

初中毕业生之友

CHU ZHONG
BI YE SHENG
ZHI YOU



数学复习指导

数学复习指导

陈貽泽 主 编
杨炳炎 胡曙初 张相君
周继军 王国生 编

湖南教育出版社

初中毕业生之友

封面设计：刘 群

G633.6
130

数 学 复 习 指 导

陈貽泽 主编

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版

（原湖南人民出版社出版）

湖南省新华书店发行 贵州铜仁地区印刷厂印刷

1981年3月第1版 1982年8月第3次印刷

字数：230,000 印张：11.25 印数：1,167,201—1,297,200

统一书号：7284·30 定价：0.82元

出 版 说 明

我国古代教育家孔丘说：“温故而知新”，讲的是复习的重要性。为了帮助初中同学更好地复习所学知识，我们编辑了一套复习指导丛书，第一批书目计有语文、英语、数学、物理、化学等五个分册，供大家选择使用。

复习功课还要指导吗？要的，因为许多同学复习很不得法。有的复习抓不住重点，眉毛胡子一把抓，时间花了不少，效果却不显著；有的复习缺乏系统性，东一耙子西一扫帚，杂乱无章。我们编辑的这套复习指导，就是针对初中一些同学复习中常见的缺点毛病，给予必要的提示和建议，使大家少走弯路。在复习内容上，每本书都根据学科的不同，列有重点，难点。为吃透重点，排除难点，书中提供了大量的复习资料，但各有侧重，当略则略，当详则详，详略得当，要言不烦。在复习方法上，每本书都根据初中同学在学习过程中常出现的问题、易犯的错误，有的放矢地加强了某些基础知识和基本技能的训练，并且相应地提出了一些复习建议，供大家复习时参考。是故，名之为“指导”，以示与一般复习资料的不同。

目 录

绪 论	为进行数学总复习向同学们进一言	(1)
-----	-----------------	-------

代 数

第一章	实 数	(12)
第二章	代数式	(21)
第三章	方 程	(56)
第四章	不等式	(105)
第五章	函 数	(120)
第六章	指数和对数	(137)
第七章	统计初步	(153)

平 面 几 何

第一章	基本概念	(163)
第二章	三角形	(177)
第三章	四边形	(195)
第四章	相似形	(211)
第五章	圆	(229)
第六章	面 积	(252)
第七章	轨迹与作图	(265)
第八章	视 图	(274)

三 角

第一章	三角函数	(296)
第二章	解三角形	(306)

平 面 解 析 几 何

第一章	直角坐标系	(318)
第二章	直 线	(325)
第三章	圆	(341)

绪 论 为进行数学总复习，向同学们进一言

怎样才能复习好数学，这是同学们很关心的问题。而且在进入全面总复习的过程中，都会感到课程多、时间紧、任务重，很想找到复习的窍门，在较短的时间里，将所学得的知识进行全面的温习、巩固和熟练地进行运用。但这种愿望怎样才能实现呢？这是要与同学们共同探讨的。

首先要明确复习数学不同于初学数学，而是在已学过的基础上，在老师的指导下，对基础知识进行归纳总结，相互串通，系统巩固，便于掌握，促进提高，能够灵活运用所学得的数学知识解决有一定难度和综合性的问题，以适应今后从事生产、工作或继续深造的需要。下面提出一些看法，供同学们参考。

一、既要有远大理想，又要脚踏实地

同学们在党和国家的亲切关怀下，被看成是初升的太阳，未来的栋梁。在我们的祖国建设成为四个现代化的社会主义强国的时候，同学们正是风华正茂，在各个工作岗位上纵横驰骋，进行创造性的劳动。可以预期，同学们那时的创造性劳动，都将会闪耀着珍珠般的光辉，为祖国增添崇高的荣誉，为人类作出巨大的贡献。这就是党和人民对同学们的殷切期望，

也是同学们应该有的理想。理想，是前进的动力。只有树立了远大的理想，才能激发无穷无尽的学习积极性。人贵自觉，只有自觉地刻苦钻研，才能持之以恒，永远进取，把自己锻炼成建设“四化”的有用之材。大家知道，实现四个现代化的关键，在于实现科学技术现代化，而科学技术现代化，处处离不开数学。数学已渗透到各个科学领域。不管你今后学习什么学科或从事什么工作，你都将要用到数学。数学是各种科学的基础学科，也是实现科学技术现代化的基础。数学的用处可谓大矣！广矣！因此学好数学是我们献身“四化”必须具备的条件之一。

