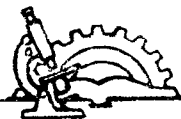


高等学校試用教科书



材 料 力 学

CAILIAO LIXUE

(机械类专业用增补部分)

南京工学院力学教研室編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校試用教科书

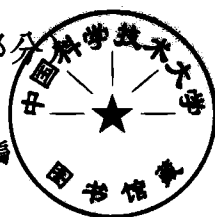


材 料 力 学

CAILIAO LIXUE

(机械类专业用增补部分)

南京工学院力学教研组编



人民教育出版社

本书是由南京工学院、清华大学、唐山铁道学院、西安交通大学、天津大学、北京航空学院、华中工学院、西北工业大学等校材料力学教研组的有关教师为南京工学院力学教研组所编动力学、电机类专用“材料力学”一书增补的部分，作为高等工业学校机械类专业在采用这本教材时的补充教材。

增补部分包括曲杆一章，以及对原书力学性质、扭转、实验应力分析、强度理论、曲柄轴的强度计算、压杆的稳定、复变应力等章增加的必要补充材料。

材 料 力 学

(增补部分)

南京工学院力学教研组编

(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号 15010·995 开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 $2\frac{11}{16}$

字数 66,000 印数 25,001—35,000 定价(7)¥0.36

1961年7月第1版 1961年11月北京第2次印刷

目 录

第二十三章 平面曲杆的强度及刚度計算	497
§ 23-1. 平面曲杆的平面弯曲問題	497
§ 23-2. 平面曲杆在純弯曲时的正应力公式	499
§ 23-3. 中性层曲率半径 r 及截面形心到中性层距离 y_0 的計算	503
§ 23-4. 平面曲杆在平面弯曲时的强度条件	510
§ 23-5. 計算曲杆在平面弯曲时正应力的另一方法	513
§ 23-6. 平面曲杆弯曲正应力公式的討論	515
§ 23-7. 平面曲杆弯曲变形的計算	517
續第二章 拉伸及压縮	520
§ 2-13. 非金属材料机械性質	520
§ 2-14. 低温对金属材料机械性質的影响	523
§ 2-15. 金属在低温时破坏强度的估計——冲击韌度法	525
續第四章 扭轉与剪切	527
§ 4-10. 非圓截面等直杆在純扭轉时的应力及变形計算公式	527
§ 4-11. 薄壁截面杆在純扭轉时的应力及变形	531
§ 4-12. 薄膜比拟法的概念	535
續第六章 实验应力分析	537
§ 6-11. 三向应力状态的光彈性法实验	537
§ 6-12. 多点測量問題	538
§ 6-13. 电比拟法的基本原理	541
§ 6-14. 实验应力分析的发展方向	545
續第七章 强度理論	548
§ 7-7. 达維靖柯夫-弗里特曼联合强度理論	548
§ 7-8. 强度理論的試驗驗證	552
續第十二章 組合变形时杆的强度計算	556
§ 12-6. 曲柄軸的强度校核	556
續第十三章 压杆的稳定	561
§ 13-7. 稳定計算的近似方法——能量法	561

§ 13-8. 偏心加载和初曲率的影响.....	563
§ 13-9. 矩形截面薄壁杆件的侧向稳定.....	567
§ 13-10. 纵横弯曲的概念及强度校核	570
續第十四章 重复应力作用下构件的强度計算.....	575
§ 14-8. 对重复应力下材料破坏原因的假說.....	575
§ 14-9. 在不稳定的重复应力下按强度条件及按持久寿命計算构件的方法.....	578
§ 14-10. 提高持久极限的措施.....	582

