交通系统中等专业学校试用教材

# 应用数学

下册

金岩　刘勇　编写　　李秉周　主审

人民交通出版社

交通系统中等专业学校试用教材

# Yingyong Shuxue

# 应用数学

## 下册

金岩 刘勇 编写
李秉周 主审

人民交通出版社

交通系统中等专业学校试用教材

**应 用 数 学**

下 册

金岩 刘勇 编写

李 秉 周 主审

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：14.5 字数：355千

1 9 8 6 年12月 第 1 版

1 9 8 6 年12月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：0001—6,000册 定价：2.15元

## 内 容 提 要

本书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共九章，介绍概率论与数理统计的基本知识。下册包括第三篇和第四篇共十章，其中第三篇介绍线性代数；第四篇介绍运输管理最优化的数学理论与方法——线性规划的几种不同解法及图论的基本概念，排队论，对策论。排队论和对策论部分仅供学有余力者选用，书中用“* *”号标出；下册第四、五章，可根据各校的具体情况任选一章，余下者则为带“*”号章节。

本书可供中等专业学校作为基础数学教材，也可供专科学校及大专院校干部专修科选用。

# 编 者 的 话

本书是受交通部中专系统公路运输管理专业教学联络网（管理专业委员会的前身）委托，根据1982年交通部教育局审订的交通中专《应用数学教学大纲（试行草案）》编写的。作为运输管理专业的技术基础课，本着基础课为培养专业技术人员服务的精神，从公路汽车运输管理人员所应具备的数学基础知识的实际需要出发，本教材主要讲授概率论与数理统计和运输管理最优化的数学理论与方法的基本知识。

全书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共九章，介绍概率论与数理统计的基本概念和主要计算技巧；同时，通过一定量的例、习题，说明概率论与数理统计在运输管理中的应用。下册包括第三篇和第四篇共十章，其中第三篇是线性代数。第四篇线性规划部分着重介绍当前运筹学在运输管理中使用最成功的方法——线性规划的几种不同解法及图论的基本概念；排队论和对策论属于选学部分（用“* *”号标出），分别介绍排队论和对策论的有关基本知识。

本教材可供招收初中毕业生三～四年制及招收高中毕业生二年制的中等专业学校的管理专业选用；也可供目前从事公路交通管理工作而数学基础知识较好的同志自学之用；如果把“*”号和“* *”号的章节内容与其它章节内容适当调整，尚可做高等专科学校管理专业的试用教材。以“搞调度、管理工作”为培养目标的专业，对上册中带“*”号的章节可作为选修内容；而以“搞计统、财会工作”为培养目标的专业，对下册中带“*”号的章节可作为选修内容。其中带“* *”号的章节仅供学有余力的学生选用。全教材总授课时数为156学时，其中上册授课时数为72学时（“*”号内容另加10学时），下册授课时数为74学时（“*”号内容另加10学时）。

本教材由交通部呼和浩特交通学校金岩同志编写，参加编写工作的还有江西省交通学校刘勇同志。其中概率论数理统计和线性代数、线性规划由金岩编写，排队论和对策论由刘勇编写。

吉林工学院的李玉亚副教授和西安公路学院运管系数学教研室李秉周主任分别任本书上、下册的主审。主审的二位同志认真负责，对原稿提出了许多宝贵意见，并进行了修改，对此，表示深切的谢意。

在编写、修改期间，中国科学院系统所的董泽清副研究员，吉林省交通学校的刘允中副研究员和呼和浩特交通学校运管专业张学禹主任对于本教材的内容提了宝贵的建设性和指导性意见，并对编写工作给予了大力的帮助。广州市交通学校的赖木荣、吴家蘅老师，安徽省交通学校的周春泉老师，江西省交通学校的丁青老师，陕西省交通学校的廖美君老师，呼和浩特交通学校的沈钟毓、邹豪思、乌云老师以及吉林省、贵州省等20余所交通学校的有关老师，对于原稿进行了认真的审阅、试用，衷恳地提出了许多宝贵意见和建议，对于修改工作起了极大的推动作用。对于以上诸位老师的诚挚帮助，谨此一并深致谢意。

本教材由于编者水平所限，错误或不妥之处一定不少，诚望读者批评指正。

编　　者

# 目　录

## 第三篇　线 性 代 数



## 第四篇　运输管理最优化的数学理论与方法

### 线 性 规 划

**排　队　论



**对　策　论

# 第三篇　线性代数

## 第一章　线性代数

线性代数是重要的数学分支，它主要研究线性函数。在研究运输管理最优化的问题中，线性代数更有其独特的重要位置，是重要的数学基础知识。而矩阵又是线性代数的一个重要概念，它是研究线性关系的一个有力的工具。因此，在这一篇里主要介绍线性方程组和矩阵的一些基础知识。

### §1.1　行　列　式

行列式是从研究线性方程组的解法中产生的，是数学中的一个重要工具。在这一节中，我们将从二、三阶行列式出发，引进一般的行列式的概念，介绍行列式的性质及其计算方法，最后讲述利用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

#### 一、行列式的概念

在初等数学部分，我们已知道二阶和三阶行列式，即如下的式子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

