全国高等师范专科学校教材

数学分析

纪乐刚　主编

华东师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

数学分析

主　　审：程其襄

主　　编：纪乐刚

副 主 编：吴顺唐

编写人员：纪乐刚　吴顺唐

李文荣　杨克仁

项正清　王贤斌

华东师范大学出版社

数学分析

纪乐刚 主编

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号）
邮政编码：200062

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：22.25 字数：556 千字
1993 年 10 月第一版 1993 年 10 月第一次印刷
印数：001—3,000 本

ISBN 7-5617-0815-7/N·070 定 价：12.20元

出版说明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决。长期以来，师范专科教学基本上是借用本科的教材，不但借用师范本科教材，而且还借用综合大学的本科教材，不适合师范专科的特点，影响了师范专科的教学质量。近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套；有的学科甚至编写了几种，质量参差不齐。虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而限制了师专办学效益的提高，也给师专的教学管理和评估工作带来了许多困难。

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教委师范司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请了全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》； 1988 年 7 月在长春市东北师范大学又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988～1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》。八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理。

在国家教委师范司的统一部署、各省市自治区教委的大力帮助和出版社的积极组织下，聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编。各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，组织

编者收集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续面世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，並在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保持与当代科学和师专教育实践的同步发展。

1989年1月

序

这是一部别具一格、颇有特色的教材。它根据国家教委师范司拟定的二年制师专教材的教学大纲的要求，既重视了教材的科学性和系统性，又强调了理论联系实际（包括中学数学教学的实际）。尤其在若干重要问题的处理上，它不落俗套，独辟蹊径，使人有面目一新之感。

我这里指的是：本书以比较直观的戴德金定理来刻划实数的连续性，在圆弧长的严格定义的基础上导出$\frac{\sin x}{x}$的极限，以及面积、体积概念的公理式的处理。所有这些，我认为都是相当大胆的革新，同时也是某种现代化的体现，虽然它并未超出经典分析的范围。

欣值本书出版之际，谨缀此数语以为之序。

程其襄

一九九一年五月于沪滨

本书所采用的主要符号

1. $\forall$ 表示"任意给定"，$\exists$ 表示"存在"，$\exists|$ 表示"存在唯一"。例如，$\forall x \in R^+, \exists| y \in R^+$ 使 $y = 2x$。

2. $A \cup B$ 表示集合 A 与 B 的并集，$A \cap B$ 表示 A 与 B 的交集。$\in$ 表示属于，例如 $x \in A$，意指 x 是集合 A 的一个元素。

3. $U(x, \delta)$ 表示点 x 的一个 δ 邻域，$U_0(x, \delta)$ 表示点 x 的一个空心 δ 领域。

4. R 表示实数集，Q 表示有理数集，Z 表示整数集，N 表示自然数集。另外，R^+、R^- 分别表示正实数集与负实数集，Q^+、Q^-、Z^+、Z^- 等可作同样的理解。

5. $P(x_i, n)$ 表示有限点集 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 对某区间 $[a, b]$ 形成的一种分法，$P[a, b]$ 表示对区间 $[a, b]$ 的所有分法的集合。

目　录

第一章 引 论

众所周知，函数是数学领域中最基本、最重要的概念之一，它在自然科学、工程技术乃至社会科学的不少领域中都有着广泛的应用。因此，对于函数的系统研究就显得非常重要。数学分析的主要任务就是利用极限的方法，从连续、微分与积分等几个方面对实值函数作最基本的研究。本章主要是简述实数的一些主要性质，介绍函数的一些基本概念。

§1 实数概念

一、实数、数集

1．实数的概念

在初等数学中已将有理数定义为两整数之比 $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$。同时，我们也了解了有理数与小数的如下关系：

