集合初步

林建同

广东科技出版社

集 合 初 步

林 建 同

广 东 科 技 出 版 社

内 容 介 绍

集合是现代数学的一个基本概念，它对数学科学的发展起着重要的作用。目前，集合的思想、语言、符号和图解，已渗透在新编的中小学通用数学教材中。本书分五个部分，分别介绍集合的概念和运算，集合运算的规律——布尔代数，无穷集和有穷集的初步理论，集合与现代数学的关系及集合论发展中的一些问题。这对于中学教师以现代数学的观点去分析中学数学教材，在教学中加强集合思想的教育，培养学生的抽象思维能力，是很有帮助的。本书内容比较简明通俗，是一本关于集合的基础知识的初步读物，可供中学数学教师作为教学参考读物，也可供具有高中文化水平的青年、干部阅读。

集 合 初 步

林 建 同

*

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

广东新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 4.5印张 98,000字

1979年8月第1版 1979年8月第1次印刷

书号 13182·8 定价 0.37元

目　　录

导　言

数学是研究客观世界中的空间形式和数量关系的科学。由于研究的对象和方法不同，数学就有了各种分支。但是，任何一种数学理论的研究对象，总是具有某些特定的性质。例如，我们在中学里学习的初等代数，是在有理数或实数范围内研究它们的运算规律的；微积分方法的论域一般是实数域；而中学里的初等几何，则是研究平面或空间中的点、直线和平面等元素组成的图形的性质。我们把研究对象的总体称为"集合"。包含有限个对象的叫"有穷集"，包含无限个对象的叫"无穷集"。自然数组成的集合，就是一个无穷集。

可是，什么是"无穷"？它是一个数吗？可不可以说它是一个"很大"的数呢？

在古希腊的神话里，阿溪里是一个行走如飞的人。但是，这位走得比任何人都快的"飞毛腿"，却追不上在他前面慢慢爬行的乌龟。

你当然不相信会发生这样的事情。或许会说：不用说阿溪里了，就是一个三岁的小孩子也追得上乌龟啊！

那么，请你看看二千多年前希腊哲学家芝诺是怎样"论证"阿溪里永远追不上乌龟的。他的"论证"大致是：

"因为阿溪里必须先追到乌龟开始爬行的位置，而这时乌龟已经向前爬到另一个位置；等到阿溪里追到这个位置，乌龟当然又向前爬行到新的位置。这样一来，虽然阿溪里越来越接近乌龟，但是却永远不可能追上它。"

说得明确一些，这个"论证"的意思是：在追赶的过程

中，阿溪里和乌龟都必须经历同样多的位置和时刻。但是在每一个时刻，当阿溪里在某一个位置时，乌龟必定在他前面的另一个位置。如果阿溪里确实追上了乌龟，那么他不但必须走过乌龟走过的所有位置，并且因为他本来是落在乌龟的后面，还应该走过更多的位置。这就出现了矛盾，因此阿溪里是不可能追上乌龟的。

“这是诡辩！”你会这样说。

当然，这个“论证”是不对的，可是你要指明它的错误在哪里却是不容易的，因为这个“论证”的根据是一条很普通的原则：“整体大于部分。”从阿溪里开始追赶直到追上乌龟的整个过程中，阿溪里和乌龟应该经历同样多的时刻，因而应该经历同样多的位置；但是，由于在开始的时刻阿溪里是落在乌龟的后面，他走过的路程较长，而乌龟走的路程只是阿溪里要走的路程的一部分，这意味着阿溪里要经历更多的位置。也就是说，从不同的角度来说，阿溪里既经历一定数量的位置又只是经历这些位置的一部分，根据“整体大于部分”的原则，这不是确实不可能的吗？

