中央财经大学重点系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

综合类

ZONGHELEI

陈文灯 主编

经济类 管理类 综合类

中国财政经济出版社

中央财经大学重点系列教材

线　性　代　数

陈文灯　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈文灯主编．－北京：中国财政经济出版社，1998.4

中央财经大学重点系列教材

ISBN 7-5005-3584-8

Ⅰ．线… Ⅱ．陈… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材

Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第04151号

中国财政经济出版社出版

社址：北京东城大佛寺东街8号　　邮政编码：100010

北京兴谷印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168毫米　32开　7印张　163 000字

1998年7月第1版　　1998年7月北京第1次印刷

印数：1－5 300　定价：10.00元

ISBN 7－5005－3584－8/H・0053

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书是根据1989年10月国家教委审定的《经济数学基础教学大纲》编写的适用于高等学校财经类专业使用的教材，是《经济数学基础》的第二册。

本书主要内容：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。每章后配备一定数量的习题，习题分（A）、（B）类。（A）类为计算、证明题；（B）类为填空、选择题。考虑到不少学生“考研”的需要，习题中也选入一些难度较大的题。本书力争做到对基本概念，基本正理论的叙述规范、通俗易懂、言简意赅；对推理论证，严密、思路清晰、脉络清楚。既达到培养学生的收敛性思维又达到培养发散性、创造性思维。

参加本书编写的有陈文灯（任主编，编写第四章），佟吉森（任副主编，编写第一、二章）、王守桢（任副主编，编写第三、五章）。

衷心感谢，葛渭高教授对本书所提的宝贵意见。

由于经验和水平所限，本书定有不当和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1998年4月

序

为全面贯彻落实《中国教育改革和发展纲要》，适应我国社会主义市场经济发展的需要，根据国家教委《“九五”期间普通高等学校教材建设与改革的意见》的精神，我校组织了本校有优势和特色的学科（专业）教材的规划工作，并决定编写、出版《中央财经大学重点系列教材》。

中央财经大学是我国财政部直属的一所面向全国的以经济学科和管理学科为主的大学，拥有一批在财政税收、金融保险、会计学、经济管理、经济信息、法律等学科享有盛誉的专家、学者。编写、出版《中央财经大学重点系列教材》是我校面向21世纪，顺应学科重大调整和素质型人才培养目标而采取的重要教育改革措施之一。编者有较丰富的教学经验和较高的学术造诣，力求使教材能够反映该学科的基本理论体系，反映当代国内外经济科学发展水平，紧密结合改革实践，处于学科学术前沿，富有创新精神。该重点系列教材分为经济、管理、综合三大类，将在几年内陆续出版。

《中央财经大学重点系列教材》主要供我校各相关专业使用，也欢迎兄弟院校和社会各界选用。

《线性代数》作为综合类教材之一，已经校教材编审委员会审定，书中如有不妥，请读者指正。

中央财经大学教材编审委员会

1998年2月

目　　录

第一章　行　列　式

§1.1　排列与逆序数

行列式是研究线性方程组的一个重要工具。线性方程组是线性代数的一个重要部分。为了给出 n 阶行列式的概念，需要先介绍排列与逆序数。

定义 1.1　由 n 个数码 1,2,…,n 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列。

例如　123，312 各是一个 3 级排列，属于 $i_1\, i_2\, i_3$ 中的一种。4213，4132，…，各是一个 4 级排列，属于 $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$ 中的一个。这里的排列就是初等数学中所说的排列。所以由数码 1,2,…，n 所组成的不同的 n 级排列共有 n! 个，由 $i_1\, i_2 \cdots i_n$ 来表达。

由数码 1,2,3 组成的所有 3 级排列共有 3! ＝6 个，它们是 123、132、213、231、312、321。值得注意的是在这 6 个 3 级排列中仅有 123 是按从小到大的自然顺序排列的，其余都有较大的数码排在较小数码的前面。

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1\, i_2 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$ 中如果有较大的数码 i_k 排在较小的数码 i_j 的前面（$i_k > i_j$），则称 i_k 与 i_j 构成了一个逆序，记作 $i_k i_j$。一个 n 级排列中逆序的总数叫做这排列的逆序数，记作 $\tau\,(i_1\, i_2 \cdots i_n)$。

逆序数为奇数的排列叫奇排列，逆序数为偶数的排列叫偶排列。

在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_j 与 i_k 对调，得到另一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_j \cdots i_n$ 的变换叫做一个对换。相邻两数码的对换叫做相邻对换。

定理 1.1 一个 n 级排列中任意两数码的对换，改变原排列的奇偶性。

证明 先证相邻对换的情形。

设排列为 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 对换 i_j 与 i_k，变为 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_k i_j i_{k+1} \cdots i_n$，显然 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1}$；$i_{k+1} \cdots i_n$ 这些数码的逆序数经过对换并不改变，而 i_j、i_k 两数码的逆序数改变为：当 $i_j < i_k$ 时，经对换后 i_j 的逆序增加 1 而 i_k 的逆序不变；当 $i_j > i_k$ 时，经过对换后 i_j 的逆序不变而 i_k 的逆序减少 1，所以排列 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 与 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_k i_j i_{k+1} \cdots i_n$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列为 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j i_{j+1} \cdots i_{j+m} i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 其中 i_j、i_k 为任意两数码，先把 i_k 作 m 次相邻对换调成 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j i_k i_{j+1} \cdots i_{j+m} i_{k+1} \cdots i_n$，再将 i_j 做 $m+1$ 次相邻对换调成 $i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_k i_{j+1} \cdots i_{j+m} i_j i_{k+1} \cdots i_n$，完成这样的对换总共经过 $2m+1$ 次相邻对换，因此两排列的奇偶性相反。