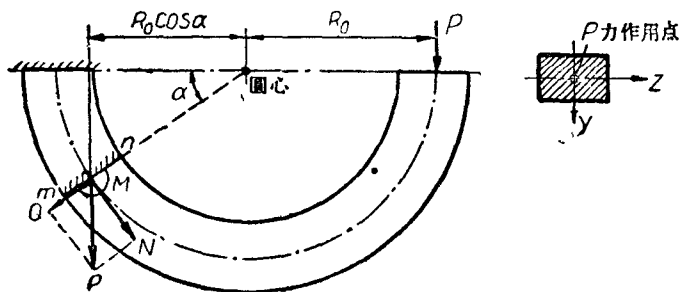


图 23-2

截开, 弃去其右面的一段, 研究其留下的左面一段在横截面 mn 上的内力素。若将杆的自重略去不计, 显然, 此截面上的内力素可根据作用在弃去部分上的 P 力求得, 将 P 力简化到 mn 截面的形心后变成一个通过截面形心的 P 力和一个力偶矩 (弯矩) $M = PR_0 (1 + \cos \alpha)$ 。通过截面形心的 P 力可以再分解为与截面垂直的轴向力 $N = P \cos \alpha$ 和与截面平行的剪力 $Q = P \sin \alpha$ 。这样就得到 mn 截面上的三个内力素 M 、 N 和 Q ; 不论杆上的载荷如何复杂, 任何横截面上均只有这三种内力素。在计算横截面上正应力时, 要规定内力素 M 和 N 的正负号, 这种规定是武断的, 习惯上是以使曲杆最外缘纤维 (凸出面) 受拉伸应力的弯矩 M 为正值弯矩, 使横截面受拉伸应力的轴力 N 为正值轴力。

在平面曲杆的横截面上, 因轴向力 N 而产生的正应力 σ_N 可以假定是均匀分布的 (因为轴力 N 通过截面形心), 因此:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}$$

因剪力 Q 而产生的剪应力 τ_Q 也可以近似地按直杆受横向弯曲时横截面上剪应力的计算公式 (9-15) 来计算:

$$\tau_Q = \frac{QS}{Jb}$$

然而，因彎矩 M 而產生的正應力則不能按直杆的彎曲正應力公式(9-5)

$$\sigma = -\frac{My}{J_z}$$

來計算，因為在曲杆中由變形的平面假定所得到的、橫截面上彎曲正應力的分布規律不是直線規律而是雙曲綫規律(詳見 §23-2)。

因此，很顯然的，在平面曲杆受平面彎曲時的強度計算問題中，關鍵問題在於確定曲杆在純彎曲時橫截面上正應力的計算公式，這個問題也就是本章所要討論的重點之一。

必須指出，當曲杆的曲率較小時(即曲率半徑比其橫截面的高度大得很多時)，基本上可以按直杆的彎曲正應力的計算公式來計算，其誤差很小，在工程上是可以容許的。但在曲率較大的曲杆中，則必須按曲杆公式計算，若按直杆的公式計算則將引起很大的誤差(見 §23-6)。

§ 23-2. 平面曲杆在純彎曲時的正應力公式

假定從一個受純彎曲的平面曲杆(圖 23-3a)中用相鄰兩橫截面 mm_1 和 nn_1 截出一段單元體(圖 23-3b)來考慮，由於單元體的两橫截面間夾角 $d\varphi$ 為微量，因此，可以將其看成是一段圓弧，作用在兩橫截面上的內力素均為彎矩 M [(圖 23-3a)中的彎矩 M 為正值的]。要確定在彎矩 M 的作用下橫截面上的正應力公式首先必須知道橫截面上正應力的分布規律。實驗結果和彈性理論的精確計算結果均指出曲杆因受純彎曲而變形時可以假定橫截面在變形後仍為平面(變形的平面假定)，按此假定所算出的橫截面上最大正應力與高勞文(Х. С. Головин)按彈性理論方法算出的結果極為接近。

(1) 任意一根纖維的應變 ε 的變化規律。

根據變形的平面假定可以把圖 23-3b 中單元體的两个橫截面間的相對變形看成是 mm_1 截面不動，而 nn_1 截面則繞其中性軸作剛體旋轉，轉動了 $\delta(d\varphi)$ 角到 $n'n_1$ 的新位置(圖 23-3b)。取中性軸為 z 軸，橫截面

的对称轴为 y 轴, 则到中性轴距离为 y 的纤维 ab 其原长为 $\widehat{ab}$, 在变形后其长度增加为 $\widehat{ab}'$, 其线变形为:

$$\widehat{bb'} = y \cdot \delta(d\varphi),$$

而纤维 ab 的原长为:

$$\widehat{ab} = (r + y)d\varphi = \rho d\varphi,$$

其中: r ——中性层的曲率半径(中性层是所有各横截面的中性轴所组成的一个曲面);

