中等专业学校推荐試用教材

工业类专业通用

三 角

SANJIUE

（修訂本）

人民教育出版社

简装本說明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。特此說明。

中等专业学校推荐試用教材
工业类专业适用

三　　角

（修訂本）

中等专业学校数学教材編写組編

人民教育出版社出版 [illegible]
（北京市书刊出版业营业许可证出字第 2 号）
商务印书館上海厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一书号 10010·90　开本 787×1092 1/32　印张 [illegible]
字数 123,000　印数 [illegible]—[illegible],000　定价(9) ¥0.84
1960 年 7 月第 1 版　1961 年 3 月第 2 版(修訂本)
1961 年 6 月上海第 [illegible] 次印刷

序

这一套中等专业学校(工业性质专业)試用数学教材，是根据当前教学改革的精神，結合目前阶段初中数学基础逐步过渡的具体情况而編写的。在課程的內容和体系上力求革除旧有数学教材中脫离实际、分散孤立、繁瑣重复、陈旧落后的现象，本着理論結合实际、以函数为綱、数形結合、概念与計算統一的原則作了新的安排，并力求反映当前社会主义建設大跃进形势和現代科学技术的要求。

原平面解析几何中的直綫、二次曲綫，与代数中的一次函数、二次函数以及二次方程、方程組等內容結合起来，連同冪函数、指数函数、对数函数和三角函数构成一个比較完整的初等函数体系。

在代数中，增添了諾模图、排列、組合、二項式定理、概率、行列式、极坐标等基础数学知識，以适应学习高等数学和生产实际中的需要。

由于中等专业学校某些基础技术課、专业課以及代数在教学上較早地需要三角函数的知識，因而三角仍单独印为一本，便于与代数平行讲授，但仍然以函数为綱，与代数紧密配合，构成一个有机整体，在代数里学过有关函数的基本概念与正比例函数后，即充分利用几何图形引入三角函数概念，这样为全面地研究直綫方程提供了方便。关于三角函数基本性质的研究与图象的討論安排在最后一章，以便在代数中学过对数函数之后讲授，可以通过这一章的学习，系統而完整地认識基本初等函数的性质。

考虑到目前过渡阶段的具体情况，有关几何基本知識在破除欧几里德系統、删去繁瑣陈旧部分的原则下，作了如下安排：“比例綫段与相似形”附列在三角教材的后面，需要讲授时可在三角之前

讲授;有关正多边形的边长和面积計算等問題并入解三角形中,可灵活取舍。

立体几何以繪制图形与图形性质的研究为中心，增加了繪制空間簡单几何体的直观图的基本知識，密切配合制图課的教学。如果可能,最好与制图課合并讲授。

为了适应学习专业的需要和为今后进一步掌握現代科学技术所需的数学知識打好基础，在高等数学中比过去增加了一些新的內容,如級数、微分方程、二元函数微分法、重积分、綫积分等,以扩大知識的应用领域，从而达到它的工具性的目的。在叙述过程中都貫穿着既有适当的分析,又有足够的直观性,同时加强了基本概念,便于学生掌握計算方法。

为了照顾不同专业的需要,本书編写时取材的面比較广泛,因此对教材中的某些內容,以及标有 * 号的章节,讲授时可根据具体情况,考虑精简或删除。

由于时間仓促，且限于編者的认識水平和业务水平，謬誤之处,在所难免,希各地教师、讀者予以指正。

中等专业学校数学教材編写組

1960 年 6 月

目　　录

第一章　角与弧及其度量

§1.1 任意大小的角与弧

以前我們把从一点引出的两条射綫所組成的图形叫做角。这个定义，在很多实际和理論問題上都感到不便，需要用一个新的定义来代替它。

我們来观察旋轉的輪子上的某一輻条。当輪子静止时，假定这一輻条的位置是 OA（图1–1）；輪子轉动时，在某一时刻，这一輻条的位置是 OB，这时 $\angle AOB$ 虽然仍旧可以看作是由具有共同端点的两条射綫 OA 和 OB 所組成的图形，但 OA 和 OB 却必須分别被看作旋轉射綫的开始位置和終止位置，才能很好地反映出輪子的实际运动。而且这一射綫可以繞端点 O 作任何旋轉，从开始位置 OA 到任何一个时刻的終止位置 OB，都可組成不同的角。因此，今后我們将把角看成是一条射綫在平面內环繞着它的端点旋轉所形成的。旋轉射綫的开始位置叫做角的始边，旋轉射綫的終止位置叫做角的終边。

