

经济数学学习方法指导丛书

概率论与数理统计

张晓梅 钱晓明 编著

上海财经大学应用数学系 主编



复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

大学经济数学学习方法指导丛书

概率论与数理统计

上海财经大学应用数学系 主编

张晓梅 钱晓明 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张晓梅,钱晓明编著. —上海:复旦大学出版社,
2005.10

(大学经济数学学习方法指导丛书)

ISBN 7-309-04761-3

I. 概… II. ①张…②钱… III. ①概率论-高等学校-教材
②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 111425 号

概率论与数理统计

张晓梅 钱晓明 编著

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 范仁梅

总编辑 高若海

出品人 贺圣遂

印刷 同济大学印刷厂

开本 787×960 1/16

印张 7.75

字数 147 千

版次 2005 年 10 月第一版第一次印刷

印数 1—5 000

书号 ISBN 7-309-04761-3/O·348

定价 12.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书从概率的基本概念入手,由浅入深地介绍了概率论与数理统计的有关内容,其中包括:概率、条件概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计初步.本书既可作为财经类本科生学习概率论与数理统计的辅导书,也可作为报考硕士研究生的考前复习参考书.

前 言

本书是财经类概率论与数理统计辅助教材,按照教育部《关于概率论与数理统计课程的基本要求》及《概率论与数理统计硕士研究生考试大纲》编写而成,着重对基本概念、基本性质、基本方法作了较深入的总结与归纳,重点选择了较多类型的例题,通过仔细解析这些典型例题,系统阐述了概率论与数理统计课程的解题方法与技巧.本书还将历年全国硕士研究生入学统一考试中有关概率论与数理统计部分按知识要点融入各章,提供给考研读者作为参考.

本书可作为财经类本科生、研究生学习概率论与数理统计课程的辅导书,也可作为考研强化指导书.

本书第1、第2、第3、第4、第5、第6章由张晓梅执笔编写,第7章由钱晓明编写.

由于水平有限,书中难免有疏漏错误之处,欢迎读者批评指正.

编者

2005年4月

目 录

第 1 章 随机事件与概率	1
§ 1.1 内容提要	1
样本空间与随机事件 随机事件的概率	
§ 1.2 典型例题分析	3
§ 1.3 学习测试题	8
基本题 提高题	
第 2 章 条件概率与独立性	11
§ 2.1 内容提要	11
条件概率与事件的独立性 全概率公式与贝叶斯公式	
贝努里概型	
§ 2.2 典型例题分析	13
§ 2.3 学习测试题	18
基本题 提高题	
第 3 章 随机变量及其分布	23
§ 3.1 内容提要	23
随机变量与分布函数 离散型随机变量及其分布 连续型随机	
变量及其分布 随机变量函数的分布	
§ 3.2 典型例题分析	27
§ 3.3 学习测试题	35
基本题 提高题	
第 4 章 随机向量及其分布	41
§ 4.1 内容提要	41
二维随机向量 随机变量的独立性 二维随机向量函数的分布	
§ 4.2 典型例题分析	44
§ 4.3 学习测试题	52

基本题 提高题	
第 5 章 随机变量的数字特征	57
§ 5.1 内容提要	57
数学期望 方差 协方差与相关系数	
§ 5.2 典型例题分析	60
§ 5.3 学习测试题	70
基本题 提高题	
第 6 章 大数定律与中心极限定理	75
§ 6.1 内容提要	75
大数定律 中心极限定理	
§ 6.2 典型例题分析	76
§ 6.3 学习测试题	81
基本题 提高题	
第 7 章 数理统计初步	84
§ 7.1 内容提要	84
简单随机样本与统计量 抽样分布 点估计 区间估计	
假设检验	
§ 7.2 典型例题分析	91
§ 7.3 学习测试题	94
答案与提示	97

第 1 章

随机事件与概率

§ 1.1 内容提要

1.1.1 样本空间与随机事件

1. 随机试验

- (1) 相同条件下可重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个,且在试验的开始前能明确所有可能出现的结果;
- (3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现. 随机试验通常用字母 E 表示.

