

21  
世纪

高职高专新概念教材

翟秀娜 主 编  
曾大友 张文治 副主编

# 高等数学学习指导与习题解答

21 Shi Ji Gao Zhi Gao Zhuan Xin Gai Nian Jiao Cai

-44  
8



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

21 世纪高职高专新概念教材

# 高等数学学习指导与习题解答

翟秀娜 主 编

曾大友 张文治 副主编

中国水利水电出版社

## 内 容 提 要

本书是与 21 世纪高职高专新概念教材《高等数学》(何春江主编)配套的学习辅导书。

本书按教材章节对应编写。全书共分 12 章,各章均由内容提要、典型例题分析、习题选解、同步练习及答案四部分构成。本书对主教材中的基本概念、基本理论进行了简要的归纳和提炼。根据高职高专工科类专业的特点,本书在选材和编排上着眼于基础训练的强化,突出解题的思路和方法指导,并对解题的步骤和思路进行适当的归纳以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等技术职业学校、高等专科学校、成人高校工科各专业学习高等数学课程的辅导用书,也可供从事本课程教学的教师参考。

由于编写的独立性风格,本书也可作为使用其他高等数学教材的高职高专学生的复习参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解答 / 翟秀娜主编. —北京:中国水利水电出版社, 2005

(21 世纪高职高专新概念教材)

ISBN 7-5084-3156-1

I. 高… II. 翟… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材参考资料  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 090644 号

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 书 名   | 高等数学学习指导与习题解答                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 作 者   | 翟秀娜 主编 曾大友 张文治 副主编                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 出版 发行 | 中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044)<br>网址: <a href="http://www.waterpub.com.cn">www.waterpub.com.cn</a><br>E-mail: <a href="mailto:mchannel@263.net">mchannel@263.net</a> (万水)<br><a href="mailto:sales@waterpub.com.cn">sales@waterpub.com.cn</a><br>电话: (010) 63202266 (总机) 68331835 (营销中心) 82562819 (万水) |
| 经 售   | 全国各地新华书店和相关出版物销售网点                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 排 版   | 北京万水电子信息有限公司                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 印 刷   | 北京蓝空印刷厂                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 规 格   | 787mm×1092mm 16 开本 12.5 印张 295 千字                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 版 次   | 2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 印 数   | 0001—5000 册                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 定 价   | 18.00 元                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

## 21 世纪高职高专新概念教材 编委会名单

主任委员 刘 晓 柳菊兴

副主任委员 胡国铭 张栾勤 王前新 黄元山 柴 野

张建钢 陈志强 宋 红 汤鑫华 王国仪

委 员 (按姓氏笔画排序)

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 马洪娟 | 马新荣 | 尹朝庆 | 方 宁 | 方 鹏 |
| 毛芳烈 | 王 祥 | 王乃钊 | 王希辰 | 王国思 |
| 王明晶 | 王泽生 | 王绍卜 | 王春红 | 王路群 |
| 东小峰 | 台 方 | 叶永华 | 宁书林 | 田 原 |
| 田绍槐 | 申 会 | 刘 猛 | 刘尔宁 | 刘慎熊 |
| 孙明魁 | 安志远 | 许学东 | 闫 菲 | 何 超 |
| 宋锦河 | 张 晔 | 张 慧 | 张弘强 | 张怀中 |
| 张晓辉 | 张浩军 | 张海春 | 张曙光 | 李 琦 |
| 李存斌 | 李作纬 | 李珍香 | 李家瑞 | 李晓桓 |
| 杨永生 | 杨庆德 | 杨名权 | 杨均青 | 汪振国 |
| 肖晓丽 | 闵华清 | 陈 川 | 陈 炜 | 陈语林 |
| 陈道义 | 单永磊 | 周杨娣 | 周学毛 | 武铁敦 |
| 郑有想 | 侯怀昌 | 胡大鹏 | 胡国良 | 费名瑜 |
| 赵 敬 | 赵作斌 | 赵秀珍 | 赵海廷 | 唐伟奇 |
| 夏春华 | 徐 红 | 徐凯声 | 徐雅娜 | 殷均平 |
| 袁晓州 | 袁晓红 | 钱同惠 | 钱新恩 | 高寅生 |
| 曹季俊 | 梁建武 | 蒋金丹 | 蒋厚亮 | 覃晓康 |
| 谢兆鸿 | 韩春光 | 詹慧尊 | 雷运发 | 廖哲智 |
| 廖家平 | 管学理 | 蔡立军 | 黎能武 | 魏 雄 |

