi,\quad(n,\ k\in Z)$

$\therefore\quad X=Y$，故结论应选C。

(4) [85 年文科] 设集合 $X=\{0,1,2,4,5,7\}$，$Y=\{1,3,6,8,9\}$，$Z=\{3,7,8\}$，那么集合$(X\cap Y)\cup Z$是：

(A) $\{0,1,2,6,8\}$， (B) $\{3,7,8\}$，

(C) $\{1,3,7,8\}$， (D) $\{1,3,6,7,8\}$。

答：(C)。

(5) [86 年文科] 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是

（A）$A\cup B$； （B）$A\cap B$；
（C）$\overline{A}\cup\overline{B}$； （$D$）$\overline{A}\cap\overline{B}$；

答：（D）。

（6） ［**86年文理科**］给出20个数：

87	91	94	88	93	91	89	87	92	86
90	92	88	90	91	86	89	92	95	88

它们的和是

（A）1789；（B）1799；（C）1879；（D）1899。

答：（B）。

（7） ［**86年文理科**］在下列各数中，已表示成三角形式的复数是：

（A）$2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

（B）$2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

（C）$2\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+i\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$；

（D）$-2\left(\sin\dfrac{\pi}{4}-i\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$。

答：（B）。

（8） ［**87年文科**］复数$\sin 40°-i\cos 40°$的辐角为

（A）40°；（B）140°；（C）220°；（D）310°。

答：（D）。

（9） ［**87年文理科**］设S，T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，记$X=S\cap T$，那么$S\cup X$是

（A）S；（B）T；（C）$\varnothing$；（D）X。

答：（A）。

2．填空题（直接写出结果）：

（1）［**81年文理科**］设A表示有理数的集合，B表示无理数的集合．即设$A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$，试写出：

(i) $A\cup B$； (ii) $A\cap B$．

答：(i) $A\cup B=\{$实数$\}$；(ii) $A\cap B=\varnothing$．

（2）［**85年文科**］设i是虚数单位，则$(1+i)^6$的值是：

答：$-8i$．

（3）［**86年文理科**］已知$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$，求$\omega^2+\omega+1$的值．

答：0．

3．［**80年文科**］化简：$\dfrac{1-3i}{3-2i}$．

解：原式$=\dfrac{(1-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

$$=\frac{3+6+(2-9)i}{9+4}$$

$$=\frac{9-7i}{13}=\frac{9}{13}-\frac{7}{13}i.$$

说明：进行复数运算时，了解并记住下面这些结果，将能简化运算的过程：

$\dfrac{1}{i}=-i$； $(1\pm i)^2=\pm 2i$；

$\dfrac{1}{1\pm i}=\dfrac{1}{2}(1\mp i)$； $\dfrac{1+i}{1-i}=+i$；

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i$； $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1$； ……

4．［83年文科］已知复数 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，求证 $z^3+\dfrac{1}{z^3}=2\cos3\alpha$。

证明：$z^3+\dfrac{1}{z^3}=z^3+z^{-3}$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3+(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-3}$$
$$=\cos3\alpha+i\sin3\alpha+\cos(-3\alpha)+i\sin(-3\alpha)$$
$$=2\cos3\alpha。$$

5．［83年理科］（1）证明：对于任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|z|$ 适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$；

（2）当实数 t 取什么值时，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的幅角主值 θ 适合 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$？

证明：（1）复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+i\sqrt{|\sin t|}$（其中 t 为实数）的模 $r=|z|$ 为

$$r=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$$
$$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}.$$

要证对任意实数 t，有 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$，只要证对任意实数 t，$|\cos t|+|\sin t|\leqslant\sqrt{2}$ 成立。

对任意实数 t，因为 $|\cos t|^2+|\sin t|^2=1$，

$\therefore$ 可令 $\cos\varphi=|\cos t|$，$\sin\varphi=|\sin t|$。

于是 $|\cos t|+|\sin t|=\cos\varphi+\sin\varphi$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$

$$\leqslant\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$$

(2) ∵ 复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$ 的实部与虚部都是非负数，

∴z的幅角主值θ一定适合$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，从而

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\Longleftrightarrow 0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant 1.$$

显然 $r=|z|\neq 0$。

$$\because\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{\sqrt{|\sin t|}}{r}}{\dfrac{\sqrt{|\cos t|}}{r}}=\frac{\sqrt{|\sin t|}}{\sqrt{|\cos t|}}=\sqrt{\operatorname{tg} t}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant 1 &\Longleftrightarrow 0\leqslant\sqrt{|\operatorname{tg} t|}\leqslant 1\\ &\Longleftrightarrow 0\leqslant|\operatorname{tg} t|\leqslant 1\\ &\Longleftrightarrow -1\leqslant\operatorname{tg} t\leqslant 1.\end{aligned}$$

由于 $y=\operatorname{tg} t$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内是增函数，并且它的周期是$\pi$，