在二千多年前，人类对现实世界空间形式的规律性已经有了许多了解。希腊学者欧几里得曾经把当时对空间图形的知识，用演绎的方法写成一本著名的教材，叫做《几何原本》。现在中学里学习的初等几何知识，基本上是这本书所讲的内容和方法。“整体大于部分”这个原则，在《几何原本》中就有明确的记述。可是，那时人们对数量关系存在着不少糊涂的认识，特别是对有关无穷的问题，更是众说纷纭，莫衷一是。事实上，从有穷到无穷，毕竟是人类认识上的一个飞跃。我们如果只停留在直觉的观念上，是没有办法把阿溪里追不上乌龟之类的问题说清楚的。你虽然直觉地感到阿溪

里一定可以甚至是轻而易举地追上乌龟，却不容易把道理讲清楚。

所以，几千年来，许多人为“无穷”伤透了脑筋。有的人把它置之不理，有的人则完全依赖直觉去解释。芝诺提出的“诡辩”，就是批评那种对待“无穷”的直觉观点的。

自从十七世纪牛顿、莱布尼兹创立微积分方法以后，经过一百多年的时间，这门数学分支逐渐成熟。微积分理论的基础，就是极限理论和实数理论。但是，作为微积分论域的实数域，则是一个具有无穷多个实数的集合。怎样来认识这种无穷集合呢？有穷集和无穷集有什么本质的区别呢？在无穷集合中，自然数集的元素个数是不是比偶数集的元素个数多呢？整条直线上的点是不是比空间中的点少呢？直线上无穷个点组成的集合的“长度”是多少呢？区间上定义的函数如果具有无穷多个间断点，这个函数可以求积吗？这些问题都必须澄清，否则微积分理论仍然是不完善的。

在十九世纪七十年代，为了解决如何理解“无穷”这个哲学上争论了几千年的问题，德国数学家康脱(Georg Cantor)在研究微积分中的三角级数收敛性、不连续函数的可积性等问题时，系统地研究了无穷集合本身的性质，而对组成集合的那些元素具有什么性质则不加考虑，他的研究工作奠定了作为新的数学分支的集合论的基础。

几乎与此同时，英国数学家布尔（George Boole）从另一个角度研究了集合。他系统地研究了集合的运算和运算的规律，发现集合的运算既具有普通的数的运算的特点，也具有它本身的独特的方面；并且这种运算规律既适用于集合与集合之间的关系，也可以用来反映简单的思维规律。随着现代科学技术的发展，特别是电子计算机的广泛应用，布尔提

出的数学方法日益受到重视。

随着科学技术的发展，人们对客观世界的认识正在逐步深入，正在趋向定量化、精密化。数学是科学技术的基本而重要的工具。实现四个现代化，特别是科学技术的现代化是离不开数学的。这里谈到的数学，不单是（甚至主要不是）十九世纪以前的数学，而且包括近一百多年来蓬勃发展起来的新的数学方法和思想，即现代数学。

现代数学一个基本的和重要的概念就是“集合”。许多应用广泛的数学分支，如微积分、概率论、抽象代数、拓扑学等都是先取定一个集合S，并且根据实际需要选定S的元素或子集应具备的某些性质，从而建立理论的体系。所以要正确理解和掌握现代数学的方法，必须很好地掌握集合的思想和方法。

近年来，集合的思想、语言、符号和图解，已经在中小学数学课程中广泛使用。本书介绍一些集合的基础知识，会有助于中学教师加深对数学课程的理解。为了使本书也能够适合高中学生、知识青年阅读，编写的内容比较简略通俗，因而有些内容难免不够精练和严格。但是，作为一本引导读者对现代数学发生兴趣的入门书，这样做也许有可取之处。

本书内容大致可分为五个部分。

§1—§4是第一部分，介绍集合和集合运算的概念，为了简化叙述，在§2中介绍了几个逻辑符号。虽然不用这些符号我们也能说明问题，但是因为这些符号已成为现代数学常用的交流语言，学会使用它们对于读者来说是有用的。

