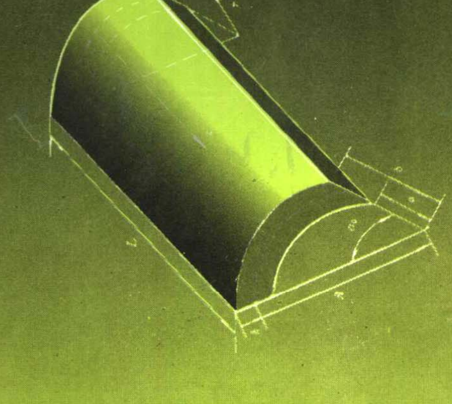
横观各向同性弹性力学

丁皓江　等著



浙江大学出版社

横观各向同性弹性力学

丁皓江等著

浙江大学出版社

内容简介

本书主要介绍横观各向同性和球面各向同性弹性力学的三维问题，内容包括：基本方程和通解，无限体、半无限体和两相材料组成的无限体的点力解，以及边界元法，接触问题和温度应力问题，三维板的振动问题，柱壳、球壳与流体和弹性介质的耦合振动。

本书可供高等学校力学、土木、机械和材料等专业教师、研究生以及有关的科研工作者参考。

横观各向同性弹性力学

丁皓江等著

责任编辑 贾吉柱

*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路20号　邮政编码310027）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

杭州金融管理干部学院印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*

787×1092　16开　15.5印张　397千字

1997年7月第1版　　1997年7月第1次印刷

印数0001—1000

ISBN 7-308-01940-3/O·213　　定价：16.00元

序

各向异性弹性力学的研究几乎与各向同性弹性力学同时起步。各向同性弹性力学的发展一直保持着迅猛的势头，但各向异性弹性力学，却因其数学上的复杂性，发展得时快时慢。特别是空间问题的研究，可以说是时续时断，并且大都限于横观各向同性体的问题。即使对于这一类特殊的各向异性体，长期以来也只求了球对称和轴对称问题的解。这些问题从力学上看是空间问题，但从数学上看其实是一维和二维问题。数学上属于三维问题的解直到本世纪 50 年代才求得一些。我对各向异性弹性力学一直有浓厚的兴趣，50 年代我曾付出一定精力研究各向异性弹性力学，得到了横观和球面各向同性弹性力学方程的通解，并得到了若干具体的三维问题的解，可惜后来因多种原因未能继续这方面的研究。

近年来丁皓江教授及其学生和同事在地球科学和新材料的推动下，集中相当大的精力研究了横观和球面各向同性弹性体的平衡、热应力、振动和稳定问题，在通解、具体问题的解以及为求数值解或近似解创造有利前提等方向都取得了可喜的重要进展，把这门学科推向一个新的水平。

我读完《横观各向同性弹性力学》这本专著的手稿后感到十分欣喜，特写几句以充代序。

胡海昌

1996 年 11 月

前　言

弹性力学是一门比较成熟的学科，各向异性弹性力学则由于数学上的困难，发展得并不充分。横观各向同性弹性力学无疑是各向异性弹性力学中最简单而实用的一个分支，虽然已有一些各向异性弹性力学的专著，但是都没有系统地来叙述横观各向同性弹性力学。由于有关的研究论文广泛地散布于各种刊物和文集中，彼此又缺乏统一的表述和有机的联系，给研究者和应用者带来不少困难。本书力图与弹性力学教材中的基本内容和基本方法相平行地来论述横观各向同性弹性力学，以利读者能顺利地了解横观各向同性弹性力学三维问题的有效解法和国内外有关的研究。为此，书中广泛地采用了通解与凑合解法相结合的简单解法，另外，状态空间解法也占有相当篇幅，书中还有一些有应用价值的内容和典型算例。

本书的主要内容反映了我们课题组近十年来，对横观各向同性弹性力学的研究工作，其中有些成果是最近刚刚得到的，同时也收集和反映了国内外诸多研究者的成就。胡海昌教授在横观各向同性弹性力学领域作出了突出的贡献，他的文章受到国内外学者的广泛注意和引用。我于 60 年代初开始各向异性弹性力学的研究工作，1986 年后结合培养研究生又开始系统地研究，都得到胡海昌教授的指导和鼓励，还得到了国家自然科学基金委员会的资助。