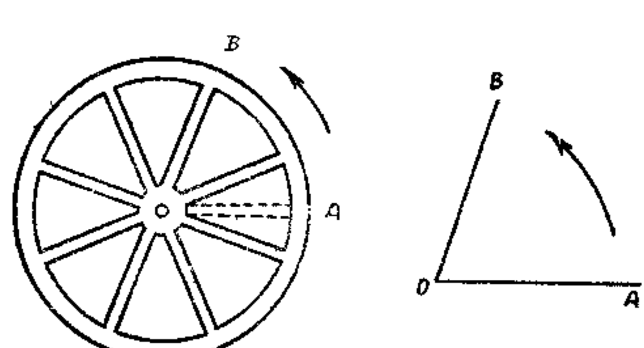

图　1–1

虽然，始边和終边构成了角的几何图形，但考虑角的大小时，不能只根据几何图形，还必須知道角是怎样形成的，即必須知道射綫繞端点旋轉的方向和周数。不难从图 1-2 中看出：角可以大于一个平角或一个周角；也可大于或等于几个周角；或者是零（即射綫沒有作任何旋轉，仍留在开始的位置）；同时，由于射綫可以从不同的方向以不同的周数繞端点旋轉，可見具有相同几何图形的角却可以不相等。

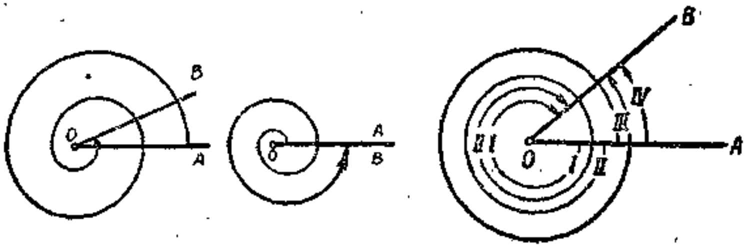

图 1-2

我們規定：当角是由射綫繞着端点按反时針方向旋轉而形成的时候，就説这角是正的；反过来，角就是負的。例如：相互銜接的两个具有同样半徑的齿輪，彼此旋轉的方向是相反的（图 1-3）；在旋轉时，其中一个旋轉某一个角，另一个也旋轉同样的角，但一个为正而另一个为負。

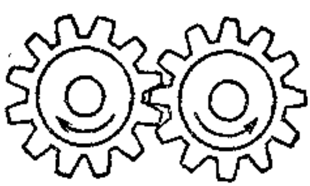

图 1-3

因此，正角的大小就用正数表示，負角的大小就用負数表示。由于射綫繞端点旋轉时，可以組成任意大小的角（正的、負的、零和含有任意周数的），所以角可以用任意的实数来表示。

与角 α 具有共同始边和終边的角，它們可以有正的或負的方向和任意的周数，因此这样的角有无穷多个。这无穷多个角的一般形式可以写成：

$$k \cdot 360° + \alpha$$

其中 k 为任何整数[①]，即：具有相同始边和終边的角，它們可能相差 360° 的整倍数。

以前我們把圓周上两点間的部分叫做弧。并且指出圓心角和它所对的弧的量数相同而与半徑的大小无关。根据上述角的定义，我們来研究弧的新的定义。

我們仍旧来观察旋轉的輪子，选取某一輻条上的某一点 M，当輪子旋轉时，M 随着这一輻条划出一段弧 $\overset{\frown}{MM'}$（图 1-4）。在旋轉过程中的任何一个时刻，对应着輻条所組成的角就有一定的弧 $\overset{\frown}{MM'}$。因此，我們把弧看作是射綫上的一点 M（不与端点重合），随着射綫旋轉所經历的路徑（軌迹）。显然，对应于每个不同終边位置的角，都有确定的弧 $\overset{\frown}{MM'}$。