因此，$-1\leqslant\operatorname{tg} t\leqslant 1$ 的解是

$$k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4},\quad (k\in Z)$$

这就是所求实数 t 的取值范围。

6．[**85年理科**]设 a，b 是两个实数，

$A=\{(x,y):\ x=n,\ y=na+b,\ n$ 是整数$\}$；

$B=\{(x,y):\ x=m,\ y=3m^2+15,\ m$ 是整数$\}$；

$C=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 XOY 内的点集合。

讨论是否存在 a 和 b 使得：

(1) $A\cap B\neq\varnothing$ ($\varnothing$表示空集)；(2) $(a,b)\in C$ 同时成立。

解：如果实数 a 和 b 使得 (1) 成立，于是存在整数 m 和 n 使得

$$(n, na+b)=(m, 3m^2+15),$$

即 $\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$

由此得出，存在整数 n 使得

$na+b=3n^2+15$，或 $na+b-(3n^2+15)=0$。

这个等式表明点$P(a,b)$在直线 l: $nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，

记从原点到直线 l 的距离为 d，于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)\geqslant 12,$$

$$(\because 当 x>0 时 x+\frac{1}{x}\geqslant 2),$$

当且仅当$\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1$，即 $n^2=3$时上式中等号才成立。

由于 n 是整数，因此 $n^2\neq 3$，所以上式中等号不可能成立，即 $d>12$。

$\because$ 点P在直线 l 上，点 P 到原点的距离为$\sqrt{a^2+b^2}$ 必须满足

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12,$$

而(2)成立要求 $a^2+b^2\leqslant 144$，即$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$。

由此可见使得(1)成立的 a 和 b 不能使(2)成立。

$\therefore$　不存在实数 a 和 b 使得(1)，(2)同时成立。

7．[**85年理科**]设O为复平面的原点，Z_1和Z_2为复平面内的两个动点，并且满足：

(1) Z_1 和 Z_2 所对应的复数的辐角分别为定值 θ 和 $-\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$；

(2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值S。

求$\triangle OZ_1Z_2$的重心Z所对应的复数的模的最小值。

解：设Z_1，Z_2和Z对应的复数分别为z_1，z_2和z，其中 $z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=r_2(\cos\theta-i\sin\theta)$。

由于Z是$\triangle OZ_1Z_2$的重心，根据复数加法的几何意义，则有

$$3z=z_1+z_2=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_1-r_2)i\sin\theta.$$

于是
$$\begin{aligned}|3z|^2&=(r_1+r_2)^2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\&=(r_1-r_2)^2\cos^2\theta+4r_1r_2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\&=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\cos^2\theta.\end{aligned}$$

又知$\triangle OZ_1Z_2$的面积为S及$\sin 2\theta>0$ ($\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，

$\therefore$　$\frac{1}{2}r_1r_2\sin 2\theta=S$，即 $r_1r_2=\frac{2S}{\sin 2\theta}$.

由此，
$$\begin{aligned}|3z|^2&=(r_1-r_2)^2+\frac{8S\cos^2\theta}{\sin 2\theta}\\&=(r_1-r_2)^2+4S\operatorname{ctg}\theta.\end{aligned}$$

故当 $r_1=r_2=\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\theta}}$时，$|z|$ 最小，且

$$|z|_{最小}=\frac{2}{3}\sqrt{S\operatorname{ctg}\theta}.$$

8．[86年文科] 求 $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$ 的辐角主值最小的复数 z。

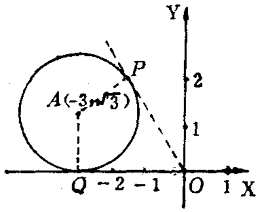

图 1

解：满足方程 $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$ 的复数在复平面上所对应的点的全体组成了如图所示的一个圆，其圆心 A 对应的复数为 $-3+\sqrt{3}i$，半径为 $\sqrt{3}$，因而圆与 x 轴相切于 Q，点 Q 对应的复数是 -3。

从点 O 作圆的另一条切线 OP，P 为切点，则点 P 所对应的复数为所求复数.

$\because\quad -3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$，

$\therefore\quad \angle BOA=150^\circ,\ |OA|=2\sqrt{3}$，

$\angle QOA=180^\circ-\angle BOA=30^\circ$。

$\because\quad OP$、OQ 是同一点引出的圆的两条切线，A 是圆心，

$\therefore\quad \angle AOP=\angle QOA=30^\circ$，

$\angle QOP=2\angle QOA=60^\circ$，

$\angle BOP=180^\circ-\angle QOP=120^\circ$，

$$|OP|=|OA|\cos\angle AOP=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

$\therefore$ 所要求的复数

$$z=3(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$$

$$=3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i.$$

9．[87 年文科] 在复平面内，已知等边三角形的两个顶点所表示的复数分别为2，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求第三个顶点所表示的复数。

解法一：设第三个顶点所表示的复数为 $z=x+yi$ $(x,y\in R)$．由题意，得

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & (1)\\ (x-2)^2+(y-0)^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & (2)\end{cases}$$

由(1)得　$y=\sqrt{3}(x-1)$，　(3)

由(2)得　$x^2-4x+4+y^2=3$。　(4)

把(3)代入(4)得　$2x^2-5x+2=0$，

解得　$x_1=\frac{1}{2}$，　$x_2=2$。

把 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$ 分别代入(3)，得

$$y_1=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_2=\sqrt{3}.$$

答：第三个顶点所表示的复数为$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$或$2+\sqrt{3}i$。

10．[87年理科] 设复数z_1和z_2满足关系式 $z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{z}_2=0$，其中 A 为不等于 0 的复数．证明：

(1) $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$；

(2) $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|$。

证法一：(1) 由已知的关系式得