二、追本溯源，弄清概念的实质

数学中的概念很多，也很重要，它是数学基础知识的基石。数学中的定理、公式、法则等，都是从基本概念发源而逐步推演出来的。因此弄清概念的实质，是复习好数学的重要环节。

例如，“算术根”的概念，它的实质是什么呢？算术根的定义是：正数的正的方根叫做算术根。根据定义，首先要理解到它是正数的方根，同时这个方根又是正数，并且联想到负数的奇次方根是负数，负数的偶次方根没有实数意义，就是说，被开方数是正数时，才可能有正的方根。所以算术根的实质就在于“正的方根”。理解到这一点，对于 $a > 0$ 时，规定 $\sqrt[n]{a}$ (n 是大于1的整数)为 a 的 n 次算术根，就不会模糊不清，也不会出现“ $\sqrt{81} = \pm 9$ ”或者“81的平方根等于9”这样的错误了。

再以复习有理指数幂这部分知识来说，它是正整数指数和根式意义的延伸，并且用定义的方式把指数的概念由正整数指

数扩展到有理数指数的范围。统一了幂指数和根指数在形式上的划分。即把开方形式、乘方形式、零指数、负指数、分数指数全部统一于有理指数的概念内，把正整数指数幂的七个运算性质归纳为有理指数幂的三个性质：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^p b^q)^n = a^{np} b^{nq}$$

这里 m 、 n 、 p 、 q 为任何有理数。

因此，我们只要抓住正负整数指数、零指数、分数指数这些基本概念的实质和它们之间的差异，并且理解到正整数指数幂的运算法则适用于有理指数幂的运算，就不但会透彻理解指数这一部分的基础知识和运算规律，而且还可以为解指数方程提供有利条件，进一步明确各种指数幂的底数的范围必须大于零而不等于 1 的道理。这样，也就为学习对数的概念和指数函数、对数函数的概念打下了良好的基础。

三、纵横联想，系统地掌握数学知识

数学的第一大特点是系统性特别强，突出地表现在它的命题系统和建立命题系统的推理过程中。这就决定了数学的命题不仅有一定的顺序，彼此之间有一定的联系，而且紧密地结合成一个整体。从公式的推导，定理的证明，以至具体计算的方法，都要经过数学的推理才能完成。数学的推理一般是从已知的条件出发，根据定义、公理、定理，推出所要求的结论。每一个步骤都要有可靠的依据。所以数学的推理是数学这门科学的灵魂，抓住它，就抓住了数学的系统性、科学性。因此，我们

必须在原来学习的基础上,上好复习课,在老师的指导下,进行系统总结。事实上,掌握数学系统性的过程,也就是深刻认识数学和运用数学的过程。例如:复习好一元二次方程的有关知识(解法、判别式、根与系数的关系等)和二元一次方程组的解法,就是为复习好二元二次方程组和三元二次方程组的解法打好基础;复习好有关三角形和四边形的知识,就是为复习好有关圆和多边形的知识打好基础;要想学好解析几何,首先必须具备代数、三角、平面几何的知识等等。例如,在复习全等三角形时,我们又怎样进行联想呢?首先,应明确全等三角形的定义,接着提出全等三角形的三个公理,把这三个公理统一起来认识:每个公理都有三个元素(其中至少有一条边)对应相等,根据每一个公理的条件作成三角形,其形状和大小都是唯一确定的(这还可以用剪纸叠合法来证明),可见这些公理的关键性内容,就是每个公理的条件都能唯一确定三角形的形状和大小。既然三角形的形状和大小被确定了,那么其它的元素如三条高、三条中线、三角的平分线、内切圆的半径、外接圆的半径等也都被确定了,因而归纳出全等三角形的对应元素相等。同时,由全等三角形的公理可以直接推出两个直角三角形全等的三个定理、三角形的面积公式、等腰、等边三角形的性质定理和判定定理以及三角形的边角不等的关系等等。再联想到三角函数定义以及由此建立的三角形边角关系式(直角三角形的边角关系和斜三角形的边角关系——正弦定理、余弦定理),从而得出解直角三角形和解斜三角形的理论根据。但直角三角形或任意三角形可解的条件必须满足于能够唯一确定三角形的大小和形状

这个前提,这个前提就是三角形全等公理成立的条件的反映.至于已知两边及其中一边的对角的三角形的形状和大小就不是唯一确定的.弄清了这一点,对于要解此三角形必须进行讨论,其结论可能有一解或二解或无解的情况,也就不会有什么疑难了.把知识如此的串通起来,系统化起来,就会感到数学易学、易记.

