大学物理函授教材

线性代数

杨慧　张同君　编

东北师范大学出版社

大学物理函授教材

线　性　代　数

杨　慧　　张同君　编

东北师范大学出版社

线 性 代 数

杨 慧 张君同 编

责任编辑：于荣海　　封面设计：李冰彬　　责任校对：海　山

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

（长春市斯大林大街110号）　　长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32　　1988年6月第1版

印张：12.75　　1988年6月第1次印刷

字数：329千字　　印数：0001—2500

ISBN 7-5602-0116-4/O·23　　定价：2.65元

前　　言

本书是在为物理系本科函授生编写的《线性代数》教材的基础上，经多次修改编写而成的。主要内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、线性变换、欧氏空间（酉空间）、二次型等七章。在编写中，根据物理专业的需要，加强了紧密联系物理问题的部分，充实了有关的例题与习题。考虑到函授学习的特点，本书编写力求做到：每章每节开头都明确地提出讨论的主要问题，以便读者掌握要点；在概念的引入上，尽可能地通过实例采用几何直观，由浅入深，由特殊到一般，由具体到抽象，使认识逐步深化；理论论证力求思路清晰、推理详尽，并注意方法的归纳总结；文字叙述力求通俗易懂，便于自学。为了帮助读者巩固和检查所学内容，本书每节都配有适量的习题，章末给出了小结和自我检查题，并在本书后附有习题及自我检查题答案。

书中带*号的章节属于选学内容。如时数较少，初等矩阵一节可只介绍用初等变换求逆阵的方法而不加证明，个别定理（如惯性定律等）的证明也可略去。

本书除可做为师范院校物理系的函授教材外，还可供物理系本科生及理工科院校相近专业做教材使用，或做为业余大学、电视大学相关专业师生的参考书及自学用书。

本书在分工修改和编写的基础上，最后由杨慧修订统稿。

本书在编写过程中，得到了东北师大数学系和物理系的同志们的热情关怀，特别是高绪珏副教授仔细地审阅了原稿，提出了许多宝贵的修改意见，我们在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，热切希望使用本书的同志批评指正。

编　　者

1986．10于东北师大

目　　录

第一章　行列式 …… 1

§ 1　二、三阶行列式 …… 1

§ 2　排列 …… 8

§ 3　n阶行列式的定义 …… 11

§ 4　n阶行列式的性质 …… 16

§ 5　行列式按行（列）展开 …… 30

§ 6　行列式的计算 …… 40

§ 7　克莱姆（Cramer）法则 …… 51

本章小结 …… 56

自我检查题 …… 58

第二章　线性方程组 …… 61

§ 1　消元法 …… 62

§ 2　矩阵及其初等变换 …… 65

§ 3　矩阵的秩 …… 76

§ 4　线性方程组有解条件及公式解 …… 81

本章小结 …… 95

自我检查题 …… 97

第三章　矩阵 …… 99

§ 1　矩阵的运算 …… 99

§ 2　特殊矩阵 …… 110

§ 3　逆 矩 阵 …… 116

§ 4*　初等矩阵 …… 121

§ 5* 矩阵的分块 ……126
本章小结 ……136
自我检查题 ……138
第四章 向量空间……139
§ 1 向量空间的概念 ……141
§ 2 向量的线性关系……148
§ 3 基底、维数、坐标……164
§ 4 基底变换与坐标变换 ……171
§ 5 线性方程组解的结构 ……176
§ 6 线性空间 ……187
例题选解 ……200
本章小结 ……204
自我检查题 ……207
第五章 线性变换……209
§ 1 线性变换的定义及简单性质 ……209
§ 2 线性变换的运算……217
§ 3 线性变换的矩阵表示 ……222
§ 4 特征值与特征向量……235
§ 5 矩阵对角化问题……245
例题选解 ……257
本章小结 ……263
自我检查题 ……265
第六章 欧氏空间 ……266
§ 1 欧氏空间的定义和基本性质 ……266
§ 2 标准正交基底 ……274
§ 3 正交变换 ……287
§ 4 对称变换 ……293
§ 5* 酉空间 ……306
例题选解 ……319