ρ ——纤维 ab 的曲率半径 $= r + y$;

y ——纤维 ab 与中性层间的垂直距离。

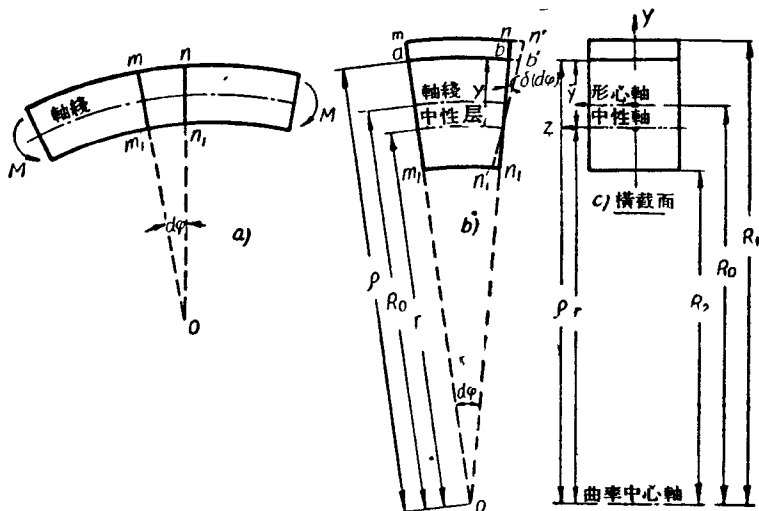


图 23-3

由此可得纤维 ab 的应变为:

$$\varepsilon = \frac{\widehat{bb'}}{\widehat{ab}} = \frac{y \cdot \delta(d\varphi)}{(r + y)d\varphi} = \frac{y}{r + y} \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{y}{\rho} \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}, \quad (23-1)$$

在同一横截面上 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 显然是一个常数(因为假定横截面绕中性轴作刚

體轉動), 從而可知任意一根纖維的應變 ϵ 的變化規律是式(23-1)所示的雙曲綫規律(圖 23-4)。在曲杆中變形的平面假設導致應變 ϵ 變化的雙曲綫規律, 這是由於兩橫截面間每一根纖維的原長是隨着其曲率半徑 ρ 而改變的緣故。

(2) 橫截面上任意一點的正應力變化規律。

既知任一纖維的應變 ϵ , 假定纖維間的擠壓應力可以略去不計(顯然, 纖維間的擠壓應力是存在的, 但其數值與橫截面上的正應力相比較是很小的, 故可略去不計), 並假定材料遵循胡克定律, 而且在拉伸與壓縮時其彈性模量 E 相等, 這樣就可以根據單向拉伸(壓縮)時的胡克定律

$$\sigma = E\epsilon$$

來確定橫截面上距中性軸為 y 處的正應力是

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{r+y} \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = E \cdot \frac{y}{\rho} \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}. \quad (23-2)$$

由此可知橫截面上各點的正應力沿 y 軸的變化規律也是雙曲綫規律(圖 23-5)。

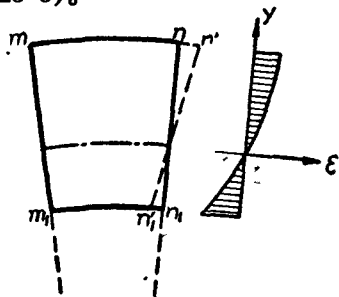
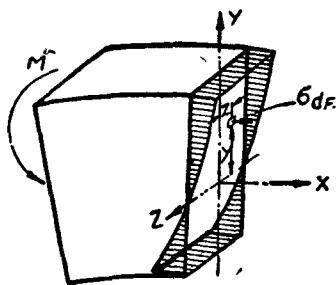


圖 23-4



正應力分布圖

圖 23-5

(3) 根據靜力平衡條件確定中性軸的位置及 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 的數值。

在橫截面上的正應力分布規律式(23-2)中, 中性軸的位置和 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 的數值尚不知道, 這可以通過圖 23-5 所示的一段曲杆的靜力平衡條件

来确定。

$$(i) \quad \Sigma X = 0; \int_F \sigma dF = 0, \quad (23-3)$$

其中 F 代表整个横截面的面积。将式(23-2)式中的 σ 代入式(23-3)可得:

$$E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y}{\rho} dF = 0; \text{ 或 } E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{\rho - r}{\rho} dF = 0. \quad (23-4)$$

要满足以上平衡条件, 由于 $E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0$, 因此, 必须有

$$\int_F dF - r \int_F \frac{dF}{\rho} = 0,$$

从而确定了中性轴的位置(以中性层的曲率半径 r 来表示)

$$r = \frac{\int_F dF}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}. \quad (23-5)$$

