



怎样用数量关系表 解应用题

陈志恬 编

广东教育出版社

怎样用数量关系表解应用题

陈志恬 编

广东教育出版社

怎样用数量关系表解应用题

陈志恬 编

•

广东教育出版社出版发行

广东省新华书店经销

花城印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 2.625印张 50,000字

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷

印数1—9,560册

ISBN 7-5406-0101-9/G·101

书号 7449·325 定价 0.60元

前 言

列方程解应用题是初中代数中的一个重要内容。它对培养学生分析问题、解决问题的能力有着重要的作用。

应用题的类型繁多，涉及的实际问题各异，初中代数中的应用题按实际问题可以分成许多种类型，而大多数类型的题目是有“共同规律”的。有共同规律，就应该有共同的分析方法。这本小册子介绍的用“数量关系表”分析题意列方程解应用题的方法，就是根据应用题的“共同规律”提出来的一种解应用题的通法。这种方法直观，目的明确，思路清楚，是解应用题的一种行之有效的方法。

科学技术的发展日新月异，电子计算机将很快进入人们生活的各个领域。利用电子计算机进行辅助教学已经成为现实。本书提出的解应用题的通法，也符合应用电子计算机进行辅助教学的需要。

在编写本书的过程中，中山大学的朱匀华老师、广东教育学院的陈婉琳老师都提出了宝贵的意见，在此表示感谢！书中不当之处，殷切希望读者指正。

编 者

目 录

一、解应用题与数量关系表·····	(1)
二、数量关系表的运用·····	(11)
三、一题多解的探讨·····	(45)
四、多线索的数量关系表·····	(54)
五、数量关系表的设计依据·····	(73)

一、解应用题与数量关系表

1. 解应用题

解应用题可以用算术解法，即四则运算解法，也可以用列方程的方法。先从实例谈起：

例1 买甲、乙两种笔记本共14本，用去2元。甲种本每本1角9分，乙种本每本8分，两种笔记本各买了多少本？

①算术解法

分析：按题中给出的条件，首先假设所买的笔记本14本都是乙种本，则应该花钱 (0.08×14) 元，这与实际所花的钱2元还差 $(2 - 0.08 \times 14)$ 元；其次，要使所花的钱数增加，笔记本的本数不变，就要用乙种本去换甲种本。因为每换一本就增加 $(0.19 - 0.08)$ 元，这样，甲种本的本数就转换成“换本子”的次数。由此可得甲种本的本数（即换本子的次数）为

$$(2 - 0.08 \times 14) \div (0.19 - 0.08) = 8(\text{本}), (1-1)$$

那么，乙种本的本数为

$$14 - 8 = 6(\text{本}).$$

②列方程解法

分析：题中给出的是购买两种不同的笔记本，每种笔记本都有基本关系

$$\text{总价} = \text{单价} \times \text{本数}. \quad (1-2)$$

购买两种笔记本还有等量关系

$$\text{甲种本数} + \text{乙种本数} = 14 \text{本}, \quad (1-3)$$

$$\text{甲种本总价} + \text{乙种本总价} = 2 \text{元}. \quad (1-4)$$

如果用字母 x 表示甲种本的本数，由等量关系(1-3)可知乙种本有 $(14-x)$ 本。由基本关系(1-2)可得购买甲种本和乙种本的总价分别是 $(0.19x)$ 元和 $0.08(14-x)$ 元。再由等量关系(1-4)，就可以列出方程

$$0.19x + 0.08(14-x) = 2. \quad (1-5)$$

解这个方程求得 x 的值即为甲种本的本数，再由表达式 $(14-x)$ 可以得到乙种本的本数。解题的格式如下：

解：设甲种本买了 x 本，则乙种本买了 $(14-x)$ 本。依题意可得方程

$$0.19x + 0.08(14-x) = 2.$$

解这个方程得

$$x = 8,$$

$$14 - x = 6.$$

答：买了甲种本8本，乙种本6本。

两种不同的分析方法得到相同的结果。

用算术方法解应用题，把列式子和求得数综合起来。它每列一个算式都要找出适当的理由说明它的意义，要经过一番思考，才能得到最后的算式 $(1-1)$ 。这个算式的结果就是所求的数。由于每个不同的题目，都必须用不同的理由去解释，因而用算术的方法解应用题显得繁杂，不好掌握。