我们将依照这种由低级行列式形成高一阶行列式的方法来定义四阶及四阶以上的行列式。例如，四阶行列式可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

一般地，如果我们规定一阶行列式是 $|a_{11}| = a_{11}$，则假如 $(n-1)$ 阶行列式已经定义，那么 $n$ 阶行列式就可以用 $(n-1)$ 阶行列式来定义（这里 $n\geqslant 2$）。

**定义 n 阶行列式为：**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+1}a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} \qquad (1\text{-}1)$$

上式左边的 $n$ 阶行列式由 $n^2$ 个数 $a_{ij}$（$i$，$j=1$，2，…，$n$）构成，数 $a_{ij}$ 为行列式第 $i$ 行第 $j$ 列的元素。其中 $A_{i1}$ 为 $a_{i1}$ 的代数余子式，即：

$$A_{i1}=(-1)^{i+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-12} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}M_{i1}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$M_{i1}$ 为 $a_{i1}$ 的余子式。一般 $a_{ij}$ 的余子式定义为：把 $n$ 阶行列式中 $a_{ij}$ 所在的行与列的元素划掉，剩下的元素（不改变其相对位置）所构成的（$n-1$）阶行列式，记为 $M_{ij}$。$M_{ij}$ 乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，叫做元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，记为 $A_{ij}$。

## 二、行列式的性质及其计算

根据 $n$ 阶行列式的定义，其值是可以计算的，但当 $n$ 较大时，这种计算是很麻烦的，因此，我们来讨论行列式的性质，并利用这些性质来简化计算。$n$ 阶行列式的性质与三阶行列式的性质一样，我们一一叙述，只对其中一部分给予证明。

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次换成列，所得的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}2)$$

甲

6

一

叫做行列式$D$的转置行列式

性质1 行列式转置后其值不变，即$D'=D$。

关于性质1的证明从略，读者可随便举一行列式验证之。由性质1可知行列式的“行”所具有的性质，对“列”也一定成立，反之亦然。

性质2 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号。（证明略）

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10$$

交换$D$的一、二两列所得的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-10$$

推论 若行列式$D$有两行（列）的元素完全相同，则$D=0$。

性质3 行列式$D$等于它任意一行（列）的元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij}(i=1,2,\cdots,n) \tag{1-3}$$

或

$$D=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij}(j=1,2,\cdots,n) \tag{1-4}$$

证明：这里我们只证明第（1-4）式。

把$D$中第$j$列的元素依次和它前面的列互换，最后把它换到第一列的位置得到的行列式为：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然，$D_1$中第一列元素$a_{ij}$（$i=1$，2，…，$n$）的余子式就是原来行列式$D$的第$j$列元素的余子式$M_{ij}$（$i=1$，2，…，$n$），根据行列式的定义有：

$$\begin{aligned} D_1=&a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij} \\ &+\cdots+(-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj} \end{aligned}$$

再由性质2有（因互换列$j-1$次）：

$$D=(-1)^{j-1}D_1$$

于是得

$$\begin{aligned} D=&(-1)^{j-1}[a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j}+\cdots \\ &+(-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj}] \\ =&(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots \\ &+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj} \\ =&a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

**性质 4**　行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0 \qquad (i \neq j) \tag{1-5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \qquad (i \neq j) \tag{1-6}$$

证明：我们只证明第（1-5）式。

由性质 3 有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk}$$

如果把 $D$ 中的第 $j$ 行元素换成第 $i$ 行的元素，则 $D$ 成 $D_1$（其它各行元素不变）。

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow 第\ j\ 行 \qquad \underline{\underline{性质 3}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

而由于 $D_1$ 有两行元素（第 $i$ 和第 $j$ 行）完全相同，所以由性质 2 的推论有

$$D_1=0$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0 \qquad (i \neq j)$$

**性质 5**　如果行列式某一行（列）所有元素有公因子，则可将公因子提到行列式记号外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上面的性质可以由性质 3 直接推出，读者可以自行练习。

**推论 1**　若行列式 $D$ 有一行（列）的元素全为零，则 $D=0$。

**推论 2**　若行列式 $D$ 有两行（列）的元素对应成比例，则 $D=0$。

性质6　如果行列式某一行（列）的元素都是两项的和，则可以把此行列式化为两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上述结论可由性质3直接推出。

性质7　如果行列式某一行（列）的元素加上另一行（列）对应元素的λ倍，那么行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+\lambda a_{t1} & a_{s2}+\lambda a_{t2} & \cdots & a_{sn}+\lambda a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这一结论可用性质6、5及性质2的推论推出，读者可自行证明。

我们经常利用以上性质来简化行列式的计算，下面举例说明。

【例1】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

**解**：先把 $D$ 按性质7进行变换，而后利用性质3……。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1列乘5+第四列上}]{\text{第1列}\times(-2)+\text{第2列上}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -7 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }3} - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 7 \\ -7 & -1 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第2列}\times(-3)+\text{第3列上}} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & -1 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }3} -(-1)^3 \times 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -7 & 18 \end{vmatrix} = -24$$