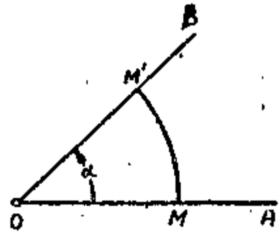

图 1-4

我們同样规定：当 M 点按反时針方向旋轉时，M 点所划出的弧为正；反过来，M 点所划出的弧为負。这样，对应于正角或負角的弧与角具有相同的符号。因此，弧也可以用与所对应的圓心角的相同的量数表示。

§1.2 角与弧的度量方法——弧度法

我們知道，对任何的"量"，都可以根据量的特性和我們的需要与应用上的方便，选擇一定的同类量作为度量单位来量它的大小，并且用数来表示度量的結果。因此在度量角与弧时，也可以有各种不同的度量单位。

我們已經学过角与弧的一种度量单位，就是取等于一个整圓周的 $\frac{1}{360}$ 的弧叫做一度的弧，它所对的圓心角叫做一度的角，把

① 今后表示角的一般形式时，不再交代"k 为任何整数"。

它們作为度量单位去度量其他的弧与角。有时为了更精确的度量，还可以把一度的 $\frac{1}{60}$ 叫做一分，或再把一分的 $\frac{1}{60}$ 叫做一秒，去度量弧与角，"分"和"秒"是更精确的度量单位。

在工程技术中，常常取一周作为弧和角的度量单位，例如：齿輪，发电机的轉子，飞机的螺旋桨等旋轉，通常是用周数来量的。

在炮术里，取一整圓周的 $\frac{1}{60}$ 的弧所对的圓心角叫做一大密位的角，作为角的度量单位（一大密位的 $\frac{1}{100}$ 叫一小密位）。

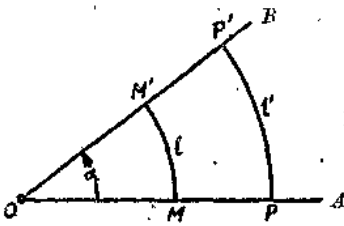

图 1-5

在高等数学和許多科学研究与应用中，常采用角和弧的另一种度量单位，下面我們来介紹这种新的单位。

作任意一个正角 α（图 1-5），在角 α 的始边 OA 上任取一点 M，并設 $OM=R$；作角 α 时，点 M 运动而形成弧 $\widehat{MM'}$，設 $\widehat{MM'}$ 的长度（与 R 的单位相同）为 l，当点 M 在 OA 上取不同位置时，从几何里知道，比值 $\frac{l}{R}$ 仅决定于 α 的大小，与半徑的长短无关。这就說明了，当角 α 一定时，不管角 α 所对圓弧的长度是多少，弧长与半徑之比总是一个常量，当角的大小改变时，这个比也改变。因此，我們可以用圓心角所对弧长与半徑之比的比值来表示角的大小，用这个比来表示角的大小的方法叫做弧度法。

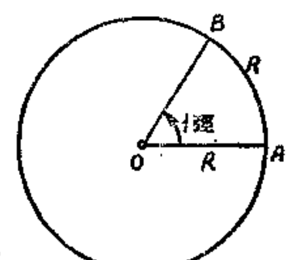

图 1-6

弧的长度等于半徑时，这一比值为1，我們便把与半徑等长的弧叫做一弧度的弧，作为弧的度量单位，把与半徑等长的弧（卽一弧度的弧）所对的圓心角，叫做一弧度的角（图 1-6），作为角的度量单位。一弧度簡称

一弳。

一个角所对弧长 l 中所含半徑 R 的倍数，是这弧的弳数，同时也就是用一弳的角去度量这个角时，所得的角的弳数。因此求一个角或弧的弳数时，可以通过下面的式子計算出来：

$$\boxed{\alpha(\text{弳})=\frac{l}{R}} \tag{I}$$

§1.3 角或弧的度与弳的換算

同一个角或弧，用不同的度量单位"度"和"弳"去度量时，所得的量数是不相同的。有时，須要把已知角的度数(或弳数)換算为此角的弳数(或度数)，因此，必須掌握它們之間換算的一般法則。