本书第一章和第二章由丁皓江教授执笔，第三章和第四章由梁剑副教授执笔，第五章和第六章由邹道勤副教授执笔，第七、八、九和十章由陈伟球博士执笔，最后由丁皓江统稿。本书可供土木、力学和材料等学科的教师和研究生以及有关的研究人员和工程技术人员作参考书。因时间仓促，水平有限，不足之处敬请专家和读者指正。

谨以此书献给浙江大学建校 100 周年。

浙江大学土木系
岩土工程研究所
丁皓江
1997.4

目　录

第一章　各向异性体弹性力学基本方程

本章是一个引论，在这里叙述弹性理论的基本原理和基本方程，这些方程都是以后各章及各向异性体弹性力学的特殊问题求解时，所必须遵守和有用的。我们主要的是叙述和列出公式，有关的证明和推导可以参看下列有关书籍：

Timoshenko 和 Goodier(1970), Sokolnikoff(1956), Love(1927), Green 和 Zema(1954), Lur'e(1964)，钱伟长和叶开源(1956)，胡海昌(1981)，武际可和王敏中(1980)，徐芝纶(1982)，杜庆华，余寿文和姚振汉(1986)，谢贻权，林钟祥和丁皓江(1988)，陆明万(1990)，吴家龙(1993)，Lekhnitskii(1977), Hermon(1961), Nowinski(1978)，罗祖道和李思简(1994)，樊蔚勋和吴剑国(1994)，以及 Eringen 和 Sububi(1975) 等。

§1.1　连续介质中的应力状态和应变状态

所讨论的各向异性体是被假设为一连续介质，是理想的弹性体，只研究小应变情形，应力应变关系是线性的，即材料遵循广义虎克定律，这些线性关系间的系数是常数(均匀体)或是位置的函数(非均匀体)，还假设物体初始处于自然状态，即在载荷或温度变化等作用之前物体内没有应力。

在三维空间中选定一点作原点，可以使用不同的坐标系来描述各向异性体的几何形状和位置以及其它有关的量。本书常用的坐标系有笛卡尔坐标(x,y,z)，柱坐标(r,α,z)和球坐标(R,θ,α)，后两者与前者有如下简单关系：

表 1.1　笛卡尔坐标轴和柱坐标轴间夹角的余弦

	x	y	z
r	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	0
α	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
z	0	0	1

表 1.2　笛卡尔坐标轴和球坐标轴间夹角的余弦

	x	y	z
R	$\sin\theta\cos\alpha$	$\sin\theta\sin\alpha$	$\cos\theta$
θ	$\cos\theta\cos\alpha$	$\cos\theta\sin\alpha$	$-\sin\theta$
α	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0

柱坐标系和球坐标系中α角，都从x轴起算，转向y轴为正向，即$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，而球坐标系中的$\theta$角是从$z$轴起算至负$z$轴，即$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

在三个坐标系中位移分量分别用下列记号：u,v,w(笛卡尔坐标)；u_r,u_α,w(柱坐标)；u_R,u_θ,

u_α(球坐标)。用张量记号则写成 u_i,式中 $i=1,2,3$(以后将不再标明),或用矩阵记号 $\{u\}=[u,v,w]^T$ 或 $[u_r,u_\alpha,w]^T$ 或 $[u_R,u_\theta,u_\alpha]^T$。

在三个坐标系中应力张量 σ_{ij} 和应变张量 ε_{ij} 分别用下列记号:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\alpha} & \tau_{zr} \\ \tau_{r\alpha} & \sigma_\alpha & \tau_{\alpha z} \\ \tau_{zr} & \tau_{\alpha z} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\alpha} & \frac{1}{2}\gamma_{zr} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\alpha} & \varepsilon_\alpha & \frac{1}{2}\gamma_{\alpha z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & \frac{1}{2}\gamma_{\alpha z} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\theta} & \tau_{R\alpha} \\ \tau_{R\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\alpha} \\ \tau_{\alpha R} & \tau_{\theta\alpha} & \sigma_\alpha \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\theta} & \frac{1}{2}\gamma_{\alpha R} \\ \frac{1}{2}\gamma_{R\theta} & \varepsilon_\theta & \frac{1}{2}\gamma_{\theta\alpha} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\alpha R} & \frac{1}{2}\gamma_{\theta\alpha} & \varepsilon_\alpha \end{bmatrix}$$