四、数形结合,把感性认识上升到理论认识

数学的第二大特点是具有高度的抽象性.因为高度的抽象性也就带来了数学应用的广泛性.一个公式,一个定理,常以抽象的形式出现.但它们首先是由很多具体内容的共性,经过概括和提炼而总结出来的.例如二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是从千万种具体事物里列出来的二次方程的共性中抽象出来的,反过来,它又可适用于解答物理、化学、农业、工业等各方面的问題.所以由具体到抽象、由特殊到一般、由感性到理性的认识过程,是使我们的认识逐步提高、逐步深化的过程.又如,最简二次函数 $y=ax^2$,同学们都能从图象上说出它的一切性质,但仅停留在图象上的认识是不够的.应该追问是什么理论产生这些性质的?事实上,因为 $x^2 \geq 0$,当 $x=0$ 时,图象过原点,当 $x \neq 0$ 时, y 与 a 总是同号,以及 y 与 x^2 又成正比例,当 x 取两个相反的实数值时, y 只得一个值,明确了这些,我们就很容易从理论上来阐述抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向、无限伸展以及对称轴等的性质了.这样揭示问题的本质对我们掌握基础知识和提高思维能力都会收到很好的效果.以此为基础,再研究较复杂的

二次函数 $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 的性质时，就

不难知其所以然了，其关键性内容还是在于 y 值的集合决定于 a 值的集合。

关于二次不等式的解法，课本上是利用二次函数的图象来讨论的。事实上，当我们把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 化为

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \times$$

$\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ 以后，对于二次不等式，不妨设 $a > 0$ ，我们

要决定 y 值的符号，即决定 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ，这时不等式的解集是什么？关键就在于判别式 $b^2 - 4ac$ 的值的符号了。这样把图形上得到的感性知识再结合抽象的解析式来认识，就会使我们对知识的理解更加深刻。因此，我们不仅要善于从具体的事物中抽象出共同的数学知识，而且还要善于运用抽象的数学知识来解决具体问题。例如，我们要加快实现四个现代化的步伐，必然要遇到如何才能多快好省的问题。这一类最简单的问题一般就归结为求一个函数的极大值或极小值的问题。我们求二次函数的极值是这类问题的起步。

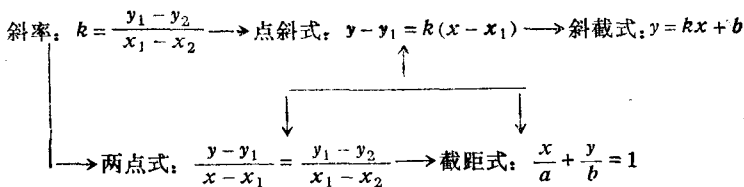
五、分清主次，抓住知识的核心

抓住知识的核心，就是抓住知识的重点。每一章、每一节或每一类知识都有它的重点。复习某一章，首先应对这一章的每一个问题，经过细嚼、慢咽，求得甚解，以后归纳总结，把全章各部分内容串连起来，加以融会贯通，从而弄清楚什么是

这一章的主要问题以及各个问题之间的联系。这样我们就能抓住统帅全章的核心内容。这个核心内容是这一章知识的枢纽，它能承前启后，联系较广。

在确定什么是核心内容时，可以由一般到具体，由全面到局部的过程来理解它。例如平面几何中相似形是一个重点，而在相似形中又以相似三角形为重点，在相似三角形中又以相似三角形的概念和三个判定定理为重点，在三个判定定理中又以第一个判定定理为核心。这样全面考虑，层层紧逼，也就是全面复习和巩固基础知识的过程。所谓抓重点，带全面，就是这个道理。

再以复习平面解析几何中直线方程的四种形式为例：首先要透彻理解直线斜率的意义和由两点坐标确定的直线斜率公式，接着由直线斜率公式导出点斜式，由点斜式导出斜截式和两点式，再由两点式导出截距式。事实上，后面的三种形式都可直接由点斜式导出。把它们之间的联系列成下表，更觉得简练，一目了然。



从表中可知，直线方程的四种形式是以点斜式为核心的。而斜率公式又是这核心的核心。这样既认识到知识之间的相互联系，又抓住了认识过程中的主要矛盾，其收效之大，不待言矣！

六、多想多练，总结解题方法

数学的第三大特点是：它是一门最讲究方法的科学。在学习数学理论的过程中，会学到各种各样的数学方法。当我们运用数学理论解决具体问题时，常常表现为运用一定的数学方法来解决。掌握数学理论和数学方法就成为我们解决数学问题的重要依据。因此，通过多想多练，总结解题方法，是提高复习质量的重要步骤。例如，在平面几何里，认真总结用圆规直尺作图的方法，是我们画出正确的几何图形和解决几何问题的重要一步。

就我们解决问题的思维过程而言，特别要深刻理解和熟练运用下面两种方法。

一是分析法：

分析法是从问题的结论出发，一步一步地探索下去，最后得出命题的已知条件。它的特点是从“未知”看“需知”，逐渐靠拢“已知”。我们把这种思维过程简称为“执果索因”。例如：

已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，求证 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

分析：

要证 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

只要证 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2$

只要证 $ab + ac + bc = 0$

只要证 $\frac{ab + ac + bc}{abc} = 0$

只要证 $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 0$

但最后这个等式是已知的，而且上述每一个步骤都是可逆的，故反推上去，可推得等式：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ 成立.}$$