2. 样本空间

- (1) 随机试验的每一个可能出现的结果称为样本点,用 ω 表示;
- (2) 样本点全体组成的集合称为样本空间,用 Ω 表示.

3. 随机事件

样本空间的某个子集称为试验 E 的随机事件,简称事件. 用 $A, B, \dots$ 表示. 随机事件可分为以下几类:

- (1) 基本事件:只含一个样本点的子集;
- (2) 复合事件:由至少两个样本点组成的子集;
- (3) 不可能事件:不含任何样本点的子集,即试验中不可能发生的事件,记为 $\emptyset$;
- (4) 必然事件:即样本空间 Ω . 因为含有全体样本点,故每次试验必然发生.

4. 事件间的关系

- (1) 包含关系:如果 A 的每个样本点都属于 B ,即 A 发生必然导致 B 发生,则

称 A 包含于 B , 或 B 包含 A , 记 $A \subset B$ 或 $B \supset A$;

(2) 相等关系: 若 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$;

(3) 事件的交(积): A, B 的公共样本点组成的集合, 记为 $A \cap B$ 或 AB ;

推广: n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$;

(4) 事件的并(和): A, B 的所有样本点(重复的只算一个)组成的集合, 记 $A \cup B$ 或 $A + B$. 并事件 $A \cup B$ 表示 A, B 至少有一个发生;

推广: n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$;

(5) 互不相容(互斥)事件: 若 $AB = \emptyset$, 即 A, B 不能同时发生, 则称 A, B 为互不相容(互斥). 互不相容事件 A, B 没有公共的样本点;

(6) 差事件: A 发生而 B 不发生, 称为 A 与 B 的差事件, 记为 $A - B$. 差事件 $A - B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点组成的集合. 显然, $A - B = A - AB = A\bar{B}$;

(7) 逆(对立)事件: A 的逆事件记为 $\bar{A}$, 由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合. 显然, $A \cup \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = \Omega - A, \bar{\bar{A}} = A$.

5. 事件的运算

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合律: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), ABC = (AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4) 德·莫根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.1.2 随机事件的概率

1. 概率的统计定义

在相同条件下, 重复进行 N 次试验, 事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动, 且一般地说, N 越大, 摆动的幅度越小, 则称常数 p 为事件 A 的概率, 记为 $P(A)$.

2. 概率的古典定义

若随机试验的样本点有限, 而且这些事件两两互斥, 每个样本点发生的可能性相同, 则称此类试验为古典概型试验. 事件 A 发生的概率 $P(A)$ 称为古典概率.

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 中包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}} = \frac{m}{n}.$$

3. 概率的几何定义

若随机试验的可能结果有无限个(不可列),每个样本点发生的可能性相等,则当样本空间 Ω 与所求事件 A 都可以用几何量(长度、面积、体积)来测度时, A 发生的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设随机试验 E , 样本空间 Ω , 对任意事件 A , 都赋予一个实数 $P(A)$, 满足:

$$(1) P(A) \geq 0;$$

$$(2) P(\Omega) = 1;$$

$$(3) \text{ 对事件 } A_1, A_2, \dots \text{ 互不相容, 有 } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的性质

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$(2) P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0;$$

$$(3) \text{ 若 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 互不相容, 则 } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

$$(4) P(A) + P(\bar{A}) = 1;$$

$$(5) \text{ 若 } B \subset A, \text{ 则 } P(A - B) = P(A) - P(B), \text{ 且 } P(A) \geq P(B);$$

$$(6) \text{ 加法定理: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

§ 1.2 典型例题分析

例 1 设 A, B, C 表示 3 个非空随机事件, 试将下列事件用 A, B, C 的运算关系表示出来.

(1) A 发生, B, C 不发生;

(2) A, B 都发生, 而 C 不发生;

(3) A, B, C 都发生;

- (4) A, B, C 至少有一个发生;
 (5) A, B, C 至少有两个发生;
 (6) A, B, C 都不发生;
 (7) 不多于一个事件发生;
 (8) 不多于两个事件发生;
 (9) 恰好有一个事件发生.