用列方程的方法解应用题，把列方程和求得数分开。它只根据应用题的基本关系和等量关系，就可以直接列出方程(1-5)。方程列出之后，再按照解方程的一般方法求出方程的解，就是所求的结果。对任一道应用题，只要抓住基本关系

和等量关系就能列出方程。分析题意的过程也很有规律，较好掌握。

比较两种解题方法可见，列出方程（1—5）比列出算式（1—1）更直观方便。虽然列方程后还须解方程才能得到结果，但解方程有固定的方法，掌握了解方程的方法之后，这一步也就不觉得困难了。因此，列方程解应用题比用算术的方法解应用题优越。当然这种优越性只有在掌握了列方程解应用题的方法后才能慢慢地体会到。

本书将认为读者对于解方程的方法是熟练的，因而在以后的实例讨论中只分析题意、列出方程并直接给出结果，不讲求解方程的过程。

2. 数量关系表

应用题的题型多种多样，涉及的知识面很广，内容丰富多采。透过错综复杂的表面现象，抓住问题的实质，遵循一定的规律，用比较直观的方法分析应用题中的数量关系，准确地列出方程，是列方程解应用题的关键。这里向大家介绍一种思路清楚的分析方法——列表分析法，它把常见的应用题中的数量关系总结成一个表——数量关系表，把分析题意的过程转化为填写数量关系表的过程。表填好后，就能得到所要列的方程。下面再对例1进行分析，说明数量关系表的构造和使用。

分析：本例是购买甲、乙两种不同价格的笔记本。这类题目的基本关系是

$$\text{总价} = \text{单价} \times \text{本数}。 \quad (1-6)$$

总价、单价和本数称为基本数量。

设计一个表，用三行分别表示总价、单价和本数，即基本关系(1-6)中的三个量。用两列分别表示甲种本、乙种本的购买情况，然后把题意“翻译”到表中。题中给出甲种本和乙种本的单价分别是0.19元和0.08元，这两个数可直接填到表中“单价”一行的相应位置上。甲、乙两种笔记本各自的本数和总价都是未知的量，可简单地在表中用()表示。题中还给出了本数和总价的等量关系(1-3)和(1-4)，可分别填到表中本数和总价的两行，如表1-1。

表 1 - 1

	甲种本	乙种本
总 价	() + () = 2 元	
单 价	0.19元	0.08元
本 数	() + () = 14本	

表1-1称为等量关系表。它反映了题中的已知数与未知数的等量关系。表中每一行的量除了题中给出的已知数外，凡含有未知量的行一定存在等量关系，且一般都是和、差、倍、比或相等的关系(如本题均是和的关系)。如果表中有某一行的量或等量关系尚未找出，就要想办法按此行的量直接或间接地从题目中把它找出。

为了列出方程，可以把表1-1的关系表示成另一种形式。设甲种本买 x 本，则由本数的等量关系可得乙种本买 $(14-x)$ 本，利用基本关系(1-6)可得甲种本和乙种本的总价分别为 $(0.19x)$ 和 $0.08(14-x)$ 。这样表1-1中的三行两列共六个数就都可填出来了，如表1-2。

表 1 - 2

	甲种本	乙种本
总 价	$0.19x$	$0.08(14 - x)$
单 价	0.19	0.08
本 数	x	$14 - x$

表1-2称为基本数量表，它表示了题目中的基本数量。在选定了某一未知数用字母 x 表示以后，表1-2中除了题中给出的已知数外，其余的数均可以通过基本关系和等量关系写成 x 的表达式。一般来说，每一行中的两个量在知道一个以后，可以由等量关系得到另一个。每一列中的三个量在知道两个之后，可以由基本关系得到第三个。

基本数量表填好后，就可用“未使用过”的基本关系或等量关系列方程。在填写表1-2时，我们已经用了两种本子的基本关系和“本数”的等量关系，但未使用“总价”的等量关系。因此用“总价”的等量关系可列出方程

$$0.19x + 0.08(14 - x) = 2. \quad (1-9)$$

以上详细地叙述了构造等量关系表、基本数量表和列方程的经过。实际上，等量关系表可略去，数量关系表及方程可综合起来成一个表。如表1-3，

表 1 - 3

	甲种本	乙种本
总 价	$0.19x$	$0.08(14-x)$
单 价	0.19	0.08
本 数	x	$(14-x)$
方 程	$0.19x + 0.08(14-x) = 2$	