我們很容易找出某些特殊角的度数与弳数之間的关系：因为一个周角是360°，而一个周角的弳数是 $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$，所以

$$360°=2\pi\ \text{弳}。$$

随之就可以得出下列的表：

$n°$	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	…
α 弳	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	…

利用上面特殊角的度数与弳数的关系，可以导出一般的換算法則。

因为

$$180°=\pi\ \text{弳}。$$

所以

$$1°=\frac{\pi}{180}\ \text{弳}\approx0.0174533\ \text{弳}；$$

$$1\ \text{弳}=\frac{180°}{\pi}\approx57°.295764\approx57°17'44''.8。$$

由此，得出换算的一般法则如下①：

(1) 把已知度数为 n° 的角化为用弳来表示，只须把 n 乘上 $\frac{\pi}{180}$ 弳(或 0.0174533弳)。

(2) 把已知弳数为 A 的角化为用度来表示，只须把 A 乘上 $\frac{180^\circ}{\pi}$。

为了使用方便，我們規定：用弳表示角的大小时，可以略去"弳"字。也就是說，遇到一个角沒有附上单位时，那末它就是以"弳"为单位。

下面用例子說明这些法則和規定的应用。

例 1．把 $67^\circ30'$ 化为弳。

$$67^\circ30'=67^\circ\!.5=\frac{\pi}{180}\times67\frac{1}{2}=\frac{135\pi}{360}=\frac{3\pi}{8}。$$

例 2．化 2 弳为度(准确到 0.1°)。

$$2\approx2\times57^\circ\!.3\approx114^\circ\!.6(准确到\ 0.1^\circ)。$$

在实际应用中，我們可以从布拉基斯四位数学用表(表 XVI)直接查出換算的結果而不須进行繁瑣的計算。表中列出每隔1′的角所对应的弳数，它們都准确到 0.00005，同样，也可由表中所列的弳数查出它所对应的度数和分数，它們准确到 1′(以后，如沒有指出結果准确度的要求时，就是按四位表的准确度)，它的查法与平方表等的查法类似。

---

① 在某些特殊工作中(例如測量工作)，須要將很小的角度进行单位換算，可得：

$$1'=\frac{1^\circ}{60}\approx0.000290882\ 弳；$$

$$1''=\frac{1'}{60}\approx0.00000484813\ 弳；$$

$$1\ 弳=\frac{180}{\pi}\times60'\approx3437'.74677；$$

$$1\ 弳=\frac{180}{\pi}\times60\times60''\approx206264''.806。$$

例 3. 化 $223^\circ16'$ 为弳。

$$223^\circ16'=2\times90^\circ+43^\circ16',$$

查表

A	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$		$1'$	$2'$	$3'$
43°	——	——	——→	↓ 0.7557	——		↓ 6	
90°	1.5708							

得 $$223^\circ16'=2\times1.5708+(0.7557-0.0006)$$
$$=3.8967。$$

例 4. 化 2.9534 为度。

$$2.9534=1.5708+1.3826,$$

查表

A	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$		$1'$	$2'$	$3'$
79°	←——	——	↑ 1.3823	——	——	↑ 3		

得 $$2.9534=90^\circ+(79^\circ12'+1')=169^\circ13'。$$

在§1.1中得出的与角 α 具有共同始边和終边的角，当角 α 用弳为单位时，可以用下式表示：

$$2k\pi+\alpha。$$

为了能熟练地使用角的弳制，今后，将多用弳为单位来表示角。但由于实际需要和查表的方便，度制单位仍然要采用，讀者必須熟悉这两种不同单位的关系。

§1.4 圓弧长

知道圓的半徑 R 和一段弧(或所对圓心角)的弳数 α，可以計算这段弧的长 l。因为由§1.2公式(I)