解 (1) $A - B - C$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; (2) $AB - C$ 或 $AB\overline{C}$; (3) ABC ; (4) $A \cup B \cup C$;
 (5) $AB \cup AC \cup BC$; (6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$; (7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC$ 或
 根据(7)与(5)为互逆事件得 $\overline{AB \cup AC \cup BC}$; (8) 根据(8)与(3)是互逆事件得
 $\overline{ABC}$; (9) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C}$.

例2 设两事件 A, B , 若 $AB = \overline{A}\overline{B}$, 问 A 与 B 是什么关系?

分析 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$, 即 $AB = \overline{A \cup B}$, 而 $AB \subset A \cup B$, 故 $AB = \emptyset, A \cup B = \Omega$.

解 A, B 为互逆事件, 即 $A = \overline{B}, B = \overline{A}$.

例3 对任意事件 A, B , 下列命题()是正确的?

- (A) 如果 A, B 互不相容, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也互不相容;
 (B) 如果 A, B 相容, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也相容;
 (C) 如果 $\overline{A}, \overline{B}$ 不相容, 则 $A \cup B = \Omega$;
 (D) 如果 $AB = A$, 则 $A \cup B = A$.

分析 (A) 只有在 A, B 互逆时才成立, 一般情况下不成立; (B) 当 $A = \Omega$ 时, 不成立; (C) $\overline{A}\overline{B} = \emptyset$, 则 $\overline{AB} = \overline{\emptyset}$, 即 $A \cup B = \Omega$; (D) $AB = A$, 则 $A \subset B$, 于是 $A \cup B = B$.

解 应选(C).

例4 从10双不同的手套中任取8只, 求其中恰好有2双配对的概率.

分析 试验是20只手套中任取8只, 故总的取法是 C_{20}^8 ; 为保证2双配对, 先在10双里取2双, C_{10}^2 , 剩余8双中要取4只不配对, 则先按双取, 再每双中任取一只, 即 $C_8^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1$.

解 设 A 表示“恰好有2双配对”, 则

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 C_8^1 (C_2^1)^4}{C_{20}^8} = \frac{50400}{125970} \approx 0.4001.$$

例5 设有 n 个男孩, m 个女孩 ($m \leq n+1$), 随机排成一行, 求“任意两个女孩都不相邻”的概率.

分析 试验是 $n+m$ 个人排成一行, 故总的排法为 $(n+m)!$; 为使女孩都不相邻, 先排男孩, 共有 $n!$ 种方法, 再在两个相邻男孩之间排女孩, 加上两头位置, 共有 $n+1$ 个位置, 于是有 P_{n+1}^m 种排法.

解 设 A 表示“任意两个女孩都不相邻”, 则 $P(A) = \frac{n!P_{n+1}^m}{(n+m)!}$.

例 6 袋中有 a 只红球, b 只白球, 现从口袋中随机地依次摸出, 求第 k 次摸出的是红球的概率 ($1 \leq k \leq a+b$).

分析 若将同色球加以区别, 则 $a+b$ 个球共有 $(a+b)!$ 种排法; 若同色球不加区别, 则 $a+b$ 个球共有 $\frac{(a+b)!}{a!b!} = C_{a+b}^a$ 种排法.

解 设 A 表示“第 k 次摸出的是红球”,

$$(1) \text{ 将球编号, 连取 } a+b \text{ 次, 则 } P(A) = \frac{a \cdot (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b};$$

$$(2) \text{ 同色球看成相同球, 连取 } a+b \text{ 次, 则 } P(A) = \frac{1 \cdot C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a} = \frac{a}{a+b}.$$

说明 (1) 对古典概型, 可用不同的随机试验模型, 但分子、分母应同时考虑排列或组合;

$$(2) P(A) = \frac{a}{a+b} \text{ 与 } k \text{ 无关, 同理 } \bar{A} \text{ 表示“第 } k \text{ 次摸出的是黑球”, 则 } P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b};$$

(3) 这一模型用于抽签, 体现公平性.

例 7 一袋中装有 $n-1$ 个黑球和一个白球, 每次从袋中任取一球, 并换入一个黑球, 在如此取球条件下, 问第 k 次摸到黑球的概率.