由平衡方程式 $\Sigma X = 0$ 所以能确定中性轴的位置, 是因为当应力分布规律确定了, 要使横截面上的内力素 $\int_F \sigma dF$ 等于零, 只有当中性轴处于一个特殊位置的条件下才有可能。

$$(ii) \quad \Sigma M_y = 0; \int_F \sigma z dF = 0, \quad (23-6)$$

由于 y 轴是横截面的对称轴, 这个条件是能自动满足的。

$$(iii) \quad \Sigma M_z = 0; \int_F \sigma y dF = M, \quad (23-7)$$

将式(23-2)中的 σ 代入式(23-7)可得:

$$E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2}{\rho} dF = M, \quad (23-8a)$$

在式(23-8a)中的积分 $\int_F \frac{y^2}{\rho} dF$ 經展开后成为:

$$\int_F \frac{y^2}{\rho} dF = \int_F \frac{y(\rho - r)}{\rho} dF = \int_F y dF - r \int_F \frac{y}{\rho} dF = F y_0 = S. \quad (23-8b)$$

这是因为上式中的积分 $\int_F \frac{y}{\rho} dF$ 根据式(23-4)可知是等于零的, 而其第一項

$$\int_F y dF = \text{横截面面积对 } z \text{ 轴(中性轴)的静矩 } S = F \cdot y_0.$$

其中: y_0 ——横截面形心到中性轴的距离 $= R_0 - r$,

R_0 ——横截面形心联綫(軸綫)的曲率半径;

將式(23-8b)代入式(23-8a)即可解出 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 与弯矩 M 間的关系:

$$\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{ES}. \quad (23-9)$$

(4) 横截面上正应力的计算公式。

將式(23-9)中的 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 值代入正应力变化規律式(23-2), 即得

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \cdot \frac{M}{ES} = \frac{M \cdot y}{S \rho} = \frac{M}{F(R_0 - r)} \cdot \left(1 - \frac{r}{\rho}\right), \quad (23-10)$$

此即平面曲杆在純弯曲时的正应力公式。在此式中必須首先确定中性层的曲率半径 r 的数值, 才能算出横截面上任意一点的正应力, 为此, 在下一节中將着重討論中性层曲率半径 r 的计算方法。

§ 23-3. 中性层曲率半径 r 及截面形心到中性层距离 y_0 的计算

计算中性层的曲率半径 r 的关键問題在于计算式(23-5)中的积分

$$\int_F \frac{dF}{\rho}, \text{ 在本节中只推导几种常用截面的积分 } \int_F \frac{dF}{\rho} \text{ 和 } r \text{ 的计算公式。}$$

(1) 矩形截面 在图 23-6 所示的矩形截面中, 可以取与 z 軸平行而高度为 $d\rho$ 的窄长条面积为 dF (因为此窄长条上各点的 ρ 可以看成是相等的), 即

$$dF = b d\rho,$$

将此 dF 值代入积分 $\int_F \frac{dF}{\rho}$ 中即可求得:

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = b \int_{R_2}^{R_1} \frac{d\rho}{\rho} = b \ln \frac{R_1}{R_2},$$

其中 R_1 及 R_2 分别为曲杆最外緣和最內緣纖維的曲率半徑 (图 23-6)。再將此积分的結果代入式 (23-5) 即得:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{bh}{b \ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (23-11)$$

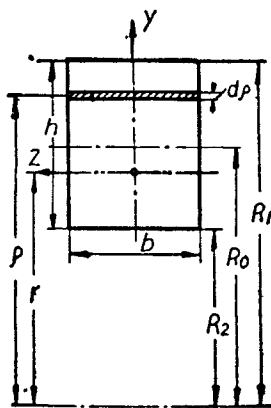


图 23-6

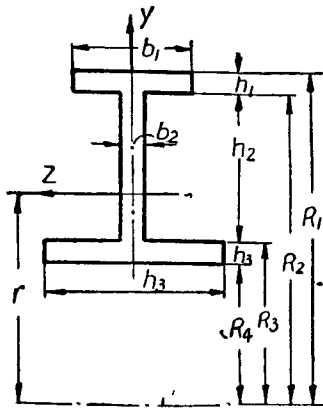


图 23-7

(2) 矩形組合截面 图 23-7 所示的工字形截面可以看成是由三个矩形組成的。在此截面中仍按以上方法取 $dF = b d\rho$, 但注意在三个矩形中 b 均不同, 故积分 $\int_F \frac{dF}{\rho}$ 应分三部分做;