项目总策划 雨 轩

编委会办公室 主 任 周金辉

副主任 孙春亮 杨庆川

## 参编学校名单

(按第一个字笔划排序)

|               |              |
|---------------|--------------|
| 三门峡职业技术学院     | 华东交通大学       |
| 山东大学          | 华北电力大学工商管理学院 |
| 山东交通学院        | 华北航天工业学院     |
| 山东建工学院        | 江汉大学         |
| 山东省电子工业学校     | 江西渝州电子工业学院   |
| 山东农业大学        | 江西赣西学院       |
| 山东省农业管理干部学院   | 西安外事学院       |
| 山东省教育学院       | 西安欧亚学院       |
| 山东商业职业技术学院    | 西安铁路运输职工大学   |
| 山西阳泉煤炭专科学校    | 西安联合大学       |
| 山西运城学院        | 孝感职业技术学院     |
| 山西经济管理干部学院    | 杨陵职业技术学院     |
| 广州市职工大学       | 昆明冶金高等专科学校   |
| 广州铁路职业技术学院    | 武汉大学动力与机械学院  |
| 中华女子学院山东分院    | 武汉大学信息工程学院   |
| 中国人民解放军第二炮兵学院 | 武汉工业学院       |
| 中国矿业大学        | 武汉工程职业技术学院   |
| 中南大学          | 武汉广播电视大学     |
| 天津市一轻局职工大学    | 武汉化工学院       |
| 天津职业技术师范学院    | 武汉电力职业技术学院   |
| 长沙大学          | 武汉交通管理干部学院   |
| 长沙民政职业技术学院    | 武汉科技大学工贸学院   |
| 长沙交通学院        | 武汉商业服务学院     |
| 长沙航空职业技术学院    | 武汉理工大学       |
| 长春汽车工业高等专科学校  | 武汉铁路职业技术学院   |
| 北京对外经济贸易大学    | 河南济源职业技术学院   |
| 北京科技大学职业技术学院  | 郑州工业高等专科学校   |
| 北京科技大学成人教育学院  | 陕西师范大学       |
| 石油化工管理干部学院    | 南昌水利水电高等专科学校 |
| 石家庄师范专科学校     | 哈尔滨金融专科学校    |
| 辽宁交通高等专科学校    | 济南大学         |
| 华中电业联合职工大学    | 济南交通高等专科学校   |
| 华中科技大学        | 济南铁道职业技术学院   |

荆门职业技术学院  
贵州无线电工业学校  
贵州电子信息职业技术学院  
恩施职业技术学院  
黄冈职业技术学院  
黄石计算机学院  
湖北工学院  
湖北丹江口职工大学  
湖北交通职业技术学院  
湖北汽车工业学院  
湖北经济管理大学  
湖北药检高等专科学校

湖北经济学院  
湖北教育学院  
湖北鄂州大学  
湖北水利水电职业技术学院  
湖南大学  
湖南工业职业技术学院  
湖南计算机高等专科学校  
湖南省轻工业高等专科学校  
湖南涉外经济学院  
湖南郴州师范专科学校  
湖南商学院  
湖南税务高等专科学校

## 序

根据 1999 年 8 月教育部高教司制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)的精神,由中国水利水电出版社北京万水电子有限公司精心策划,聘请我国长期从事高职高专教学、有丰富教学经验的教师执笔,在充分汲取了高职高专和成人高等学校在探索培养技术应用性人才方面取得的成功经验和教学成果的基础上,撰写了这套《21 世纪高职高专新概念教材》。

为了编写本套教材,出版社进行了广泛的调研,走访了全国百余所具有代表性的高等专科学校、高等职业技术学院、成人教育高等院校以及本科院校举办的二级职业技术学院,在广泛了解情况、探讨课程设置、研究课程体系的基础上,经过学校申报、征求意见、专家评选等方式,确定了本套书的主编,并成立了编委会。每本书的编委会聘请了多所学校主要学术带头人或主要从事该课程教学的骨干,教学大纲的确定以及教材风格的定位均经过编委会多次认真讨论。