分析 第 k 次摸到黑球时, 之前的 $k-1$ 次是否摸过白球不清楚, 情况比较复杂, 这时逆事件相对会简单.

解 设 A 表示“第 k 次摸到黑球”, 则 $\bar{A}$ 表示“第 k 次摸到白球”, 于是 $P(\bar{A}) = \frac{(n-1)^{k-1} \times 1}{n^k}$, 从而 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$.

例 8 某城市共发行 3 种报纸 A, B, C . 居民中, 订购 A 报的占 45%, 订购 B 报的占 35%, 订购 C 报的占 30%, 同时订购 A 报及 B 报的占 10%, 同时订购 A 报及 C 报的占 8%, 同时订购 B 报及 C 报的占 5%, 同时订购 A, B, C 报的占 3%. 求下列事件的百分率:

- (1) 只订购 A 报;
- (2) 只订购 A, B 两报;
- (3) 只订购一种报;
- (4) 恰好订购两种报;
- (5) 至少订购一种报;
- (6) 不订购任何报.

解 设 A, B, C 表示订购报纸 A, B, C , 于是

$$(1) P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = 30\%;$$

$$(2) P(\overline{A}B\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = 10\% - 3\% = 7\%;$$

$$(3) P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}BC) = 73\%;$$

$$(4) P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}ABC) = 14\%;$$

$$(5) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 90\%;$$

$$(6) P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 10\%.$$

例 9 某科技馆在某一星期里曾接待过 10 位来访的专家. 所有 10 次接待都是在星期一或星期二. 问是否可以断定接待的时间有规定?

分析 假设接待的时间无规定, 10 位专家在任一天来访, 共 7^{10} 种可能, 设 A 表示“10 位专家都在星期一或星期二来访”, 则 $P(A) = \frac{2^{10}}{7^{10}} = 0.000\ 003\ 7$, 这是小概率事件, 它在一次试验中几乎不会发生.

解 可以断定接待的时间有规定.

例 10 某城有 N 部车, 车牌号从 1 到 N , 某人把遇到的 n 部车子的牌号抄下 (可能重复抄到某些车牌号), 问抄到的最大号码正好为 k 的概率 ($1 \leq k \leq N$).

分析 号码 $1, 2, \dots, k, \dots, N$, n 部车子的最大号码恰好为 k , 则其他号码小于 k , 且号码 k 至少被抄过一次, 于是所求概率为 $[C_n^1(k-1)^{n-1} + C_n^2(k-1)^{n-2} + \dots + C_n^n] / N^n$, 其中 $C_n^1(k-1)^{n-1}$ 为 n 个号码中某一次抄到 k , 其余 $n-1$ 次抄的是 $1 \sim (k-1)$ 中某一号码. 这种正面分析太过于繁琐. 采用另外的方法. 车牌号不大于 k , 共有 k^n 种可能, 去掉车牌号不大于 $k-1$ 的 $(k-1)^n$ 种可能, 剩下的是至少取过一次 k 的可能.

解 设 A 表示“最大号码正好为 k ”, 则 $P(A) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$.

例 11 从 1 至 9 这 9 个数字中, 有放回地取 3 次, 每次任取 1 个, 求所取的 3 个数之积被 10 整除的概率.

分析 3 个数中必有 5, 必有一个偶数. 正面考虑分这几种情况, 取 5 和一个偶数, $1, 3, 7, 9$ 中任取一个, 共 $(1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1)3!$ 种; 取 2 个 5、一个偶数, 共 $C_3^2 \cdot C_4^1$ 种; 取一个 5 和 2 个不同偶数, 共 $(1 \cdot C_4^2)3!$ 种; 取一个 5 和 2 个相同偶数, 共 $C_3^1 C_4^1$ 种. 太繁琐, 还是利用逆事件求解.