$$\alpha=\frac{l}{R},$$

可得：

$$\boxed{l=R\cdot\alpha} \tag{II}$$

即：圓弧长等于它的弳数与半徑的乘积。

若弧或所对圓心角为 $n°$，则

$$n°=\frac{\pi}{180}\times n\ (\text{弳}),$$

得

$$l=\frac{n\pi R}{180}。 \tag{III}$$

一段圓弧和通过它的端点的两个半徑所圍成的图形叫做扇形（图 1-7）。我們可以計算扇形的周界和面积。

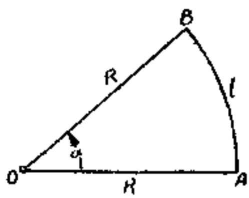

图 1-7

如果扇形 AOB 的周界用 $P_{\text{扇形}AOB}$ 表示，那末

$$P_{\text{扇形}AOB}=2R+R\alpha。$$

关于扇形 AOB 的面积 $S_{\text{扇形}AOB}$，可利用下面方法推出：

$$\frac{S_{\text{扇形}AOB}}{S_{\text{圓}}}=\frac{\alpha}{2\pi},$$

这里 $S_{\text{圓}}$ 是对应圓的面积。所以

$$S_{\text{扇形}AOB}=\frac{\alpha}{2\pi}\times\pi R^2,$$

即：

$$S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}R^2\alpha \tag{IV}$$

或

$$S_{\text{扇形}AOB}=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{1}{2}R\cdot R\alpha,$$

即：

$$\boxed{S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}Rl} \tag{V}$$

所以，扇形的面积等于扇形的弧长与半徑乘积的一半。

例 1. 有一种活塞銷的鎖环如图 1-8 所示，直徑为 26 毫米，环成 340° 的角，問制造时需用多长的鋼絲(准确到 1 毫米)。

解 $l=R\alpha=13\times\frac{\pi}{180}\times340$。粗略估计 $10<l<100$，故取 $\pi\approx3.14$，即

$$l\approx13\times\frac{3.14}{180}\times340\approx77\text{ 毫米}。$$

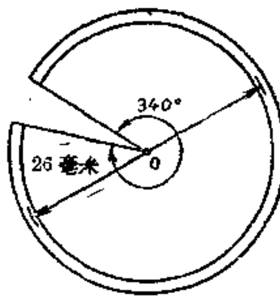

图 1-8

例 2. 在車床上被加工的物体上的任意一个质点 m 由静止开始作匀速圓周运动，如图1-9所示。設圓半徑为 20 厘米，质点 m 在一秒钟內由 A 点运动到 A_1 的位置，經过的圆弧长为 200 厘米。求：

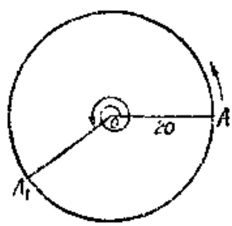

图 1-9

(1) 一秒钟內质点 m 所經过的圓心角 α；

(2) 质点 m 运动一周所需要的时間 T；

(3) 质点 m 在单位时間內所經历的周数 f。

解 設弧长为 l，半徑为 R，圓心角为 α。

(1) 由公式 $$l=R\alpha,$$

所以 $$\alpha=\frac{l}{R}。$$

已知 $$l=200\text{ 厘米},\ R=20\text{ 厘米},$$

所以 $$\alpha=\frac{200}{20}=10\ (\text{弧})。$$

(2) $$T=\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{2\pi}{10}\approx0.63(\text{秒})。$$