本套《21 世纪高职高专新概念教材》有如下特点:

(1) 面向 21 世纪人才培养的需求,结合高职高专学生的培养特点,具有鲜明的高职高专特色。本套教材的作者都是长期在第一线从事高职高专教育的骨干教师,对学生的基本情况、特点和认识规律等有深入的了解,在教学实践中积累了丰富的经验。因此可以说,每一本书都是教师们长期教学经验的总结。

(2) 以《基本要求》和《培养规格》为编写依据,内容全面,结构合理,文字简练,实用性强。在编写过程中,作者严格依据教育部提出的高职高专教育“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,力求从实际应用的需要(实例)出发,尽量减少枯燥、实用性不强的理论概念,加强了应用性和实际操作性强的内容。

(3) 采用“问题(任务)驱动”的编写方式,引入案例教学和启发式教学方法,便于激发学习兴趣。本套书的编写思路与传统教材的编写思路不同:先提出问题,然后介绍解决问题的方法,最后归纳总结出一般规律或概念。我们把这个新的编写原则比喻成“一棵大树、问题驱动”的原则。即:一方面遵守先见(构建)“树”(每本书就是一棵大树),再见(构建)“枝”(书的每一章就是大树的一个分枝),最后见(构建)“叶”(每章中的若干小节及知识点)的编写原则;另一方面采用问题驱动方式,每一章都尽量用实际中的典型实例开头(提出问题、明确目标),然后逐渐展开(分析解决问题),在讲述实例的过程中将本章的知识点融入。这种精选实例,并将知识点融于实例中的编写方式,可读性、可操作性强,非常适合高职高专的学生阅读和使用。本书读者通过学习构建本书中的“树”,由“树”找“枝”,顺“枝”摸“叶”,最后达到构建自己所需要的“树”的目的。

(4) 部分教材配有实验指导和实训教程,便于学生练习提高。

(5) 部分教材配有动感电子教案。为顺应教育部提出的教材多元化、多媒体化发展的要求,大部分教材都配有电子教案,以满足广大教师进行多媒体教学的需要。电子教案用 PowerPoint 制作,教师可根据授课情况任意修改。相关教案的具体情况请到中国水利水电出版社网站[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)下载。

(6) 提供相关教材中所有程序的源代码,方便教师直接切换到系统环境中教学,提高教学效果。

总之,本套教材凝聚了数百名高职高专一线教师多年的教学经验和智慧,内容新颖,结构完整,概念清晰,深入浅出,通俗易懂,可读性、可操作性和实用性强。

本套教材适用于高等职业学校、高等专科学校、成人及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校。

新的世纪吹响了我国高职高专教育蓬勃发展的号角,新世纪对高职教育提出了新的要求,高职教育占据了全面素质教育中所不可缺少的地位,在我国高等教育事业中占有极其重要的位置,在我国社会主义现代化建设事业中发挥着日趋显著的作用,是培养新世纪人才所不可缺少的力量。相信本套《21 世纪高职高专新概念教材》的出版能为高职高专的教材建设和教学改革略尽绵薄之力,因为我们提供的不仅是一套教材,更是自始至终的教育支持,无论是学校、机构培训还是个人自学,都会从中得到极大的收获。

当然,本套教材肯定会有不足之处,恳请专家和读者批评指正。

21 世纪高职高专新概念教材编委会

2001 年 3 月

# 前 言

高等数学是工科类各专业必修的基础课,它在科学研究、工程技术、国民经济等各个领域都有广泛的应用。

高等数学作为工科类专业的重要基础课,由于概念抽象、推理独特、方法灵活,初学者往往面临着课程难学,规律难寻,习题难做的困境,对于高职高专的学生尤其如此。本书作为高职高专新概念教材《高等数学》(何春江主编)的配套学习辅导用书,正是针对普遍存在的“三难”而编写的。

全书各章均由内容提要、典型例题分析、习题选解、同步练习及答案四部分构成。

内容提要:对教材中的基本概念、基本理论进行简要归纳,揭示重点,剖析难点。

典型例题分析:突出解题分析和方法指导,并对解题的步骤和思路进行适当的归纳。

习题选解:对主教材中 90%的习题给出了详解,供读者解题时参考。对主教材各章的复习题和自测题都一一进行了详尽解答,在某些题解中,编者还通过加注的方式说明解证这类习题的一般方法及易犯的错误,习题选解中的习题和题号与主教材的习题完全一致,读者可以在独立练习的基础上方便地对照参考。