表1-3把题中所有的数量（已知量、未知量）以及它们之间的关系（方程）概括在一起，而且表中的行和列还包含了等量关系和基本关系。这个表就称为数量关系表。表中列的方向是基本关系式中的三个量，其中第一个量是第二、三两个量的乘积，这种关系称为积的关系或纵向关系；表中行的方向是题中出现的几种情况，它们通常是和、差、倍、比或相等的关系，这种关系称为等量关系或横向关系。表中的每一列或每一行都存在纵向关系或横向关系。这些关系有时是明显的，有时是不明显的。

填写数量关系表，就是先适当选取某一未知数用字母 x （或其它字母）表示，然后利用基本关系和等量关系把其余的未知量表示成含字母 x 的表达式，再用“未使用”的等量关系或基本关系列出方程。

这样一来，分析应用题的题意和列方程的过程就转换成填写数量关系表的过程。列方程所需要的量以及量与量之间的关系，都可以在填表过程中有目的地寻找。

填写数量关系表1-3时，我们引进了一个未知数 x ，列出了一个方程。有时，为了列方程的方便，还可以引进多个未

知数,用不同的字母表示,然后列出几个方程构成方程组.例如,对例1作如下分析:

设甲种本买 x 本,乙种本买 y 本.由基本关系式(1-6)可以得到两种本子的总价分别是 $0.19x$ 元和 $0.08y$ 元.利用“未使用”过的两个等量关系(1-3)和(1-4)得到两个方程(方程组).如表1-4.

表 1 - 4

	甲种本	乙种本
总 价	$0.19x$	$0.08y$
单 价	0.19	0.08
本 数	x	y
方程组	$\begin{cases} 0.19x + 0.08y = 2 \\ x + y = 14 \end{cases}$	

一般来说,方程的个数应与引进的未知数的个数相同(有时也有例外,但不属于本书讨论的范围).本题引进的未知数是两个,因此列出的方程也是两个,这两个方程构成了方程组:

$$\begin{cases} 0.19x + 0.08y = 2 \\ x + y = 14. \end{cases} \quad (1-10)$$

同样,由方程组的解可以得到题目要求的结果.

从上面的分析可以看到,列方程组(1-10)比列方程(1-9)更直观,但解方程组(1-10)比解方程(1-9)要麻烦一些.因此选用哪一种方法,可根据实际问题而定.

例 2 某幼儿园购买大、小凳子一批,共用去44元,大的

每张5元,小的每张2元,其中小凳子的张数比大凳子的张数多2倍,大、小凳子各买了多少张?

分析:本题是购买物件的问题,与例1是同种类型。一般来说,购物问题都有基本关系

$$\text{总价} = \text{单价} \times \text{件数}. \quad (1-11)$$

题目已知大、小凳子的单价分别是5元和2元,设大凳子买了 y 张,由等量关系“小凳子的张数比大凳子的张数多2倍”,得小凳子买了 $3y$ 张(甲比乙多2倍,即甲是乙的3倍)。由基本关系得大、小凳子的总价分别是 $5y$ 元和 $2 \times 3y$ 元。再由“未使用”的等量关系“共用去44元”列得方程。数量关系表如表1-5。

表 1 - 5

	大 凳 子	小 凳 子
总 价	$5y$	$2 \times 3y$
单 价	5	2
件 数	y	$3y$
方 程	$5y + 2 \times 3y = 44$	