(1) 有理数 $\frac{p}{q}$ 可化为小数，而且仅可化为有限小数或无限循环小数．事实上，对 $\frac{p}{q}$ 作除法运算，当除到某一步得到余数为零时，则 $\frac{p}{q}$ 被化为有限小数；若余数不出现零，由于此时余数至多有 $q-1$ 种可能：

$$1,2,\cdots,q-1,$$

从而除法运算进行到 q 步之内，总有两步得到的余数是相同的。显然此时 $\frac{p}{q}$ 被化为无限循环小数。

(2) 有限小数与无限循环小数也可化为有理数：对于有限小

数，问题是显然的；对于无限循环小数

$$a=a_0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n,$$

我们有

$$10^{m+n}a=a_0a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n+0.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$$

及
$$10^m a=a_0a_1a_2\cdots a_m+0.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n,$$

两式相减、整理，即得

$$a=\frac{a_0a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n-a_0a_1a_2\cdots a_m}{10^{m+n}-10^m}$$

有理数曾在很长一段历史时期内满足了人们的实际需要，但是随着人类文明的发展，2500 多年以前数学家们就逐步发现了有理数的局限性，发现了许多很实际的量却不能用有理数来表示。例如，边长为 1 的正方形的对角线之长$\sqrt{2}$就不是一个有理数。因为，若假设$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$（p、q 为不可约的正整数），便有

$$2q^2=p^2,$$

显然 p^2 为偶数，从而 p 亦为偶数，记为 $p=2m$。所以

$$2q^2=4m^2,$$

即
$$q^2=2m^2.$$

所以 q^2 为偶数，从而 q 亦为偶数。这与 p、q 为不可约矛盾。所以$\sqrt{2}$不是有理数。无论是对$\sqrt{2}$施行开方运算、还是对单位正方形的对角线进行实际量度，都会得到无限不循环小数

$$1.41421\cdots\cdots.$$

为了弥补有理数在实际应用中的不足，一批无限不循环的小数便被逐步认识。所以，当人们把有限小数及无限循环小数称为有理数的同时，自然地也就把无限不循环小数称为无理数了。

需要说明，把“无限不循环小数称为无理数”这句话作为无理数的定义来提出却是不尽合理的，起码在现代科学的严密性标准的衡量下这种定义是不尽合理的。在第三章 §5 中，我们将说明这个道理并给出无理数的严格定义。

现在我们暂时不去追求定义的严格性，却应该明确：无理数就是指那些无限的不循环小数。

2．数集

我们约定，所有有理数构成有理数集，记为 Q；所有无理数构成无理数集。有理数集与无理数集的并集称为实数集，记为 R。在此基础上无理数集可记为 $R-Q$。

此外，实数集的任何一个子集都称为数集。最常用的数集就是大家已经熟悉的区间。区间有如下九种形式：

开区间 $(a,b)=\{x: a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$

半开区间 $(a,b]=\{x: a<x\leqslant b\}$

半闭区间 $[a,b)=\{x: a\leqslant x<b\}$

无穷区间 $(-\infty,a)=\{x: x<a\}$

$(-\infty,a]=\{x: x\leqslant a\}$

$(b,+\infty)=\{x: b<x\}$

$[b,+\infty)=\{x: b\leqslant x\}$

$(-\infty,+\infty)=R$。

另外，还常用到如下两个特殊的数集：

a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)=\{x: |x-a|<\delta\}$

及 a 的无心 δ 邻域 $U^0(a,\delta)=\{x: 0<|x-a|<\delta\}$。

二、实数的性质

1．实数的有序性与封闭性

任意两个实数 a、b，必满足下述三个关系之一：$a<b$、$a=b$、$a>b$，这一性质称为实数的有序性（或三歧性）。

任意两实数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是一个实数，这一性质称为实数对于四则运算的封闭性。