§5是第二部分，介绍集合运算的规律，也就是布尔提出的理论，一般称为布尔代数。它是集合理论中应用广泛的部分。

第一、二部分直接与中学的数学课程有关。

§6—§9 是第三部分，介绍由康脱莫基的无穷集的理论。有了这些知识，就能帮助我们加深对中学数学内容的理解。但是，它所用的思考问题的方法和人们的直觉观念有很大的差别，所以，有些道理未免抽象些。在阅读时，不必操之过急，要细心体会所运用的方法，这也是培养抽象思维的好机会。

§10 是第四部分，介绍有穷集的一些问题。有许多重要的数学问题是和有穷集有关的，例如排列组合的问题，还有大家早已闻名的"鸽子笼原理"，等等。有一门叫做"组合分析"的数学理论，就是专讲有穷集的数学问题的，本节内容可以算是它的前导。

在现代数学中，集合概念为什么那么重要呢？怎样从现代数学的观点去认识我们在中学里学习的数学知识呢？集合的理论进一步的发展是怎样呢？在阅读了上述四个部分以后，读者对这些问题一定会感到兴趣的。由 §11—§14 组成的第五部分，就是向读者简要说明这些问题的。

为了帮助读者掌握本书所讲的知识，本书附有练习供读者思考和演算。对于集合的有关概念、语言和符号，在开始接触时会感到陌生，不一定能理解得很透彻，也不一定运用得很熟练，但是，随着经验的积累，就能逐步加深理解并且运用自如了。

§1 什么是集合

1.集合的概念

在我们日常使用的语言中，常常涉及集合的概念。例如：

初二（1）班的全体同学都在礼堂排练。

那是我们农场饲养的一群羊。

写出太阳系的所有行星。

我们车间的全部机床都在这里了。

啊，那不是仅生存在亚洲的那种珍贵动物熊猫吗？

素数是一类只能被1和它自己除尽的自然数。

在这些例子中，标有着重号的“全体”、“一群”、“所有”、“全部”、“种”、“类”，都是用来表示具有某些性质的事物的总体。当然，对于上面的例子，我们是能够明确地判断哪样东西属于所谈及的总体，哪样东西是不属于这个总体的。

我们就把具有某种性质的事物的总体叫做“集合”，把构成“集合”的事物叫做集合的“元素”。

可是，什么是“总体”呢？这是不容易回答清楚的问题。因为无论是“集合”也好，“总体”也好，它们的含义大家是明白的，可是却很难用更简单的语言或概念来说明。在数学中有不少类似集合这样的概念。如几何中的点、直线、平面，它们也很难用更简单的概念来定义。这种概念，我们称为“基本概念”。对于基本概念，可以用例子来描述它，但不加以定义。当然，基本概念往往是最简单、最易理解、最易确定的对象。通常都是从客观世界的大量现象中抽象出来的。例如，

几何中的“点”，就是现实中占有一定空间的物理的点的抽象。同样，“集合”这个概念也是从客观世界中各种物体的总体抽象出来的，只不过它的含义是用各种例子来说明罢了。

在数学领域里，常常遇到各种各样的集合。例如，数的集合，点的集合，几何图形的集合，数学命题的集合，随机事件的集合，等等。在讨论数学问题时，我们首先要明确所涉及的对象是在什么范围，也就是说，必须明确论域是怎样的集合，否则就有可能产生错误。例如，在我们还未学习负数概念时，对于“$1-2=?$”是不会演算的，因为那时我们只懂得正有理数集合。又如，当遇到方程 $x^2+1=0$ 时，有人会笼统地说：“这个方程没有解。”这样说是不对的。如果学习过复数概念，就会知道这个方程有解，而且有两个解：$+i$ 和 $-i$。但是，我们可以说：“方程 $x^2+1=0$ 没有实数解”，这时，我们把实数集合作为讨论的范围。