本章小结 ……………………………………………………326
自我检查题 …………………………………………………330
第七章 二次型……………………………………………332
§1 二次型及其标准形……………………………………333
§2 化二次型为标准形……………………………………337
§3 惯性定律 ……………………………………………348
§4 恒正型 ………………………………………………353
§5* 同时化简一对二次型 ………………………………358
本章小结 ……………………………………………………363
自我检查题 …………………………………………………364
习题答案与提示……………………………………………365

第一章　行列式

行列式是数学中重要工具之一，在线性代数理论的研究中起着重要作用。同时，行列式作为数学工具在其它方面也有着广泛的应用。

本章首先应用二、三阶行列式给出二、三元线性方程组的公式解；然后分析二、三阶行列式，给出 n 阶行列式定义，讨论行列式性质；最后以行列式为工具给出一类特殊的线性方程组的公式解。

§1　二、三阶行列式

本节通过解二、三元线性方程组，引入二、三阶行列式的概念。

设含有两个未知数、两个方程的线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

由消元法可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \qquad (2)$$

明显地，（2）是（1）在$a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}\neq 0$时的求解公式。为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念。

定义1 **对给定的**$4=2^2$**个数**a_{ij}（$i=1, 2$；$j=1, 2$）**排成二行二列，用记号**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$**称为二阶行列式。即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

行列式中横排为**行**，竖排为**列**。a_{ij}位于表中i行j列，称为i行j列元素。

有了二阶行列式，线性方程组（1）的求解公式（2）可表为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2'}$$

（2′）中的x_1，x_2的分母是相同的行列式，都是方程组中未知数的系数按着原来的次序排成的二阶行列式，称之为方程组的**系数行列式**。x_1的分子行列式，是用方程组的常数项代替系数行列式的第1列所得到的行列式。x_2的分子行列式，是用常数项代替系数行列式的第2列所得到的行列式。

例1 用行列式解二元线性方程组

$$2x_1+x_2=4$$
$$x_1+4x_2=9$$

解 方程组系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-1\times1=7\neq0$$

故方程组有唯一解。由公式（2′）有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{16-9}{8-1}=\frac{7}{7}=1$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{18-4}{7}=\frac{14}{7}=2$$

所以原方程组的解为

$$x_1=1$$
$$x_2=2$$

设三元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

用 $A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$A_{21}=-a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32}$，$A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 依次去乘（3）中的各方程的两端后相加，经计算可知，在和中 x_2，x_3 的系数为0，即消去 x_2，x_3 得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\ x_1$$

$$= (b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32})$$

当$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$时，可求得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

类似地可求得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + b_3a_{13}a_{21} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}b_3a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{3}}$$

所以，当$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$时方程组（3）有唯一解。即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \qquad (4)$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_1a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

显然这个结果比二元线性方程组的公式更难记，为此引入三阶行列式的概念。

定义 2 对给定的 $9=3^2$ 个数排成三行三列，用记号

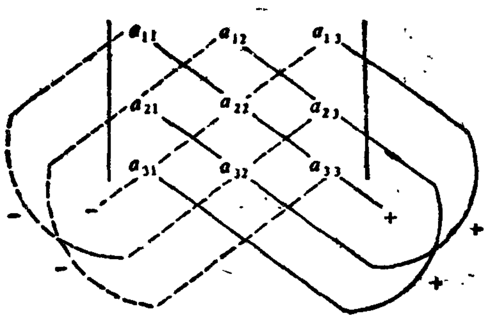
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$ $-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称为三阶行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式中横排叫做行，竖排叫做列。a_{ij}（$i,j=1,2,3$）位于行列式的 i 行 j 列，叫做 i 行 j 列元素。