顺便提一句，有理数也具有对于四则运算的封闭性；但无理数却不具备这一性质，例如无理数 $2+\sqrt{3}$ 及 $2-\sqrt{3}$ 的和与积都

是有理数。

2．实数的稠密性与连续性

实数的稠密性是指：任意两个不相等的实数之间总有一个实数。考虑到应用上的需要，常见教科书上多采用如下更强的结论：任意两个不相等实数之间总有一个有理数，也总有一个无理数（分别称为有理数及无理数在实数集中的稠密性）。

实数的连续性是指：在表示实数的数轴上，作为实数的点之间不存在任何的空隙。

对于实数连续性的更深刻的描述以及实数稠密性与连续性的严格证明，我们都安排在第三章末，当给出了实数的严格定义之后再去完成。

最后指出，由于（表示实数的）数轴上的点与全体实数之间有着一一对应的关系，因此，本书中将把“实数 a”与“数轴上的点 a”两种说法看作有相同的含意。

思考与练习

1．求证：一个非零的有理数与一个无理数的和、差、积、商一定是一个无理数.

2．求证：$\forall\delta\in R^{+}$，$\exists n\in N$，使$\frac{1}{n}<\delta$.

3．求证：$\forall x\in(a,b)$，$\exists\delta>0$，使$\cup(x,\delta)\subset(a,b)$。

4．若 P 为质数，试证 $\sqrt{P}$ 为无理数.

5．设 T_1、$T_2\in R^{+}$，且 $\frac{T_1}{T_2}$ 为有理数，试证：存在 L，它是 T_1 的整数倍、也是 T_2 的整数倍.

§2 确界存在公理

一、数集的界与确界

定义1 设数集 E 非空，如果 $\exists M\in R$，使 $\forall x\in E$，有 $x\leqslant M$

$(x \geqslant M)$，则称 M 是数集 E 的一个上(下)界，或称数集E有上(下)界。

显然，一个数集如果有上界 M，则大于 M 的一切实数都是该数集的上界。因此，有上界的数集必有无穷多个上界。下界的情况也是如此。

例如，数集 $(-\infty, 2)$ 有上界，$[2, +\infty)$ 中的每一个数都是它的上界；数集 $[1, +\infty)$ 有下界，且 $(-\infty, 1]$ 中的每一个数都是它的下界。

掌握一个概念的否定叙述，往往会明显地加深对于此概念的理解。对于定义1，我们可以给出如下的两种否定叙述：

(1) 设数集 E 非空，对于定数 M，$\exists x_1 \in E$，使 $x_1 > M$，则 M 不是数集 E 的一个上界。

(2) 设数集 E 非空，如果 $\forall M \in R$，$\exists x_M \in E$，使 $x_M > M$，则称数集 E 无上界。

前者是对"M是上界"的否定，后者是对"E 有上界"的否定。后者否定得彻底，而前者仅指出 M 不是上界，至于 E 到底有没有上界并没有指明。

如果一个数集既有上界也有下界，则称该数集有界。显然，上述说法与如下的定义等价。

定义2 设数集 E 非空；如果 $\exists M > 0$，$\forall x \in E$，有 $|x| \leqslant M$，则称数集 E 有界。

下面讨论数学分析中的一个非常重要的概念——数集的确界。我们已经知道，有上界的数集一定有无穷多个上界。同样，有下界的数集也一定有无穷多个下界。在此基础上，我们给出如下的定义。

定义3 设某数集有上界，如果在其上界集合中存在一个最小者，则称这个最小的上界是该数集的上确界；设某数集有下界，如果在其下界集合中存在一个最大者，则称这个最大的下界是该数

集的下确界。

例如，数集$[1,2)$的上界集合为$[2,+\infty)$，而$[2,+\infty)$中有最小数2，故$[1,2)$有上确界2；又它的下界集合为$(-\infty,1]$，而$(-\infty,1]$中有最大数1，所以该数集有下确界1。

显然，上确界概念包含有两层意思：(1)上确界是一个上界；(2)它是上界中的最小者，或者说，比它小的任何一个数都不再是该集合的上界。了解了这两层意思以后，我们即可将确界的定义改述如下：