同步练习及答案:为读者精选了难易适中,与各章所学基本概念、基本运算、基本内容密切相关的题目,并给出了参考答案。

本书由翟秀娜主编,曾大友、张文治任副主编,各章编写分工如下:第1章、第2章、第3章、第4章由翟秀娜编写,第5章、第6章由曾大友编写,第7章由王明妍编写,第8章由毕晓华编写,第9章、第10章由张文治编写,第11章、第12章由岳雅璠编写。参加本书编写的还有何春江、牛莉、张翠莲等。

本书在编写过程中,编者参考了很多相关的书籍和资料,采用了一些相关内容,在此谨表谢意!

由于编者水平有限,书中难免有不当或疏漏之处,恳请读者批评赐教。

编 者

2005年6月

# 目 录

序

前言

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>第 1 章 函数</b> .....    | 1  |
| 1.1 内容提要 .....           | 1  |
| 1.1.1 函数的概念 .....        | 1  |
| 1.1.2 函数的几种特性 .....      | 1  |
| 1.1.3 基本初等函数 .....       | 2  |
| 1.1.4 复合函数 .....         | 2  |
| 1.1.5 初等函数 .....         | 2  |
| 1.1.6 反函数 .....          | 2  |
| 1.1.7 隐函数 .....          | 2  |
| 1.2 典型例题分析 .....         | 2  |
| 1.3 习题选解 .....           | 4  |
| 1.4 同步练习及答案 .....        | 7  |
| <b>第 2 章 极限与连续</b> ..... | 9  |
| 2.1 内容提要 .....           | 9  |
| 2.1.1 数列的极限 .....        | 9  |
| 2.1.2 函数的极限 .....        | 9  |
| 2.1.3 极限的性质 .....        | 10 |
| 2.1.4 无穷小量与无穷大量 .....    | 10 |
| 2.1.5 极限的运算法则 .....      | 11 |
| 2.1.6 两个重要极限 .....       | 11 |
| 2.1.7 无穷小的比较 .....       | 11 |
| 2.1.8 函数的连续性概念 .....     | 12 |
| 2.1.9 初等函数的连续性 .....     | 12 |
| 2.1.10 闭区间上连续函数的性质 ..... | 13 |
| 2.2 典型例题分析 .....         | 13 |
| 2.3 习题选解 .....           | 16 |
| 2.4 同步练习及答案 .....        | 21 |
| <b>第 3 章 导数与微分</b> ..... | 23 |
| 3.1 内容提要 .....           | 23 |
| 3.1.1 导数的概念与几何意义 .....   | 23 |