三阶行列式是6项的代数和；每一项是取自行列式中不同行不同列的三个元素的乘积；有三项取正号，有三项取负号。为了记忆，取正号的项用实线连结，取负号的项用虚线连结（如图）。



有了三阶行列式，则线性方程组（3）的公式解（4）可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad (4')$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

（4′）中的x_1，x_2，x_3的分母都是相同的行列式，是由方程组中的未知数的系数按着原来的相关次序排成的三阶行列式，称为**系数行列式**。x_1，x_2，x_3的分子行列式是由方程组的常数项所组成的列分别代替系数行列式的第1，2，3列所得到的行列式。以后用D_i（$i=1,2,3$）表示。

例2 用三阶行列式解线性方程组

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1 \\ x_1+3x_2-2x_3&=4 \end{aligned}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8+5+9-2-(-30)-6=28\neq 0$$

故方程组有唯一解。解中 x_1，x_2，x_3 的分子行列式分别为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{28}$$

二、三阶行列式的引入不仅使方程组求解公式简单明瞭，便于记忆，而且还具有启发性。使我们很容易想到对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组是否也有类似的结果。回答是肯定的。这正是本章讨论的中心课题。为此，需要引入 n 阶行列式的定义，并讨论其性质。

习　　题

1.1　计算二、三阶行列式

1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$　　　2）$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

3） $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 4） $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

5） $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 6） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

1.2 用行列式解下列方程组

1） $\begin{aligned} 5x_1+2x_2&=3 \\ 4x_1+2x_2&=1 \end{aligned}$

2） $\begin{aligned} x\cos\alpha-y\sin\alpha&=a \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha&=b \end{aligned}$

3） $\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=1 \\ 4x_1+2x_2+5x_3&=4 \\ 2x_1\qquad+2x_3&=6 \end{aligned}$

§2 排　　列

本节作为n阶行列式定义的准备，讨论排列的某些简单性质。

所谓n元排列，是由1，2，…，n这n个不同的数码组成的有序数组。

例如，12，21是两个二元排列；4312是4元排列。而

123，132，231，213，312，321

是所有的三元排列。

一般地，将n元排列记作$i_1i_2\cdots i_n$。易知，n元排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n! \quad (n!\text{ 读作 } n \text{ 的阶乘})$$

容易发现，在所有的n元排列中，除$123\cdots n$是按自然顺序（由小到大）排列外，其它的n元排列都出现反序的现象。即大的数码排在小的数码前面。

定义 **在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，每个数码前面比它大的数码个数总和，称为该排列的反序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。**

例如在 4 元排列 4321 中，1 前面有 3 个比它大的数，2 前面有 2 个比它大的数，3 前面有 1 个比它大的数，4 前面没有数，认为它前面没有比它大的数，故

$$\tau(4321)=3+2+1+0=6$$

例 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots321$ 的反序数。

解 因 1 前面有 $n-1$ 个比它大的数，2 前面有 $n-2$ 个比它大的数，…，$n-1$ 前面有 1 个比它大的数，n 前面没有比它大的数。故

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

由反序数的定义可以得出：每一个排列都有一个唯一确定的反序数。当反序数为偶数时，称该排列为**偶排列**；当反序数为奇数时，称该排列为**奇排列**。

在 3 元排列中，由于

$$\tau(123)=0,\qquad \tau(231)=2,$$
$$\tau(312)=2$$

所以 123，231，312 是偶排列。而

$$\tau(132)=1,\qquad \tau(213)=1,$$
$$\tau(321)=3$$

所以 132，213，321 都是奇排列。在所有的 6 个 3 元排列中，恰好有 3 个奇排列，3 个偶排列，这种奇偶排列各半的现象并非偶然。下面证明这个事实。

在一个排列中，只交换两个数码的位置，而其余数码不动，得到一个新排列。对排列所施行的这样一个变换称为**对换**。如 213 可看做是由 123 对换 1，2 得到的排列。仔细观察可以发