二是综合法：

综合法是从已知条件出发，经过一步一步地逻辑推理，最后得到所要求的结论。它的特点是从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”。我们把这种思维过程简称为“由因导果”。例如 已知四边形四边之长为 a 、 b 、 c 、 d ，并且满足等式 $a^4 + b^4 = 4abcd - c^4 - d^4$ ，求证 这四边形是菱形。

证明 $\because$ 已知

$$a^4 + b^4 = 4abcd - c^4 - d^4$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0$$

$$\therefore a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + c^4 + d^4 - 2c^2d^2 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd = 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{又 } (a^2 - b^2)^2 \geq 0, \quad (c^2 - d^2)^2 \geq 0, \quad 2(ab - cd)^2 \geq 0,$$

但由(1)可知，只能有 $a^2 - b^2 = 0$, $c^2 - d^2 = 0$, $ab - cd = 0$ ，从而 $a^2 = b^2$, $c^2 = d^2$, $ab = cd$. (2)

又 a 、 b 、 c 、 d 都是正数， $\therefore a = b$, $c = d$.

把 $a = b$, $c = d$ 代入(2)，得 $b^2 = c^2$ ，即 $b = c$.

$\therefore a = b = c = d$ ，故 四边形为菱形。

综上所述，分析法和综合法都是探求和研究事物因果关系的两种不同的方法，其思维过程的方向恰恰相反，各具特色。分析法的思维过程比较自然，容易找到解题的途径；综合法的

叙述形式比较简单，条理清晰，令人一目了然。解决较复杂的问题时，常常采取两法兼而用之。首先用分析法探求解题途径，然后用综合法叙述解题过程。

分析法和综合法都是应用已知条件和已知定理等作为依据而从正面直接证明命题的结论。这种由已知条件、定理等直接推断命题为真的方法，叫做直接证法。

有些命题用直接证法比较困难或者根本缺乏直接证明的依据，这时应用间接证法比较适宜：间接证法有反证法和同一法两种，而反证法又分归谬法和穷举法两种，这里就不再详述。

七、综合运用，提高解题本领

解答数学题，是我们学好数学的一个重要步骤。复习时，也是这样。在掌握基础知识的前提下多做一点复习题，很有必要。题目的类型，大体可归纳为三类：第一类是巩固和加深理解基本概念和基础知识的题目；第二类是基本运算和一般的综合性的题目；第三类是综合性较强的题目。同学们可根据自己学习的情况有所侧重。学习能力较强的同学，把基本内容搞清楚以后，可多做一些综合性较强的题目。每个同学对每一个题目都要严肃对待，仔细观察，反复思考，认真分析，进行逻辑推理，直到正确解答出来。解答过程，叙理要求周密，论证要求严谨，运算要求无误，书写要求整洁。对于某些题目，不要一了解了事，最好还能灵活运用知识求得多种解法，以开思路。要做到：不仅能够运用常规方法解题，而且能根据具体问题的特点用适应性的特殊方法解题。这就更需要我们独立思考，培养高度的观察能力，以适应题目的千变万化。把掌握的知识转

化为解题的技能和熟练的技巧，并要经常总结解题方法，积累解题经验。例如：已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c ，求它的三条中线之长。此题用平面几何知识当然可解，但用三角方法比较简捷。

又例如：已知方程 $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a+c)x + b^2 + c^2 = 0$ 中的 a, b, c, x 均为实数，求证： b 是 a, c 的比例中项，并证明 $x = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 。

此题不仅能根据一元二次方程的根所具有的一般性质（判别式 $\Delta \geq 0$ ）——矛盾的普遍性来解，而且还可以根据方程的特殊情况——矛盾的特殊性来解。如把方程化成 $(ax-b)^2 + (bx-c)^2 = 0$ 求解，则比前者更为简易。由此可见，对待具体问题进行具体分析，经常探索一题多解的方法，也是提高解题本领的重要途径之一。

八、总结经验教训，不断前进

同学们在复习时，应回忆和总结一下，哪些知识内容学得深，学得透，哪些内容还学得不够深透；哪些内容易懂，哪些内容感到困难；从老师的启发中学到了哪些好的学习方法，自己又创造了哪些好的学习方法；积累了多少解题经验，有哪些教训；平日的作业是偶尔发生错误还是经常发生错误，特别要追查发生错误的原因，是基本概念没有弄清，还是基础知识没有掌握；是计算的方法问题，还是粗心大意的问题。每个人产生的错误有多有少，其原因各有所异，理解知识的程度也不尽相同。在进入总复习的时刻，自己应摸摸自己的底，做到心中有数，根据自己掌握知识的情况进行查漏补缺，有所重又有所轻，做到有的放矢，使自己的复习真有所得。