解 设 A 表示“3 个数之积被 10 整除”, $\bar{A}$ 表示“3 个数之积不能被 10 整除”, B_1 表示“3 个数中没 5”, B_2 表示“3 个数中没偶数”, 则

$$P(\bar{A}) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = \frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3} = \frac{573}{729},$$

于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{156}{729}.$$

例 12 轻轨站每隔 5 分钟有一列轻轨车通过, 乘客随机地到车站候车. 求候车时间不大于 3 分钟的概率.

分析 乘客在 5 分钟内的任一时刻到达是等可能的, 属于几何概型问题, 只有一个因素“时间” t 在变, 所以用长度来测度.

解 $P = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{3}{5}.$

例 13 将长度为 a 的线段任意分为 3 段, 求此 3 条线段能构成三角形的概率.

分析 假设 3 条线段长为 $x, y, a - x - y$, 有两个因素 x, y 变化, 所以用面积来测度.

解 因为 $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a$, 则 Ω 为三角形. 设 A 表示“3 条线段能构成三角形”, 则 A 发生需有以下条件:

$$\begin{cases} x + y > a - x - y \\ (a - x - y) + y > x \\ (a - x - y) + x > y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y > \frac{a}{2}, \\ x < \frac{a}{2}, \\ y < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

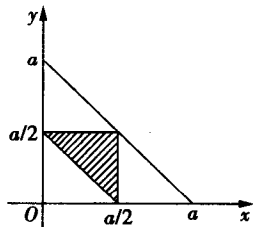


图 1.1

满足上述条件的点充满图 1.1 中阴影域内, 所以

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

例 14 甲、乙两轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊. 它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时, 乙船的停泊时间是两小时, 求它们中任何一艘船都不需要等候码头空出的概率.

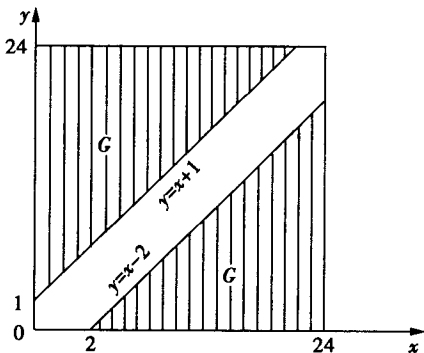


图 1.2

分析 假设甲、乙两船到达码头的时刻分布为 x, y , 则 $0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24$, Ω 为边长为 24 的正方形. 若两艘船都不需要等候码头空出, 则若甲船先到, 应有 $y - x \geq 1$; 若乙船先到, 则 $x - y \geq 2$.

解 设 A 表示“两艘船都不需要等候码头空出”

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24\},$$

$$A = \{(x, y) \mid y - x \geq 1 \text{ 或 } x - y \geq 2\}.$$

满足 A 中条件的点充满图 1.2 中的阴影域, 则

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{506.5}{24^2} = 0.8793.$$

§ 1.3 学习测试题

1.3.1 基 本 题

1. 设 A, B 为两个事件, 则 $(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$ 表示().
 (A) 必然事件 (B) 不可能事件
 (C) A 与 B 恰有一个发生 (D) A 与 B 不同时发生
2. 设 A, B, C 是 3 个事件, 与事件 A 互斥的事件是().
 (A) $\bar{A}B + A\bar{C}$ (B) $\overline{A(B+C)}$
 (C) $\overline{ABC}$ (D) $\overline{A+B+C}$
3. 以 A 表示事件“甲产品畅销, 乙产品滞销”, 则 $\bar{A}$ 为().
 (A) “甲产品滞销, 乙产品畅销” (B) “甲、乙产品均畅销”
 (C) “产品滞销” (D) “甲产品滞销或乙产品畅销”
4. 设当事件 A, B 都发生时, 事件 C 必发生, 则() 成立.
 (A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$ (B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$
 (C) $P(C) = P(AB)$ (D) $P(C) = P(A+B)$
5. 若 $A \supset B, A \supset C, P(A) = 0.9, P(\bar{B} + \bar{C}) = 0.8$, 则 $P(A - BC)$
 = _____.
6. 设 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}), P(A) = p$, 则 $P(B) =$ _____.
7. 10 人编号 1, 2, ..., 10, 随意围一圆桌坐下, 则有某一对持相邻号的两人正好座位相邻的概率为 _____.
8. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{8},$
 $P(ABC) = \frac{1}{16}$, 则 $P(A \cup B \cup C) =$ _____; $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) =$ _____;
 $P(A, B, C \text{ 恰好发生一个}) =$ _____; $P(A, B, C \text{ 至多发生一个})$
 = _____.
9. 从 0, 1, 2, ..., 9 共 10 个数码中每次任取一个, 取后放回, 先后共取 7 个数