用张量记号都写成

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

特别要注意 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\gamma_{ij}(i\neq j)$,例如有 $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$(笛卡尔坐标),或 $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{r\alpha}=\frac{1}{2}\gamma_{r\alpha}$(柱坐标)或 $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{R\theta}=\frac{1}{2}\gamma_{R\theta}$(球坐标)。应力张量和应变张量都是对称的二阶张量,即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 和 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$,它们都遵循下列的坐标变换公式:

$$\sigma_{p'q'}=l_{p'i}l_{q'j}\sigma_{ij} \tag{1.1.1}$$

$$\varepsilon_{p'q'}=l_{p'i}l_{q'j}\varepsilon_{ij} \tag{1.1.2}$$

式中 σ_{ij} 表示坐标系(x,y,z)中的应力分量,$\sigma_{p'q'}$ 表示转动后的新坐标系(x',y',z')中的应力分量。$l_{p'i}$ 等是两个坐标系坐标轴间夹角的余弦;例如 $l_{1'1}=\cos(x',x)$,$l_{1'2}=\cos(x',y)$,$l_{2'3}=\cos(y',z)$,等等,具体列于表 1.3。在式(1.1.1)和(1.1.2)的等号右端出现的重复下标,按约定表示从 1 到 3 作和,今后也不再说明。

表 1.3　两坐标轴间夹角余弦

	x	y	z
x'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

按式(1.1.1)和表1.3与表1.1间的对应关系，立即可以由笛卡尔坐标系的应力分量写出柱坐标的应力分量：

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha,\\
&\sigma_\alpha = \sigma_x\sin^2\alpha + \sigma_y\cos^2\alpha - 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha,\\
&\tau_{r\alpha} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),\\
&\tau_{zr} = \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{yz}\sin\alpha,\\
&\tau_{\alpha z} = -\tau_{zx}\sin\alpha + \tau_{yz}\cos\alpha,\ \sigma_z = \sigma_z
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

一点的应力状态由应力张量的九个分量完全确定（由于 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$，故独立的分量是六个），对于通过这点任一截面的应力可由这九个应力分量表示。设该截面上应力在(x,y,z)的坐标轴上的投影 p_x，p_y 和 p_z，可由下列三个公式来确定。

$$
\begin{aligned}
&p_x = \sigma_x\cos(n,x) + \tau_{xy}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z)\\
&p_y = \tau_{xy}\cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y) + \tau_{yz}\cos(n,z)\\
&p_z = \tau_{zx}\cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y) + \sigma_z\cos(n,z)
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

在柱坐标和球坐标中也有类似的公式。

弹性力学的基本方程，分成三组，即几何方程，运动方程和物理方程。首先来列出几何方程，即应变位移关系：

(1) 笛卡尔坐标系

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\\
&\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\\
&\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{1.1.5}
$$

(2) 柱坐标系

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \gamma_{\alpha z} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\alpha}\\
&\varepsilon_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{u_r}{r},\ \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\\
&\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{r\alpha} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r}
\end{aligned}
\tag{1.1.6}
$$

(3) 球坐标系

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R},\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_R}{R},\\
&\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{u_R}{R} + \frac{u_\theta}{R\sin\theta}\cot\theta,\\
&\gamma_{\theta\alpha} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\theta} - u_\alpha\cot\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\alpha},\\
&\gamma_{\alpha R} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial R} - \frac{u_\alpha}{R},\\
&\gamma_{R\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R}
\end{aligned}
\tag{1.1.7}
$$

其次来列出运动方程：

(1) 笛卡尔坐标系

$$
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1.8}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(2) 柱坐标系

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\alpha}{r} + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\alpha}}{r} + F_\alpha = \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + F_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(3) 球坐标系