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = b_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} + b_2 \int_{R_2}^{R_3} \frac{d\rho}{\rho} + b_3 \int_{R_3}^{R_4} \frac{d\rho}{\rho} = b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3},$$

从而可得

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3}} \quad (23-12)$$

由上式可以进一步推广到由 n 个底边平行的矩形组成的截面, 得

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i h_i}{\sum_{i=1}^n b_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}, \quad (23-13)$$

其中 b_i 为每个矩形的宽度, h_i 为其长度, R_i 及 R_{i+1} 分别为每个矩形的上缘和下缘纤维的曲率半径。

(3) 梯形及三角形截面 在图 23-8 所示的梯形中, 取 $dF = b(\rho) d\rho$, $b(\rho)$ 为梯形的宽度, 其值随 ρ 值而改变。

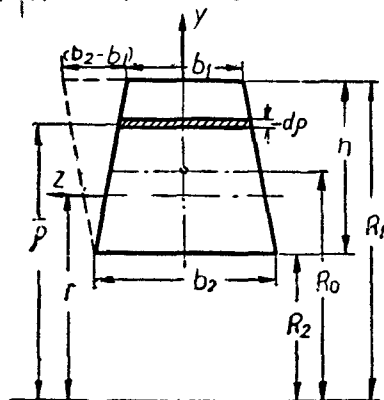


图 23-8

$$b(\rho) = b_2 - \frac{\rho - R_2}{h}(b_2 - b_1) = b_2 + \frac{R_2}{h}(b_2 - b_1) - \frac{(b_2 - b_1)}{h} \cdot \rho,$$

代入積分 $\int_F \frac{dF}{\rho}$ 中, 即得

$$\begin{aligned} \int_F \frac{dF}{\rho} &= \int_{R_1}^{R_2} \left[b_2 + \frac{R_2}{h}(b_2 - b_1) - \frac{(b_2 - b_1)}{h} \rho \right] \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \left[b_2 + \frac{R_2}{h}(b_2 - b_1) \right] \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_2 - b_1), \end{aligned}$$

再將 $\int_F \frac{dF}{\rho}$ 代入式(23-5)即得:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h}{\left[b_2 + \frac{R_2}{h}(b_2 - b_1) \right] \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_2 - b_1)}, \quad (23-14)$$

其中 b_1 及 b_2 分別為梯形上下底寬度, h 為梯形高度, R_1 及 R_2 分別為上下底纖維的曲率半徑。

在式(23-14)中, 令 $b_1 = 0$, $b_2 = b$ 即可得到如图 23-9 所示三角形截面 r 值的計算公式:

$$r = \frac{\frac{1}{2}bh}{\left[b + \frac{R_2 b}{h} \right] \ln \frac{R_2}{R_1} - b} = \frac{h}{2 \left[\frac{R_2}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right]}, \quad (23-15)$$

其中 b 為三角形的底邊長度, h 為三角形的高度, R_1 和 R_2 則分別為三角形頂點和底邊纖維的曲率半徑。

(4) 圓形截面 在图 23-10 所示的圓形截面中, 取

$$dF = b(\rho) d\rho.$$

若以 φ 角為變數, 則得

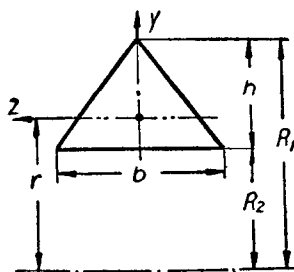


图 23-9

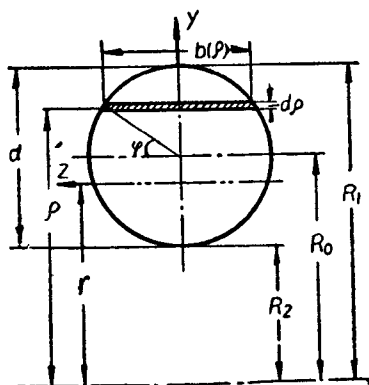


图 23-10

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi, \quad d\rho = \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi, \quad b(\rho) = d \cdot \cos \varphi;$$

代入积分式 $\int_F \frac{dF}{\rho}$, 并对 φ 进行积分, 即得

$$\begin{aligned} \int_F \frac{dF}{\rho} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{(R_0 + \frac{d}{2} \cdot \sin \varphi)} = d^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{2R_0 + d \cdot \sin \varphi} \\ &= \pi [2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}], \end{aligned} \quad (23-16)$$