码,求下列事件的概率:

- (1) 7 个数码都不相同;
- (2) 不含 0 与 1;
- (3) 0 恰好出现 3 次.

10. 设事件 A 与 B 都不发生的概率为 p_0 , 只发生其中之一的概率为 p_1 , 求 A 、 B 同时发生的概率.

11. 甲乙两人轮流掷一颗骰子, 每轮掷一次, 谁先掷得 6 点谁胜, 从甲开始掷, 问甲乙得胜的概率各为多少?

12. 设 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, 证明: $\frac{1}{6} \leq P(AB) \leq \frac{1}{2}$.

13. n 对新人参加婚礼, 现进行一项游戏: 随机地把人分为 n 对, 问每对恰为夫妻的概率是多少?

14. 将一枚骰子掷 4 次, 至少出现一个 6 点和把两个骰子掷 24 次至少出现一个双 6, 这两个事件哪个出现的机会更大? 为什么?

15. 从 $1, 2, \dots, n$ 中任取两个, 求所取两数之和为偶数的概率.

16. 若在长为 a 的线段 AB 上任取两点 L 及 M , 求 L 点距 M 点比距 A 点近的概率.

1.3.2 提 高 题

1. 在电炉上安装了 4 个温控器, 其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中, 只要有二个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”, 设 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值, 则事件 E 等于().

(A) $\{T_{(1)} \geq t_0\}$

(B) $\{T_{(2)} \geq t_0\}$

(C) $\{T_{(3)} \geq t_0\}$

(D) $\{T_{(4)} \geq t_0\}$

2. 设 A, B 是任意两个概率不为零的不相容事件, 则下列结论中肯定正确的是().

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容

(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$

(D) $P(A - B) = P(A)$

3. 对任意两事件 A, B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是().

(A) $A \subset B$

(B) $\bar{B} \subset \bar{A}$

(C) $A\bar{B} = \emptyset$

(D) $\bar{A}B = \emptyset$

4. 对任意两事件 A 和 B , 有 $P(A - B) = (\quad)$.

- (A) $P(A) - P(B)$ (B) $P(A) - P(B) + P(AB)$
(C) $P(A) - P(AB)$ (D) $P(A) + P(B) - P(AB)$

5. 设 A, B 为两个随机事件, 若 $P(AB) = 0$, 则下列命题中正确的是().

- (A) A, B 互斥 (B) AB 是不可能事件
(C) AB 未必是不可能事件 (D) $P(A) = 0, P(B) = 0$

6. 设 A, B, C 为 3 个事件, 则 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$ 表示().

- (A) A, B, C 至少发生一个 (B) A, B, C 至少发生两个
(C) A, B, C 至多发生两个 (D) A, B, C 至多发生一个

7. 设 A, B 是任意两个随机事件, 则 $P\{(\bar{A} + B)(A + B)(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{B})\} =$

_____.

8. 设对于事件 A, B, C , 有 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, 则 A, B, C 3 个事件中至少出现一个的概率为_____.

9. 某次摸彩活动只有一个特等奖, 共发行彩票 100 万张. 假设人们依次摸彩, 一人一张彩票, 则第 100 个人摸到特等奖的概率为_____.

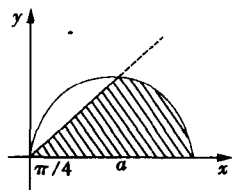


图 1.3

10. 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域内的面积成正比(如图 1.3 所示), 则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

11. 若事件 A, B, C 满足 $A + C = B + C$, 问 $A = B$ 是否成立?

12. 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别为将一枚骰子接连掷两次之后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .