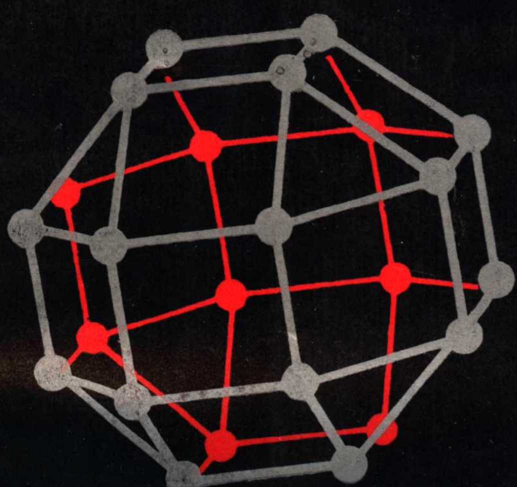
有限元法与边界元法

YOUXIANYUNFA
YU BIANJIEYUNFA

李瑞遐 编著



上海科技教育出版社

有限元法与边界元法

李瑞遐

上海科技教育出版社

(沪)新登字 116 号

有限元法与边界元法
李 瑞 遐
上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路 393 号)
各地新华书店经销 江苏太仓印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 219000
1993年10月第 1 版 1993年11月第 1 次印刷
印数 1—2,000
ISBN 7-5428-0725-0
N·3

定价：6.45元

内 容 提 要

本书系统地介绍了有限元法和边界元法的基本理论、方法和程序设计技巧。全书共分七章：加权剩余法，泊松方程的有限元法，弹性应力分析，插值与等参元，有限元程序设计技巧，板、壳问题，边界元法。作者在统一的理论基础上把这些内容有机地结合起来。

本书可作为高等学校应用数学、工程力学以及机械、土木、航空、造船等工程专业的教学参考书，又可供工程技术人员使用，能提高他们编写计算机程序，解决工程中实际问题的能力。

序　言

有限元法和边界元法是在工程技术中有着广泛应用的数值方法，也是求微分方程数值解的重要方法。早在四十年代柯朗就已经提出了有限元法的基本思想，只是到了六十年代由于计算机的广泛应用才使有限元法得到迅速发展和推广应用。当时人们曾预见在计算机的配合下有限元法将使固体力学计算问题得到实际解决，后来的实践证实了这个看法。在经典积分方程和有限元基础上发展起来的边界元法克服了有限元法中的某些缺点。通过边界积分方程，边界元法使问题的维数降低了一维，因此，与有限元法相比较，边界元法的一个明显的优点是方程组的阶数低，所需要准备的初始数据少。另外，边界元法既能处理有界区域问题，也能处理无界区域问题，但通常要求材料是均匀的。而有限元法一般要求区域是有界的，但材料可以是非均匀的，这两种方法是相辅相成的，它们的组合有着广泛的应用。

全书包括三方面的内容：加权剩余法、有限元法、边界元法。作者在统一的理论基础上把这三方面的内容有机地结合起来，分别用变分原理和伽辽金法推导有限元方程，在处理边界积分方程时作者采用了配置法，从而将有限元法和边界元法统一在加权剩余法之中。在内容的处理上，先介绍方法，再介绍函数插值，并用插值法构造各种单元，因而对方法有一个整体的认识。书中还详细介绍了变节点等参元的构造方法，轴对称应力问题的单元分析以及有限元程序设计技巧，其中有一部分是作者的研究成果和实践经验的总结。

在过去十多年中，国内出版了一些关于有限元法的书，但对边界元法的研究起步较晚，还没有像有限元法那样广泛应用到工程

问题中去。由于这两种方法具有不少共同点，因此把它们放在同一本书中介绍，并说明它们都是加权剩余法的特殊情况，以便使读者能掌握这两种方法的实质。

本书可以作为高等学校应用数学、计算数学、工程力学以及机械、土木、航空、造船等工程专业有关课程的教学参考书，又可供工程技术人员使用。

在本书的写作和出版过程中得到上海技术师范学院领导和上海科技教育出版社同志的热情支持和帮助，上海技术师范学院陈启明副教授提出了许多有益的建议，上海交通大学张圣坤教授热忱指导，对本书提出了十分宝贵的意见，没有他们的关心和支持本书是不可能与读者见面的，特在此向他们表示衷心的感谢。

李瑞遐

一九九一年六月

目　录

第一章　加权剩余法

§1　加权剩余法

工程中大量的实际问题往往可以归结为求解带有一定边界条件的微分方程，一般可将它写为

$$Au=f \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.1}$$

其中A是微分算子，u是未知函数，f是独立于u的已知函数，Ω是区域。例如，对于二维泊松(Poisson)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$$

相应的微分算子是

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

解微分方程（1.1），通常要有一定的边界条件，边界条件也可写成一般的形式

$$S(u)=p \qquad \text{在}\Gamma\text{上} \tag{1.2}$$

其中S是某个算子，p也独立于u，Γ是区域Ω的边界。

设$\{\varphi_j\}$是某函数空间的一个完备的函数列，并且其中任何n个函数是线性无关的，称φ_j是基函数。假设

$$\tilde{u}=\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j \tag{1.3}$$

是问题(1.1)、(1.2)的一个近似解，通常$\tilde{u}$不会使(1.1)和(1.2)式同时满足，事实上只能要求$\tilde{u}$满足部分边界条件或只满足微分方程。如果$\tilde{u}$不满足微分方程，将$\tilde{u}$代入(1.1)式就产生剩余

$$\varepsilon=A\tilde{u}-f \tag{1.4}$$

如果 $\tilde{u}$ 不满足边界条件，将 $\tilde{u}$ 代入(1.2)式也产生一个剩余

$$\varepsilon_1 = S(u) - p \tag{1.5}$$

为简单起见，可先假设 $\tilde{u}$ 满足边界条件而不满足微分方程，于是 $\varepsilon_1 = 0$，$\varepsilon \neq 0$。现在要求剩余 ε 的加权积分为零，即要求

$$\int_\Omega \varepsilon\psi_i d\Omega = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.6}$$

其中 ψ_i 称为权函数，它们也是线性无关的。(1.6) 式是关于 α_1，α_2，…，α_n 为未知数的方程组，解出方程组就得到问题(1.1)、(1.2)的一个近似解 $\tilde{u}$，这种求近似解的方法称为加权剩余法。

如果微分算子 A 是线性的，即

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

其中 α、β 是数，u、v 是函数，则(1.6)式是线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \psi_i A\varphi_j d\Omega \cdot \alpha_j = \int_\Omega f\psi_i d\Omega, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

在实际中，可以取各种不同形式的权函数，于是就得到各种特殊的加权剩余法。

§ 2　加权剩余法的几种特殊情况

本节介绍几种常见的特殊的加权剩余法，伽辽金(Galerkin)法、矩法、配置法和子区域法。

2.1　伽辽金法

如果在 (1.6) 式中取 φ_i 为权函数，即令

$$\int_\Omega \varepsilon\varphi_i d\Omega = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.7}$$

这就是伽辽金法。若 A 是线性算子，则方程组(1.7)为

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \varphi_i A\varphi_j d\Omega \cdot \alpha_j = \int_\Omega f\varphi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.8}$$

如果 A 是对称算子，即

$$\int_{\Omega}\varphi_i A\varphi_j d\Omega = \int_{\Omega}\varphi_j A\varphi_i d\Omega$$

则线性方程组(1.8)的系数矩阵是对称矩阵。

2.2 矩法

对于一维情况，若取x^i作为权函数，即令

$$\int_{\Omega}\varepsilon x^i dx = 0, \quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \tag{1.9}$$

这种特殊的加权剩余法称为矩法。二维问题矩法中的权函数是$x^i y^j$（i，$j=0$，1，…，$n-1$）。

2.3 配置法

前面所述的加权剩余法是令剩余ε的加权积分为零，从而确定出待定系数a_j。现在令剩余ε在区域Ω内n个不同的点$M_1,\cdots,M_n$上为零，即令

$$\varepsilon(M_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.10}$$

也就是说，只要求函数$\tilde{u}$在这n个点上满足微分方程(1.1)，从(1.10)式解出a_1，a_2，…，a_n，从而得到问题(1.1)、(1.2)的一个近似解$\tilde{u}$，这种方法称为配置法，$M_1,\cdots,M_n$称为配置点。

设$\delta(M,M_i)$是在点M_i的δ-函数，即

$$\delta(M,M_i)=0,\ M\neq M_i,\ M\in\Omega$$

$$\int_{\Omega}\delta(M,M_i)d\Omega=1$$

于是有

$$\int_{\Omega}\varepsilon\delta(M,M_i)d\Omega=\varepsilon(M_i)$$

从而(1.10)式相当于

$$\int_{\Omega}\varepsilon\delta(M,\ M_i)d\Omega=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.11}$$

因此，配置法也是加权剩余法的一种特殊情况，它以在配置点的δ-函数为权函数。

2.4 子区域法

如果要求剩余ε在Ω的n个不同的子区域Ω_1，Ω_2，…，Ω_n上的积分等于零，即令

$$\int_{\Omega_i} \varepsilon d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.12}$$

该方法称为子区域法。若记

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & \text{在}\Omega_i\text{上} \\ 0, & \text{在}\Omega\setminus\Omega_i\text{上} \end{cases} \tag{1.13}$$

则有

$$\int_{\Omega} \varepsilon\psi_i d\Omega = \int_{\Omega_i} \varepsilon d\Omega = 0$$