|            |                         |           |
|------------|-------------------------|-----------|
| 3.1.2      | 函数的和、差、积、商的求导法则.....    | 24        |
| 3.1.3      | 复合函数的导数.....            | 24        |
| 3.1.4      | 反函数的求导法则.....           | 24        |
| 3.1.5      | 初等函数的导数.....            | 25        |
| 3.1.6      | 隐函数和由参数方程所确定的函数的导数..... | 25        |
| 3.1.7      | 高阶导数.....               | 26        |
| 3.1.8      | 微分的概念.....              | 26        |
| 3.1.9      | 微分的几何意义.....            | 26        |
| 3.1.10     | 微分的运算法则.....            | 27        |
| 3.1.11     | 微分在近似计算中的应用.....        | 27        |
| 3.2        | 典型例题分析 .....            | 28        |
| 3.3        | 习题选解 .....              | 30        |
| 3.4        | 同步练习及答案 .....           | 35        |
| <b>第4章</b> | <b>导数的应用 .....</b>      | <b>37</b> |
| 4.1        | 内容提要 .....              | 37        |
| 4.1.1      | 罗尔中值定理.....             | 37        |
| 4.1.2      | 拉格朗日中值定理.....           | 37        |
| 4.1.3      | 洛必达法则.....              | 37        |
| 4.1.4      | 函数的单调性.....             | 38        |
| 4.1.5      | 函数的极值.....              | 38        |
| 4.1.6      | 函数的最大值和最小值.....         | 39        |
| 4.1.7      | 曲线的凹凸性.....             | 40        |
| 4.1.8      | 函数图形的描绘.....            | 40        |
| 4.1.9      | 曲率的概念.....              | 40        |
| 4.1.10     | 弧微分.....                | 40        |
| 4.1.11     | 曲率的计算公式.....            | 41        |
| 4.2        | 典型例题分析 .....            | 41        |
| 4.3        | 习题选解 .....              | 43        |
| 4.4        | 同步练习及答案 .....           | 51        |
| <b>第5章</b> | <b>不定积分 .....</b>       | <b>53</b> |
| 5.1        | 内容提要 .....              | 53        |
| 5.1.1      | 不定积分的概念.....            | 53        |
| 5.1.2      | 不定积分的积分方法.....          | 54        |
| 5.2        | 典型例题解析 .....            | 54        |
| 5.3        | 习题选解 .....              | 57        |
| 5.4        | 同步练习及答案 .....           | 61        |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第6章 定积分</b> .....         | 65  |
| 6.1 内容提要 .....               | 65  |
| 6.1.1 基本概念解析 .....           | 65  |
| 6.1.2 基本性质 .....             | 66  |
| 6.1.3 定积分的计算方法 .....         | 66  |
| 6.1.4 无穷区间的广义积分 .....        | 67  |
| 6.2 典型例题分析 .....             | 68  |
| 6.3 习题选解 .....               | 71  |
| 6.4 同步练习及答案 .....            | 77  |
| <b>第7章 定积分的应用</b> .....      | 81  |
| 7.1 内容提要 .....               | 81  |
| 7.1.1 定积分在几何上的应用 .....       | 81  |
| 7.1.2 定积分在物理学中的应用 .....      | 82  |
| 7.2 典型例题分析 .....             | 82  |
| 7.3 习题选解 .....               | 85  |
| 7.4 同步练习及答案 .....            | 91  |
| <b>第8章 常微分方程</b> .....       | 93  |
| 8.1 内容提要 .....               | 93  |
| 8.1.1 常微分方程的基本概念 .....       | 93  |
| 8.1.2 可分离变量的微分方程 .....       | 93  |
| 8.1.3 齐次型微分方程 .....          | 93  |
| 8.1.4 一阶线性微分方程 .....         | 94  |
| 8.1.5 可降阶的高阶微分方程 .....       | 94  |
| 8.1.6 二阶线性微分方程解的结构 .....     | 95  |
| 8.1.7 二阶常系数齐次线性微分方程 .....    | 96  |
| 8.1.8 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....   | 96  |
| 8.2 典型例题分析 .....             | 97  |
| 8.3 习题选解 .....               | 102 |
| 8.4 同步练习及答案 .....            | 106 |
| <b>第9章 空间解析几何与向量代数</b> ..... | 109 |
| 9.1 内容提要 .....               | 109 |
| 9.1.1 空间直角坐标系 .....          | 109 |
| 9.1.2 向量的概念及其线性运算 .....      | 109 |
| 9.1.3 向量的坐标表示 .....          | 110 |
| 9.1.4 向量的数量积 .....           | 111 |
| 9.1.5 向量的向量积 .....           | 112 |