定义4 设数集E非空，如果$\exists a\in R$，满足

(1) $\forall x\in E$，有$x\leqslant a$；

(2) $\forall a'<a$，$\exists x_1\in E$，使$a'<x_1$，

则称a是数集E的上确界，记为$a=\sup E$。

类似地可以写出下确界的定义为：设数集E非空，如果$\exists b\in R$，满足

(1) $\forall x\in E$，有$b\leqslant x$；

(2) $\forall b'>b$，$\exists x_1\in E$，使$x_1<b'$，则称b是数集E的下确界，记为$b=\inf E$。

例1 设$G=\left\{\frac{n-1}{n}: n\in N\right\}$，试证$1=\sup G$。

证明 (1) $\forall n\in N$，有$\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$；(2) $\forall a<1$，有$1-a>0$。取足够大的$n_1\in N$，使$n_1>\frac{1}{1-a}$。此时有$1-\frac{1}{n_1}>a$。所以$\exists \frac{n_1-1}{n_1}\in G$，使$\frac{n_1-1}{n_1}=1-\frac{1}{n_1}>a$。由定义4知：$1=\sup G$。

例2 设数集A、B非空，且$\sup A=a$、$\sup B=b$，如果$\forall x_1\in A$，$\exists y_1\in B$，使$x_1<y_1$，试证$a\leqslant b$。

证明 采用反证法。设$a>b$，由于$a=\sup A$，所以由上确界定义知：$\exists x_1\in A$，使$x_1>b$。由题设条件又知，$\exists y_1\in B$，使$x_1<y_1$，

从而 $b<y_1$，这与 $b=\sup B$ 相矛盾。

例3 设 $a=\sup A$，记 $B=\{y: -y=x\in A\}$，则有 $-a=\inf B$。

证明 $\forall y\in B$，有 $-y=x\in A$，故有 $-y\leqslant a$，即 $y\geqslant -a$；$\forall r>-a$，有 $-r<a$，故 $\exists x_1\in A$，使 $-r<x_1$，从而有 $r>-x_1=y_1\in B$。由下确界定义知 $-a=\inf B$。

二、确界存在公理

掌握了确界概念的本质以后，更重要的是搞清确界的存在问题。

设数集 E 有上界，对于 E 的每一个上界 M，大于 M（从数轴上讲，在 M 右边）的所有实数无一例外地都是 E 的上界。由此显见，E 的所有上界构成的集合是一个左边有限右边无限的区间，其形式只能为 $(a,+\infty)$ 或 $[a,+\infty)$，这里 a 是某个确定的常数。如果这个上界集合是前者，即 $(a,+\infty)$ 中的每一个数都是 E 的上界，而端点 a 不是，于是由上界定义知：起码存在一个 $a'\in E$，使 $a<a'$。这说明 (a,a') 中的每一个数都不是 E 的上界，产生矛盾。所以这个上界集合只能是 $[a,+\infty)$。很明显，此时 a 是上界集合中的最小数，即 a 是 E 的上确界。

有了上面粗浅的说明，我们便可提出本书中第一个重要命题如下：

确界存在公理 非空有上(下)界的数集必有上(下)确界。

这个公理是本书的基础理论的理论基础。我们不仅要很好地理解它，更要在今后的学习中善于应用它。

例4 设 $\alpha\in R-Q$，记 $A=\{a^x: x\in Q$ 且 $x<\alpha\}$ $(a>1)$，试证 A 有上确界。

证明 任取 $\beta\in Q$，使 $\alpha<\beta$。由于 $x\in Q$ 且 $x<\alpha$，于是 $x<\beta$，从而 $a^x<a^\beta$，所以 a^β 是 A 的一个上界。根据确界存在公理知 A 有上确界。

例5 设数集 A、B 皆非空且 $A\subset B$，试证