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\alpha R}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}(2\sigma_R - \sigma_\theta - \sigma_\alpha + \tau_{R\theta}\cot\theta) + F_R = \rho \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}[(\sigma_\theta - \sigma_\alpha)\cot\theta + 3\tau_{R\theta}] + F_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \tag{1.1.10}$$

$$\frac{\partial \tau_{\alpha R}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{\theta\alpha}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}(2\tau_{\theta\alpha}\cot\theta + 3\tau_{\alpha R}) + F_\alpha = \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}$$

在式(1.1.8) ~ (1.1.10) 中 ρ 是密度,F_i 是单位体积力在 i 方向的投影。

§1.2　广义虎克定律

物理方程将涉及具体材料的物理特性,它将应力、应变和温度变化等联系起来,这类反映材料固有特性的关系式,通常称为本构关系。在弹性力学中只考虑线性的本构关系,一般称为广义虎克定律。本节只论述笛卡尔坐标系的广义虎克定律。用矩阵形式写出的广义虎克定律具有如下形式:

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} \tag{1.2.1}$$

或

$$\{\varepsilon\} = [s]\{\sigma\} \tag{1.2.2}$$

式中 $\{\sigma\}$ 和 $\{\varepsilon\}$ 分别是应力阵和应变阵,它们的表达式为

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T \tag{1.2.3}$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T \tag{1.2.4}$$

而 $[c]$ 和 $[s]$ 都是 6 阶矩阵,分别称为弹性阵(或刚度阵)和柔度阵,具体形式如下:

$$[c] = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

$[s] = [s_{ij}]$ 其形式上与上式完全类似,$[c]$ 和 $[s]$ 互为逆阵并且都是正定阵,因此有 $c_{ij} = c_{ji}$ 和 $s_{ij} = s_{ji}$;故它们都只有 21 个独立的元素。

对于表 1.3 中的两个坐标系,设 (x, y, z) 坐标系中本构关系如(1.2.1) 或(1.2.2) 所示,则 (x', y', z') 坐标系中本构关系有同样形式,即

$$\{\sigma'\} = [c']\{\varepsilon'\} \tag{1.2.6}$$

或 $$\{\varepsilon'\} = [s']\{\sigma'\} \tag{1.2.7}$$

显然，利用(1.1.1)和(1.1.2)可以将(1.2.6)化为$\{\sigma\}$和$\{\varepsilon\}$之间的线性关系式，将它与(1.1.1)相比较，即可以得到$[c']$和$[c]$之间的关系式，这就是弹性系数的坐标变换式。

任意各向异性的本构关系中，独立的弹性系数达21个之多，相当复杂。如果物体具有弹性对称面，则本构关系得以简化，因为此时某些弹性系数是零，而另一些则存在某种线性关系，从而减少了独立的弹性常数的个数。

(1) 弹性对称面

如果物体内每一点都存在一个平面，与该平面对称的两个方向，具有相同的弹性，则该平面称为物体的弹性对称面。而垂直于弹性对称面的方向，称为弹性主方向或材料主方向。

对于有一个对称面的物体，设(x,y,z)坐标的z轴沿弹性主方向的一个确定方向，而(x',y',z')坐标系的z'轴取z轴的负方向，即$x'=x,y'=y,z'=-z$。根据弹性对称面的定义，应有$[c']=[c]$，$[s']=[s]$，例如(1.2.6)可以写成如下的形式：

$$\{\sigma'\} = [c]\{\varepsilon'\} \tag{1.2.8}$$

于是按表1.3，有$l_{11}=l_{22}=1$，$l_{33}=-1$，其它$l_{ij}=0$。将它们代入(1.1.1)和(1.1.2)分别得到$\sigma_{x'}=\sigma_x,\sigma_{y'}=\sigma_y,\sigma_{zz}=\sigma_z,\tau_{y'z'}=-\tau_{yz},\tau_{z'x'}=-\tau_{zx},\tau_{x'y'}=\tau_{xy}$和$\varepsilon_{x'}=\varepsilon_x,\varepsilon_{y'}=\varepsilon_y,\varepsilon_{zz}=\varepsilon_z,\gamma_{y'z'}=-\gamma_{yz},\gamma_{z'x'}=-\gamma_{zx},\gamma_{x'y'}=\gamma_{xy}$。再将这些关系代入(1.2.8)，然后与(1.2.1)相比较，可以导出下列弹性常数为零，