现在让我们把中学里学习过的数集列举出来：

N——全体自然数的集合，即 $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$；

Z——全体整数的集合，即 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots$；

Q——全体有理数的集合，即形如 $\frac{p}{q}$ 的数的总体，这里的 p、q 是整数，并且 $q \neq 0$；

R——全体实数的集合；

C——全体复数的集合。

上列符号（N，Z，Q，R，C）是习惯使用的数集符号，本书下面将直接使用，不再说明。

2. 集合和它的元素

当我们讨论一个数学问题的时候，首先应该明确讨论的

对象所涉及的范围，于是在讨论的过程中，常常要考虑讨论对象是否属于论域之内的问题。例如：求方程 $(2x-1)(x-3)=0$ 的整数解。由于它的论域是整数集，因此当我们求得方程的两个根 3 和$\frac{1}{2}$时，就可以认为$x=3$就是所求的解。至于$\frac{1}{2}$，由于它不属于整数集合，所以不是所要求的解。

因此，在讨论数学问题过程中，常常要说明某个元素属于某个集合，另一个元素不属于某个集合，并且用符号来表示。通常用大写拉丁字母来表示集合，用小写拉丁字母表示集合的元素。

例如，当 e 是集合M的元素时，表示成

$$e \in M$$

念作"e 属于M"。如果 e 不是集合 M 的元素，则表示成

$$e \overline{\in} M$$

念作"e不属于M"。

所以

$$2 \in \mathbf{N};\ -3 \in \mathbf{Z};\ \frac{7}{11} \in \mathbf{Q};\ \sqrt{2} \in \mathbf{R};\ 2i \in \mathbf{C}.$$

但是

$$-3 \overline{\in} \mathbf{N};\ \frac{7}{11} \overline{\in} \mathbf{Z};\ \sqrt{2} \overline{\in} \mathbf{Q};\ 2i \overline{\in} \mathbf{R}.$$

自然数集N不包含0：$0 \overline{\in} \mathbf{N}$。但是有时为了方便起见，也会把0当作是自然数。把0加进集N后所得的集合，叫"扩大的自然数集"。

还有一种数叫"四元数"，例如 $1+2i+5j-3k$ 就是一个四元数。四元数集不同于我们常见的数集，它有本身特定的运算规律。因此

$$1+2i+5j-3k\in\mathbf{C}.$$

3. 怎样表示集合

虽然用大写拉丁字母来表示集合，但是除了几个惯用的字母外，我们还不能从集合的记号知道它的元素具备什么性质，这就象我们看到一个素不相识的人的名字时，不可能想象这个人的身材相貌一样。

因此，为了说明集合的元素具备什么性质，还需要用别的表示方法。

一种办法是直接把集合中的元素列举出来，并且用花括号把这些元素括在一起。

例如：

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}.$$

$$B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ x,\ y,\ z\}.$$

这种表示方法尤其适用于只包含有穷个元素的集合，但也可以用来表示有明显规律的无穷集合。

例如：

$$\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}.$$

$$\mathbf{Z}=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n,\ \cdots\}.$$

$O=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots\}$，这里的 n 是指自然数。

第二种办法是说明集合中的元素应该具有什么性质，用符号

$$\{*\mid P\}$$

来表示，意思是："所有具有性质P的元素 * 的集合"。

例如：

$$M=\{x\mid x^2-7x+12=0\quad 并且 x\in\mathbf{R}\}$$

表示所有满足方程 $x^2-7x+12=0$ 的实数 x 的集合，也就是方程 $x^2-7x+12=0$ 的实数解集。显然，这个集合就是 $\{3,\ 4\}$。

因为 x 是从集合R中选出来的，所以有时也写成：

$$M=\{x\in \mathbf{R}|x^2-7x+12=0\}.$$

又如，$\mathbf{N}=\{x\in \mathbf{Z}|-2<x\}$ 表示大于 -2 的所有整数的集合，即$\mathbf{N}=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$。