|               |                      |            |
|---------------|----------------------|------------|
| 9.1.6         | 平面的方程.....           | 113        |
| 9.1.7         | 直线的方程.....           | 113        |
| 9.1.8         | 平面、直线的位置关系.....      | 114        |
| 9.1.9         | 曲面方程的概念.....         | 115        |
| 9.2           | 典型例题分析 .....         | 117        |
| 9.3           | 习题选解 .....           | 118        |
| 9.4           | 同步练习及答案 .....        | 127        |
| <b>第 10 章</b> | <b>多元函数微分学 .....</b> | <b>129</b> |
| 10.1          | 内容提要 .....           | 129        |
| 10.1.1        | 多元函数的概念、极限与连续.....   | 129        |
| 10.1.2        | 二元函数的极限与连续.....      | 129        |
| 10.1.3        | 偏导数.....             | 130        |
| 10.1.4        | 高阶偏导数.....           | 131        |
| 10.1.5        | 全微分.....             | 132        |
| 10.1.6        | 多元复合函数的微分.....       | 132        |
| 10.1.7        | 隐函数微分法.....          | 134        |
| 10.1.8        | 空间曲线的切线与法平面.....     | 134        |
| 10.1.9        | 曲面的切平面与法线.....       | 135        |
| 10.1.10       | 二元函数的极值.....         | 135        |
| 10.1.11       | 二元函数的最大值与最小值.....    | 136        |
| 10.1.12       | 条件极值.....            | 136        |
| 10.2          | 典型例题分析 .....         | 136        |
| 10.3          | 习题选解 .....           | 139        |
| 10.4          | 同步练习及答案 .....        | 153        |
| <b>第 11 章</b> | <b>多元函数积分学 .....</b> | <b>155</b> |
| 11.1          | 内容提要 .....           | 155        |
| 11.1.1        | 二重积分的概念与性质.....      | 155        |
| 11.1.2        | 二重积分的计算.....         | 155        |
| 11.1.3        | 二重积分的应用.....         | 156        |
| 11.2          | 典型例题分析 .....         | 157        |
| 11.3          | 习题选解 .....           | 159        |
| 11.4          | 同步练习及答案 .....        | 165        |
| <b>第 12 章</b> | <b>级数 .....</b>      | <b>168</b> |
| 12.1          | 内容提要 .....           | 168        |
| 12.1.1        | 无穷级数.....            | 168        |
| 12.1.2        | 幂级数.....             | 170        |

|                    |            |
|--------------------|------------|
| 12.2 典型例题分析 .....  | 174        |
| 12.3 习题选解 .....    | 176        |
| 12.4 同步练习及答案 ..... | 184        |
| <b>参考文献</b> .....  | <b>186</b> |

# 第 1 章 函数

## 1.1 内容提要

### 1.1.1 函数的概念

定义 1 设  $x, y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的数集. 如果有一个对应法则  $f$ , 使得对于每一个数值  $x \in D$ , 变量  $y$  都有惟一确定的数值与之对应, 则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数, 记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量. 集合  $D$  称为函数的定义域, 记为  $D_f$ .

函数的定义域  $D_f$  和对应法则  $f$  是函数的两个主要要素, 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则, 则它们是相同的函数.

函数常用的表示法有: 解析法, 图像法, 表格法.

分段函数: 一个函数在定义域的不同范围内用不同的解析式表示, 这样的函数称为分段函数.

### 1.1.2 函数的几种特性

#### 1. 函数的奇偶性

设函数  $y = f(x)$  的定义域  $D_f$  关于原点对称, 如果对于任意  $x \in D_f$ , 恒有  $f(-x) = -f(x)$  (或  $f(-x) = f(x)$ ), 则称  $f(x)$  为奇 (或偶) 函数.

奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于  $y$  轴对称.

#### 2. 函数的周期性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D_f$ , 如果存在一个常数  $T \neq 0$ , 使得对任意的  $x \in D_f$  有  $x \pm T \in D_f$  且  $f(x \pm T) = f(x)$ , 则称函数  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的周期. 通常我们所说的周期是指函数  $f(x)$  的最小正周期.

#### 3. 函数的单调性

设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果对于区间  $I$  内的任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调增加 (或单调减少) 的. 单调增加 (或单调减少) 的函数又称为递增 (或递减) 函数, 递增和递减函数统称为单调函数, 使函数保持单调性的自变量的取值区间称为该函数的单调区间.

#### 4. 函数的有界性

设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果存在正常数  $M$ , 使得对于区间  $I$  内所有  $x$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有界. 如果这样的  $M$  不存在, 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上无界.

### 1.1.3 基本初等函数

- (1) 幂函数  $y = x^\mu$  ( $\mu$  为实数);
- (2) 指数函数  $y = a^x$  ( $a$  是常数且  $a > 0, a \neq 1$ );
- (3) 对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ );
- (4) 三角函数  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \sec x$ ,  $y = \csc x$ ;
- (5) 反三角函数  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$ .

以上五类函数统称为基本初等函数.

### 1.1.4 复合函数

**定义 2** 设  $y$  是  $u$  的函数  $y = f(u)$ , 而  $u$  又是  $x$  的函数  $u = \varphi(x)$ . 如果对于  $\varphi(x)$  的定义域中某些  $x$  值所对应的  $u$  值, 函数  $y = f(u)$  有定义, 则  $y$  通过  $u$  也成为  $x$  的函数, 称该函数为由  $y = f(u)$  及  $u = \varphi(x)$  复合而成的复合函数, 记为  $y = f[\varphi(x)]$ , 其中  $u$  称为中间变量.