代入式(23-5)得:

$$\begin{aligned} r &= \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} = \frac{\frac{\pi}{4} d^3}{\pi [2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}]} \\ &= \frac{d^3}{8R_0 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2R_0} \right)^2} \right]}, \end{aligned} \quad (23-17)$$

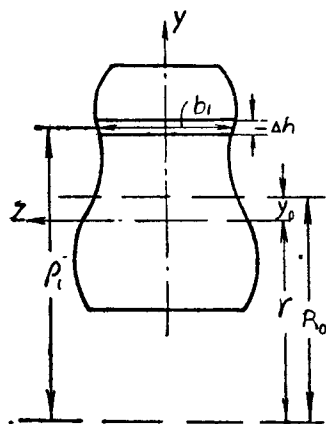


图 23-11

其中 d 为圆截面的直径, R_0 为截面形心联线的曲率半径。

(5) 具有垂直对称轴的任意图形
对于图 23-11 所示的具有垂直对称轴的任意图形, 可以利用近似法计算其中性层的曲率半径 r 。

首先将截面分为 n 个与中性轴平行且高度均等于 Δh 的窄长条, 各窄长条的平均宽度 b_i 和平均宽度处纤维的曲率半径 ρ_i 则可由图上直接量出。将公式(23-5)中的积分式改写为总和式, 即得

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta F_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_i}{\rho_i}} = \frac{\Delta h \sum_{i=1}^n b_i}{\Delta h \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\rho_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\rho_i}} \quad (23-18)$$

显然, 窄长条分割得愈细, 所得到的结果也就愈精确。

既知曲杆中性层的曲率半径 r , 可由下式来计算截面形心到中性轴的距离 y_0 :

$$y_0 = R_0 - r, \quad (23-19)$$

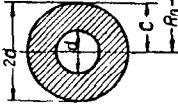
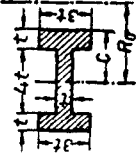
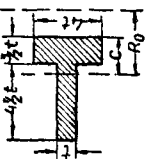
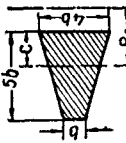
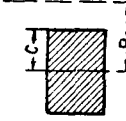
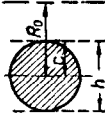
然后, 即可按下式计算曲杆横截面面积对中性轴的静矩 S , 得

$$S = F \cdot y_0 = F(R_0 - r). \quad (23-20)$$

为了计算方便起见, 已将几种常用截面在各种 $\frac{R_0}{C}$ 比值下的 $\frac{y_0}{R_0}$ 数值算出列在表 23.1 中^①。只要知道曲杆横截面形心联线(轴线)的曲率半

① 本表系节录自别辽耶夫著“材料力学”中译本 678—679 页表 29。

表 23-1 几种常用截面的 $\frac{y_0}{R_0}$ 值

截面形状	$\frac{y_0}{R_0}$	$\frac{y_0}{R_0}$	$\frac{y_0}{R_0}$	$\frac{y_0}{R_0}$	$\frac{y_0}{R_0}$	$\frac{y_0}{R_0}$
						
						
						
						
						
						
R_0/c						
1.2	0.224	0.305	0.352	0.418	0.408	0.269
1.4	0.151	0.204	0.243	0.299	0.285	0.182
1.6	0.108	0.149	0.179	0.229	0.208	0.134
1.8	0.084	0.112	0.138	0.183	0.160	0.104
2.0	0.069	0.090	0.110	0.149	0.127	0.083
2.2	0.058	0.077	0.092	0.125	0.104	0.068
2.4	0.049	0.065	0.078	0.106	0.088	0.057
2.6	0.042	0.055	0.067	0.091	0.077	0.049
2.8	0.036	0.047	0.058	0.079	0.067	0.043
3.0	0.030	0.041	0.050	0.069	0.058	0.038
3.5	0.022	0.028	0.037	0.052	0.041	0.028
4.0	0.016	0.021	0.028	0.040	0.030	0.020
6.0	0.0070	0.0093	0.012	0.018	0.013	0.0087
8.0	0.0039	0.0052	0.0060	0.010	0.0078	0.0049
10.0	0.0025	0.0033	0.0039	0.0065	0.0048	0.0031