从而子区域法也是一种特殊的加权剩余法，它以（1.13）式的函数为权函数。

权函数的选取是多种多样的，从而也就得到加权剩余法的许多特殊情况，这里不再列举。

例 1 求常微分方程边值问题

$$u'' + u + x = 0, \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

的近似解。

解 先用伽辽金法。设第一次近似解为

$$u_G^{(1)} = \alpha x(1 - x)$$

其满足边界条件，将其代入微分方程，产生剩余

$$\varepsilon^{(1)} = \alpha(-2 + x - x^2) + x$$

由

$$\int_0^1 \varepsilon^{(1)} x(1 - x) dx = 0$$

得到

$$-\frac{3}{10}\alpha + \frac{1}{12} = 0$$

$$\alpha = \frac{5}{18}$$

于是第一次近似解为

$$n_G^{(1)}=\frac{5}{18}x(1-x)$$

设第二次近似解为

$$u_G^{(2)}=x(1-x)(\alpha_1+\alpha_2 x)$$

它满足边界条件，将其代入微分方程，产生剩余

$$\varepsilon^{(2)}=(-2+x-x^2)\alpha_1+(2-6x+x^2-x^3)\alpha_2+x$$

由

$$\begin{cases}\int_0^1\varepsilon^{(2)}x(1-x)dx=0\\ \int_0^1\varepsilon^{(2)}x^2(1-x)dx=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-\frac{3}{10}\alpha_1-\frac{3}{20}\alpha_2+\frac{1}{12}=0\\ -\frac{3}{20}\alpha_1-\frac{13}{105}\alpha_2+\frac{1}{20}=0\end{cases}$$

此方程组的解是

$$\alpha_1=\frac{71}{369},\qquad \alpha_2=\frac{63}{369}$$

从而第二次近似解为

$$u_G^{(2)}=x(1-x)\left(\frac{71+63x}{369}\right)$$

其次，用子区域法求原微分方程的近似解。设第一次近似解为

$$u_S^{(1)}=\alpha x(1-x)$$

取[0,1]为积分区间，有

$$\int_0^1\varepsilon^{(1)}dx=-\frac{11}{6}\alpha+\frac{1}{2}=0$$

$$\alpha=\frac{3}{11}$$

于是，用子区域法得到的第一次近似解为

$$u_S^{(1)}=\frac{3}{11}x(1-x)$$

设第二次近似解为

$$u_S^{(2)}=x(1-x)(\alpha_1+\alpha_2 x)$$

分别取$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$[0,1]$为积分区间，由

$$\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{(2)}dx=0\\ \int_0^1\varepsilon^{(2)}dx=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-\frac{11}{12}\alpha_1+\frac{53}{192}\alpha_2+\frac{1}{8}=0\\ -\frac{11}{6}\alpha_1-\frac{11}{12}\alpha_2+\frac{1}{2}=0\end{cases}$$

此方程组的解是

$$\alpha_1=\frac{97}{517},\quad \alpha_2=\frac{88}{517}$$

从而由子区域法得到的第二次近似解为

$$u_S^{(2)}=x(1-x)\left(\frac{97+88x}{517}\right)$$

另一方面，原问题的精确解是

$$u=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

表1给出了近似解和精确解在0.25，0.5和0.75处的值，由表可知，用加权剩余法得到的近似解的精度是令人满意的。

例 2 考虑泊松方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p \quad 在\Omega内$$

带有边界条件

表 1

x	$u_G^{(1)}$	$u_G^{(2)}$	$u_S^{(1)}$	$u_S^{(2)}$	u
0.25	0.05208	0.04408	0.05114	0.04316	0.04401
0.5	0.06944	0.06944	0.06818	0.06818	0.06975
0.75	0.05208	0.06009	0.05114	0.05912	0.06006

$$\tilde{u}|_{\Gamma}=0$$

其中Ω是中心在坐标原点、边长为$2a$的正方形区域。用伽辽金法求其近似解。

解 取$\tilde{u}=\alpha(x^2-a^2)(y^2-a^2)$

作为近似解，显然$\tilde{u}$满足边界条件，将$\tilde{u}$代入微分方程，得到剩余

$$\varepsilon=\Delta\tilde{u}-p=2\alpha(x^2+y^2-2a^2)-p$$

令

$$\int_{\Omega}\varepsilon(x^2-a^2)(y^2-a^2)d\Omega=0$$

得到

$$\alpha=-\frac{5}{16}\frac{p}{a^2}$$

从而

$$\tilde{u}=-\frac{5}{16}\frac{p}{a^2}(x^2-a^2)(y^2-a^2)$$

在坐标原点，有

$$\tilde{u}(0,0)=-\frac{5}{16}a^2p=-30.4\frac{a^2p}{\pi^4}$$

另一方面，原问题的精确解在原点的值为

$$u(0,\ 0)=-29.4\frac{a^2p}{\pi^4}$$

近似值$\tilde{u}(0,\ 0)$的相对误差仅为3%。

前面假设近似解$\tilde{u}$满足边界条件，现在将放松这个要求，即