解:设幼儿园买了大凳子 y 张,则小凳子买了 $3y$ 张。依题意列出方程为

$$5y + 6y = 44.$$

解这个方程得

$$y = 4,$$

$$3y = 12.$$

答:幼儿园买了4张大凳子和12张小凳子。

3. 解应用题的步骤

由前面的例题的分析过程可以归纳出解应用题的主要步骤如下：

(1) 从题中找出基本关系和等量关系，确定数量关系表的格式；

(2) 引进适当的未知数 x （或其他字母，也可以引进多个未知数），把已知数，未知数（包括含字母的表达式）填入数量关系表；

(3) 用“未使用”的等量关系或基本关系列出方程（或方程组）；

(4) 解方程（或方程组）；

(5) 检验所求的解是否符合题意。

必须指出，步骤中的第(5)步是必要的，虽然解题时不一定写出，但如果方程的解不符合题意就要舍去。

例3 买甲、乙两种笔记本共14本，用去3元。甲种本每本1角9分，乙种本每本8分。两种笔记本各买了多少本？

解：设甲种本买了 x 本，则乙种本买了 $(14-x)$ 本，依题意得方程

$$0.19x + 0.08(14 - x) = 3. \quad (1-11)$$

解这个方程得

$$x = 17\frac{1}{11}.$$

检验这个结果， $17\frac{1}{11}$ 虽然是(1-11)的解，但买笔记本只能买整数本，因此解不合题意，应舍去。

答：这样购买本子是不可能的。

根据题目列出方程后，还应该检查列出的方程是否正确。一个正确的方程应该满足如下三个条件：

(1) 方程两边的意义相同；

(2) 方程两边的单位一致；

(3) 方程两边的数量相等。

用这三个条件检查例1的方程(1-9)：

(1) 方程(1-9)两边都表示本子的总价，意义相同；

(2) 方程(1-9)两边都以“元”为单位(1角9分和8分已分别化为0.19元和0.08元)，单位一致；

(3) 方程(1-9)左边是购买笔记本的总价，右边是购买笔记本的款项，数量相等。

可见方程(1-9)是正确的。

检查列出的方程是否正确和检验方程的解是否符合题意是解应用题时必须考虑的。在以后的例题中，我们将不写出检查及检验的过程了，但你们自己解题时千万要记住做这两个步骤的工作。

在填写数量关系表时，一般可以不填上单位。但为了不把单位弄错，也可以填上单位。

二、数量关系表的运用

初中代数中的应用题，如按实际问题分类，常见的类型有：运动问题、工作量问题、混合物问题、购物问题、增长率问题等。如何使用数量关系表去分析这些应用题呢？下面，我们将通过大量的实例来说明。

1. 运动问题

这里只讨论具有基本关系

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间} \quad (2-1)$$

的运动问题。基本关系式(2-1)还可以写成

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} \text{ 或 } \text{时间} = \frac{\text{路程}}{\text{速度}} \quad (2-1)'$$

的形式。

对于不同的运动状况，等量关系也不相同。

(1) 甲、乙同时出发，同时到达，则有等量关系

$$\text{甲的时间} = \text{乙的时间} \quad (2-2)$$

(2) 甲、乙相向(或相背)而行，则有等量关系

$$\text{总路程} = \text{甲的路程} + \text{乙的路程} \quad (2-3)$$

(3) 甲、乙同向而行，则有等量关系

$$\text{路程差} = \text{甲的路程} - \text{乙的路程} \quad (2-4)$$

(假定甲的路程较长或甲的速度较快)。

(4) 船在河中运动

船在河中运动时有三种速度：一是船在静水中的速度(简称船速)，二是水流的速度(简称水速)，三是船在河中运动

的实际速度（简称实速）。三者之间有等量关系式：

$$\left. \begin{array}{l} \text{顺水时实速} = \text{船速} + \text{水速} \\ \text{逆水时实速} = \text{船速} - \text{水速} \end{array} \right\} . \quad (2-5)$$

运动问题的数量关系表有三行，分别是基本关系（2—1）中的路程、速度和时间三个量。列数由有多少种运动情况而定（一般都是有两种情况，因此有两列）。填表时可根据实际问题选择使用（2—2）~（2—5）这些等量关系或其它等量关系。

例1 甲、乙两车站相距360公里，一列快车和一列慢车同时分别从甲、乙两站出发，相向而行。快车每小时走72公里，慢车每小时走48公里，两车出发后几小时相遇？

分析：本题有快车的运动和慢车的运动两种运动情况。已知快车和慢车的速度分别是每小时72公里和48公里。设两车出发后 x 小时相遇。因两车“同时”出发，“同时”到达相遇地点，由等量关系（2—2）得快车和慢车所用的时间都是 x 小时。由基本关系（2—1）得快车和慢车走过的路程分别是 $72x$ 公里和 $48x$ 公里。最后由等量关系（2—3）列得方程。数量关系表如表2—1。

表2—1

	快 车	慢 车
路 程	$72x$	$48x$
速 度	72	48
时 间	x	x
方 程	$72x + 48x = 360$	