证毕

定理 1.2 在所有的 n 级排列中 $(n \geqslant 2)$，奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明 设在 n! 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个。

对这 p 个奇排列施以同一个对换 (i_j, i_k)，则由上述定理 1.1 可知 p 个奇排列全部都变为偶排列，于是得到 p 个偶排列，由于偶排列共有 q 个，所以 $p \leqslant q$；同理如果将全部偶排列也都

施以同一个对换 (i_j, i_k)，则 q 个偶排列全部都变成了奇排列，于是又有 $q \leqslant p$，所以 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等。

由于 n 级排列共有 n！个，所以 $p+q=2p=2q=n!$

所以 $p=q=\frac{n!}{2}$ 证毕

§1.2 n 阶行列式的定义

通过对二元、三元线性方程组解法的研究，可得出二阶、三阶行列式的概念，这就是用左边的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

表示的一个代数式，叫二阶行列式。它是由 2^2 个元素组成的二行二列共 2! 项的代数和，各项是取自不同行、不同列的二个元素的乘积，当各项元素的第一个下角标按自然顺序排列后第二个下角标排列的逆序数是偶数时该项取正号，是奇数时取负号。用左边的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

表示的一个代数式，叫三阶行列式。它是由 3^2 个元素组成的三行三列共 3！项的代数和，各项是取自不同行不同列的三个元素的乘积。各项的正负号由 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶数来确定。

在对二、三阶行列式作全面系统研究后，不难给出 n 阶行列

式的定义。

定义 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

等号左边由 n 行 n 列的 n^2 个元素所构成的数表称为 n 阶行列式。它表示等号右边的 n! 项代数和，每一项是取自左边数表中不同行不同列的 n 个元素的乘积，该项符号当各元素的行下标按自然次序排列后，列下标组成的排列为偶排列时取“+”号，奇排列时取“-”号。

当 n=1 时 $|a|=a$ 是由一个 a 构成的一阶行列式。应与绝对值区别。

例 1　计算对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　据定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例 2　计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　据定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{\tau(1\ 2 \cdots n)} a_{11} a_{12} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

§1.3　行列式的性质

行列式的阶数 $n \geqslant 4$ 时，用定义计算是很麻烦的事。为了尽快计算出较高阶的行列式，需要研究其性质。

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记作 D'（或 D^T）即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{则 } D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当然　行列式 D 也是行列式 D′的转置行列式。

性质一　行列式 D 与其转置行列式 D′相等。即 D＝D′

证明　记 D 的转置行列式 D′

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

D′中第 i 行 j 列的元素 b_{ij} 应是 D 中第 j 行第 i 列的元素 a_{ji} 即 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i,\ j=1,2,\cdots,n)$，据行列式定义：

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= D \end{aligned}$$

证毕

性质二　互换行列式的两行（或列）行列式变号

证明　据 n 阶行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（i 行）

（k 行）

$$= \sum_{(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{iji}\cdots a_{iji}\cdots a_{njn}\cdots a_{kjk}$$

互换 i、k 两行后得

$$D_{(k,i)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (k\text{ 行}) \\ (i\text{ 行}) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \sum_{(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$= -D$（即 $D(k, i) = -D$）　　证毕

推论 1　如果行列式有两行（或列）完全相同，则此行列式为零。

这是因为互换相同的两行后有 $D=-D$，故 $D=0$

性质三　行列式中某行（或列）的公因子，可以提到行列式的前面。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　左边 $= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$= k \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_2}\cdots a_{nj_n}$

$=$ 右边　　　　证毕

这个性质等同于：用数 k 乘行列式的某一行（或列）的所有

元素，等于用数 k 乘此行列式。

如果 $k=0$，可得如下推论

推论 2　行列式中有一行（或列）的元素全为零，则行列式的值为零。

由性质三、推论一可得下面推论

推论 3　行列式中有两行（或列）的元素成比例，则其值为零

性质四　行列式中某行（或列）的元素都是两元素之和，则此行列式可以写成两行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　左边 $= \sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

= 右边　　证毕

性质五　将行列式某行（或列）各元素 k 倍后加到另一行

（或列）对应元素上，行列式值不变。即

$$
\begin{array}{cc}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ \times k \quad (j\text{ 行}) \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{cc}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

其中“$\times K$”表示某行乘以数 k 加到箭头所指的行上。

证明　由性质四及推论 3 得：

$$
\text{右边} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0
$$

＝左边　　证毕

利用行列式的性质，将行列式化成特殊形式的行列式（对角形行列式、下、上三角形行列式等）是计算行列式的基本方法之一。

例 1　计算 4 阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \times(-1)\times(3)
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \times(5)\times(-3)\times(-10)
$$