### 1.1.5 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成, 并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

### 1.1.6 反函数

设  $y = f(x)$  是定义在  $D_f$  上的一个函数, 其值域为  $Z_f$ . 如果对每一数值  $y \in Z_f$ , 有确定的且满足  $y = f(x)$  的数值  $x \in D_f$  与之对应, 其对应法则记为  $f^{-1}$ , 则定义在  $Z_f$  上的函数  $x = f^{-1}(y)$  称为函数  $y = f(x)$  的反函数.

习惯上常用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 故常把  $y = f(x)$  的反函数记为  $y = f^{-1}(x)$ . 若把函数  $y = f(x)$  与其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形画在同一平面直角坐标系内, 那么这两个图形关于直线  $y=x$  对称.

### 1.1.7 隐函数

变量  $x, y$  之间的相互依赖的关系, 是由某一个二元方程  $F(x, y) = 0$  给出的, 如  $x^3 + y^3 - xy + 5 = 0$ ,  $\sin(xy) + e^{x+y} = 6$  等, 用这种方法表示的函数称为隐函数.

## 1.2 典型例题分析

**例 1** 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right); (2) y = \frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x(x-4)}.$$

**解** (1) 由已知函数知, 在该函数中有三种情况同时出现, 即要求分母不为零, 偶次根式的被开方式大于等于零和反正弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1, 可建立不等式组, 并

求出联立不等式组的解, 即

$$\begin{cases} \sqrt{3-x^2} \neq 0, \\ 3-x^2 \geq 0, \\ -1 \leq \frac{1}{2}x-1 \leq 1. \end{cases} \quad \text{推得} \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases} \quad \text{即 } 0 \leq x < \sqrt{3}.$$

因此, 所给函数的定义域为  $0 \leq x < \sqrt{3}$ , 即  $[0, \sqrt{3})$ .

(2) 在函数中有三种情况同时出现, 即要求分母不为零, 偶次根式的被开方式大于等于零和对数函数符号内的式子为正, 可建立不等式组, 并求出联立不等式组的解. 即

$$\begin{cases} x(x-4) \neq 0, \\ \ln(x+2) \geq 0, \\ x+2 > 0. \end{cases} \quad \text{推得} \begin{cases} x \neq 4, x \neq 0, \\ x \geq -1, \\ x > -2. \end{cases} \quad \text{即 } -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 4 \text{ 或 } x > 4.$$

因此, 所给函数的定义域为,  $-1 \leq x < 0$  或  $0 < x < 4$  或  $x > 4$ , 即定义域为  $[-1, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$ .

**小结** 函数的定义域是指使函数有意义的全体自变量构成的集合, 求函数的定义域要考虑下列几个方面:

- (1) 分式的分母不能为零;
- (2) 偶次根式下不能为负值;
- (3) 负数和零没有对数;
- (4) 反三角函数要考虑主值区间;
- (5) 代数和的情况下取各式定义域的交集.

**例 2** 判断下列各对函数是否相同.

$$(1) f(x) = \sin^2 x \text{ 与 } g(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad (2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \text{ 与 } g(x) = x - 1.$$

**解** 利用函数的两要素, 即定义域和对应法则进行判断.

(1)  $f(x) = \sin^2 x$  与  $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ , 即两个函数的定义域相同, 由于  $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = g(x)$ , 即对应法则也相同, 所以  $f(x)$  与  $g(x)$  是相同的函数;

(2) 由于  $f(x)$  的定义域为  $x \neq -1$ ,  $g(x)$  的定义域为任意实数, 因此  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域不同, 所以  $f(x)$  与  $g(x)$  是不同的函数.

**小结** 判断两个函数是否相同, 首先判断两个函数的定义域是否相同, 若不相同, 则这是两个不同的函数; 若相同, 再进行下一步, 考虑这两个函数的对应法则, 若不相同, 则这是两个不同的函数; 若相同, 则这是两个相同的函数.

**例 3** 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) h(t) = t \sin^2 t \cos 2t;$$

$$(3) g(x) = f(x) \left( \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } f(x) \text{ 是奇函数.}$$