(3) $$f=\frac{1}{T}\approx\frac{1}{0.63}\approx1.6(\text{周})。$$

第一章 习題

1. 若下列各角有相同的始边，判别哪些角有相同的終边：

$105°$； $-75°$； $405°$； $-615°$； $285°$。

2. 当时钟上指出 3 点、6 点和 8 点的时候，把时針作角的始边，写出分針与时針所成角的一般形式。

3. 把下列各角的度数化为弳：

(1) $2°$； (2) $5°$； (3) $22°.5$； (4) $60°$； (5) $270°$； (6) $320°$。

4. 把下列各角的弳数化为度：

(1) $\frac{2\pi}{3}$； (2) $\frac{3\pi}{5}$； (3) $\frac{\pi}{8}$；

(4) $\frac{\pi}{15}$； (5) 2.5； (6) $\frac{3}{2}$。

5. 用表化下列各角为弳：

(1) $126°$； (2) $279°12'$； (3) $118°43'$；

(4) $168°15'$； (5) $56°16'$； (6) $472°53'$。

6. 用表化下列各角的弳数为度：

(1) 0.4800； (2) 0.6510； (3) 1.2700；

(4) 1.5983； (5) 3.0099； (6) 2.6400。

7. 齿輪有 40 个齿，若它旋轉了：(1) 30 个齿；(2) 40 个齿；(3) 200 个齿。把齿輪旋轉的角度用弳表示。

8. 分别以度数和弳数表示等边三角形、等腰直角三角形的各角。

9. 航海罗盘将圆周分成 32 等分，把一份用度数和弳数表示出来。

10. 鉄路路軌在轉弯处弯成一圆弧，它的半徑为 0.5 公里，一列車在轉弯处以每小时 72 公里的速度行駛，問 10 秒钟列車轉过几度？

11. 已知长 56 厘米的圆弧，其量度是 210°，求这弧所在圆的半徑。

12. 汽輪机的軸每分钟旋轉 12000 次，求这軸在一秒钟內所經历的圆心角 α（弳）。

13. 电动机上的轉子在一秒钟內所經历的圆心角为 100π 弳，問轉子每分钟旋轉多少周？

14. 設飞輪的直徑为 1.2 米，每分钟旋轉 300 次，求：

(1) 飞輪每秒钟所經历的圆心角 α；

(2) 飞輪圆周上一点每秒钟所經历的圆弧长；

(3) 旋轉一周需几秒钟？

15. 一輪在一秒钟內，所轉过的角为 $\frac{5}{18}$ 弳，問 40 秒钟內所旋轉角度的大小以及在此时間內輪上与軸心相距 18 厘米的点旋轉所經的路程。

第二章　三角函数

§2.1 三角函数的定义

当射綫在平面內繞端点旋轉形成角时，为了方便，我們选取端点为直角坐标系的原点，选取始边作为 Ox 軸的正方向，那末，对于任何一个已知角 α，都可以从原点引一条射綫 OP，使从 Ox 軸正向繞原点旋轉至 OP 所成的角等于已知角 α（图 2-1）；显然，以 Ox 軸正向为始边，OP 为終边的角，可以有无穷多个，它們和角 α 只能相差 2π 的整倍数，即具有 $2k\pi+\alpha$ 的形式。

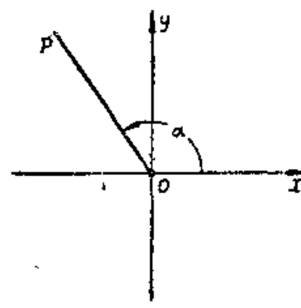

图　2-1

始边为 Ox 軸正向，終边为 OP 的角，簡称为"从 Ox 到 OP 的角"。

当角 α 的終边 OP 位置在 Ox 軸上时，α 的值等于 $k\pi$，終边 OP 位置在 Oy 軸上时，α 的值等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$。終边位置在某一象限內，就称它为"第几象限的角"。

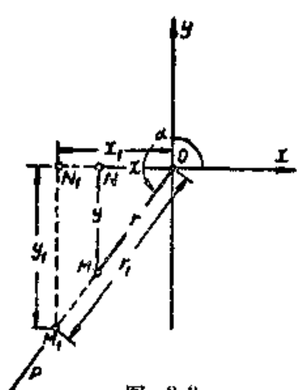

图　2-2

設点 $M(x, y)$ 是在角 α 的終边 OP 上不和 O 点重合的一点，OM 的长度为 $r\,(r>0)$，对于 x, y 和 r 中每两个量之比，有下面的定理：

定理　对于一已知角 α，比值 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$ 仅决定于角 α 的大小，而与所取点 M 的位置无关。