读者不妨自己说明一下下列两个集合的元素有什么性质：

$$A=\{x|x=2y\quad 并且y\in \mathbf{Z}\};$$

$$B=\{x|x=2n+1\quad 并且n\in \mathbf{N}\}.$$

几何图形也可以用集合的符号来表示。例如：

$L=\{(x,\ y)|2x+3y=1$ 并且x、$y\in \mathbf{R}\}$ 表示满足一次方程 $2x+3y=1$ 的实数序偶 $(x,\ y)$ 集合。我们知道，(x,y) 表示坐标平面上的点，而方程 $2x+3y=1$ 表示平面上的一条直线（图1—1）。因此，集合 L 就是由直线$2x+3y=1$ 上的全部点$P(x,\ y)$ 组成的点集，也可以说，集合L表示了这条直线。

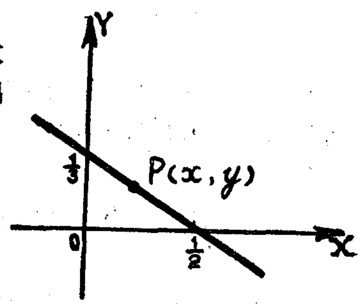

图1—1

$C=\{(x,\ y)|(x-3)^2+y^2<4$ 并且x、$y\in \mathbf{R}\}$表示圆 $(x-3)^2+y^2=4$ 内部的点$P(x,\ y)$的集合（图1—2）。

$E=\{(x,\ y)|4x^2+9y^2<36$ 并且x、$y\in \mathbf{R}\}$ 表示椭圆 $4x^2+9y^2=36$

内部的点$P(x, y)$的集合（图1—3）。

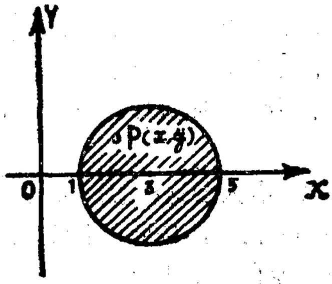

图1—2

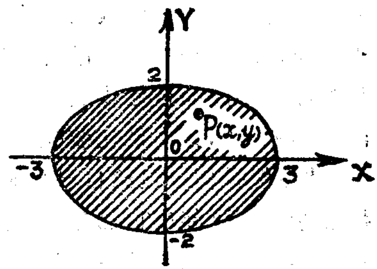

图1—3

4.要注意的问题

从上面举出的例子可以看出，当我们谈及某个集合的时候，对于一个对象来说，它或者属于这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一，不能有半点含糊。只有这样，才算是给定了一个集合。

如果说有一个"充分大于1的实数集合"，那么这个集合究竟是怎样的呢？1.1算不算是它的元素呢？5算不算是它的元素呢？我们实在难以回答。由此可见，所谓"充分大于1"这个要求实在太含糊了，我们根本没有办法确定1.1、2、5、10、100等实数是否属于这个集合。因此，在康脱创始的古典集合论也就是现在通称的集合论中，这样来规定集合的元素是不能算构成一个集合的。这是当我们谈及集合时必须注意的一个重要问题。

那么，除了要求明确规定元素的性质外，对集合这个基本概念还有什么别的限制吗？

让我们看看下述的问题：

某校初二（1）班李明是一位擅长戏剧化装的同学。在一次学校举办的文艺晚会上，初二(1)班全体同学都参加演出。为了取得良好的演出效果，节省准备的时间，班主任杨老师事先规定：凡是能够自己化装的同学都要自己化装，而李明只给那些不能为自己化装的同学化装。按照这样的规定，请问：李明自己该由谁化装呢？

“当然是他自己给自己化装啦！”有人会这样想。可是，既然李明属于能够自己化装的那部分同学，按照杨老师的规定，李明是不该给这些同学（包括他自己）化装的。

“那末，李明不该给自己化装吧？”这样想也不行。因为按杨老师的规定，他应该为那些不能为自己化装的同学化装，包括他自己在内。

所以，如果用M来表示初二（1）班由李明化装的全部同学组成的集合，那么李明既不能属于M，又不能不属于M。由此可见，这样规定集合M也是有毛病的（我们将在§4和§13中指出这个问题的症结所在）。

因此，虽然集合是一个不加定义的基本概念，但是仍然需要正确地理解和表达才能准确地使用它。