【例2】 对如下的三角形行列式求其值。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：因为当 $n=2$ 时有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}$$

当 $n=3$ 时有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

设当 $n=k$时有（$k$ 为任自然数）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{kk}$$

则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\ k+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\ k+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\ k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k+1\ k+1} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\ k+1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\ k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1\ k+1} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\ (a_{22}\ a_{33}\ \cdots\ a_{k+1\ k+1})$$

$$=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{k+1\ k+1}$$

综上，所以有：

$$D=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn}$$

## 三、克莱姆法则

在学习初等数学时，我们知道二、三阶行列式可以用来解含有二、三个未知量的线性方程组。在这一部分进一步讨论用 $n$ 阶行列式来解含有 $n$ 个未知量的线性方程组。

设 $n$ 个未知量 $n$ 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1+a_{12}\ x_2+\cdots+a_{1n}\ x_n=b_1 \\ a_{21}\ x_1+a_{22}\ x_2+\cdots+a_{2n}\ x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ x_1+a_{n2}\ x_2+\cdots+a_{nn}\ x_n=b_n \end{cases} \tag{1-7}$$

它的系数构成的行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

如果 $D\neq 0$，则方程组（1-7）有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

这里 $D_j$ 是用方程组的常数项 $b_1$，$b_2$，…，$b_n$ 依次去换 $D$ 中的第 $j$ 列元素所得的 $n$ 阶行列式。以上就是克莱姆法则的内容，下面给出这一法则的数学证明。

令 $j$ 是 1，2，…，$n$ 中的任一个，分别用代数余子式 $A_{1j}$，$A_{2j}$，…$A_{nj}$ 来方程组（1-7）的诸方程而后相加，即

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n\\ =\;&b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\end{aligned}$$

由行列式的性质 3 和性质 4 知，上式中 $x_j$ 的系数等于 $D$，而 $x_i$（$i\neq j$）的系数等于零，其右边恰好是用 $b_1$，$b_2$，…，$b_n$ 依次换 $D$ 中第 $j$ 列元素所得的行列式

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\uparrow$$

（$j$列）

这样我们就得到

$$D\cdot x_j=D_j$$

令 $j=1, 2, \cdots, n$，则得

$$D\cdot x_1=D_1,\quad D\cdot x_2=D_2,\quad \cdots,\quad D\cdot x_n=D_n \tag{1-9}$$

于是当 $D\neq 0$ 时，方程组（1-9）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D} \tag{1-10}$$

又由于（1-9）与（1-7）同解，所以（1-7）有唯一解（1-10）。

例如解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2 \qquad -6x_4=9 \\ \qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解：首先因为

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq0$$

故可用克莱姆法则。其次算出

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

从而得方程组的唯一解为:

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1$$

## §1.2 矩阵的概念及其运算

矩阵是线性代数主要内容之一，是现代数学各个分支不可缺少的工具。在这节中我们介绍矩阵的概念及其运算。

### 一、矩阵的概念

为明确起见，先看二个实例。

【例1】 在物资调运中，经常要考虑产地如何供应销地，使物资的总运费最低。比如某种物资有两个产地 $A_1$、$A_2$，有三个销地 $B_1$、$B_2$、$B_3$，可以用一个数字表1-1来表示该物资的调运方案。

表1-1

| 产地 / 销地 | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|
| $B_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $B_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |
| $B_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ |

表中数字 $a_{ij}$ 表示由产地 $A_j$ 运到销地 $B_i$ 的数量。上表在实际中经常简化成如下的按一定次序排列的数字表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

此表就表示了如上表那样的物资调运的规律。

**【例2】** 通常也常把一些数字关系式用上边这样的表确定，如线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

经常被表示成如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

上面的三个数表各自表示了一定的意义（至于其相乘的问题先不管它）；第一个是系数表，第二个是未知量表，第三是常数项表。

如上述的四个表“（　　）”是从实际中抽象出来表示一定意义的数表，称为矩阵，它有着一定的运算规则，下面我们对它进行研究。

**定义** 1　$m\times n$ 个数 $a_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$所排成的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-11}$$

就叫做 $m$ 行 $n$ 列的矩阵，$a_{ij}$ 叫做矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素；矩阵通常用 $A$，$B$ 或 $A_{mn}$，$B_{mn}$ 等表示，也可记成 $(a_{ij})$ 或 $(a_{ij})_{mn}$等。

特殊情形，当 $m=n$ 时，则叫做 **n 阶矩阵或方阵，数n叫做矩阵的阶。**

应注意方阵与行列式是两个不同的概念。$n$ 阶方阵是 $n^2$ 个数按一定方式排成的数表，而 $n$ 阶行列式则是这些数按一定的运算规则所确定的一个值。通常把由方阵 $A$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变）记为$|A|=|(a_{ij})|(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$。

如果 $A=(a_{ij})$与 $B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots n)$

那么就称**矩阵 A 与矩阵 B 相等**，记为：

$A=B$

只有一列的矩阵叫做**列矩阵**，即$m\times 1$矩阵，$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$；而只有一行的矩阵则称为**行矩阵**，即$1\times n$矩阵，$A=(a_{11}\ \ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$。