$$c_{14}=c_{15}=c_{24}=c_{25}=c_{34}=c_{35}=c_{46}=c_{56}=0$$

于是得到具有13个独立的弹性系数的广义虎克定律

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{16}\gamma_{xy}\\
\sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z + c_{26}\gamma_{xy}\\
\sigma_z &= c_{13}\varepsilon_x + c_{23}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z + c_{36}\gamma_{xy}\\
\tau_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz} + c_{45}\gamma_{zx}\\
\tau_{zx} &= c_{45}\gamma_{yz} + c_{55}\gamma_{zx}\\
\tau_{xy} &= c_{16}\varepsilon_x + c_{26}\varepsilon_y + c_{36}\varepsilon_z + c_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

(2) 正交各向异性体

如果物体每点都有三个互相垂直的对称面，取三个弹性对称面为坐标系的坐标面，对每个弹性对称面作上述的推导，可以得到除已有的8个独立弹性系数等于零之外，还有

$$c_{16}=c_{26}=c_{36}=c_{45}=0$$

于是就得到正交各向异性体的广义虎克定律

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z\\
\sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z\\
\sigma_z &= c_{13}\varepsilon_x + c_{23}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z\\
\tau_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz},\ \tau_{zx} = c_{55}\gamma_{zx},\ \tau_{xy} = c_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

此时，独立弹性常数为9个。在这个以弹性主方向为坐标轴的本构关系中，显然正应力只与正应变有关，切应力只与切应变有关，而且不同平面内的切应力与切应变间不存在耦合作用。

有些书引入工程常数E_i,G_{ij},ν_{ij}来写出正交各向异性体的本构关系：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_z \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{31}}\tau_{zx}, \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

式中

$$\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1, \nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1, \nu_{32}/E_3 = \nu_{23}/E_2 \tag{1.2.12}$$

(3) 横观各向同性体

这时物体内的每一点都有一个弹性对称轴，也就是说每一点都有一个各向同性面，在这个垂直于弹性对称轴的各向同性面上，所有方向的弹性都是相同的。这时，我们在(1.2.10)的基础上，进一步来简化它。设 xy 平面是各向同性面，则取新坐标系 $x' = y, y' = -x, z' = z$，则表1.3中的余弦有 $l_{12} = l_{33} = 1, l_{21} = -1$，其它均为零，由(1.1.1)和(1.1.2)可以得到 $\sigma'_x = \sigma_y, \sigma'_y = \sigma_x, \sigma'_z = \sigma_z, \tau'_{yz} = -\tau_{zx}, \tau'_{zx} = \tau_{yz}, \tau'_{xy} = -\tau_{xy}$ 和 $\varepsilon'_x = \varepsilon_y, \varepsilon'_y = \varepsilon_x, \varepsilon'_z = \varepsilon_z, \gamma'_{yz} = -\gamma_{zx}, \gamma'_{zx} = \gamma_{yz}, \gamma'_{xy} = -\gamma_{xy}$。再代入(1.2.8)以及具体地按(1.2.10)，经过比较之后，即得 $c_{11} = c_{22}, c_{13} = c_{23}, c_{44} = c_{55}$。

再将坐标系绕 z 轴转 45°，则得新坐标系为 $x' = x\cos 45° + y\sin 45°, y' = y\cos 45° - x\sin 45°, z' = z$。即在表1.3中的余弦有 $l_{11} = l_{12} = l_{22} = 1/\sqrt{2}, l_{21} = -1/\sqrt{2}, l_{33} = 1, l_{13} = l_{23} = l_{31} = l_{32} = 0$。按一个类似过程计算可得到 $\sigma'_x = (\sigma_x + \sigma_y + 2\tau_{xy})/2, \sigma'_y = (\sigma_x + \sigma_y - 2\tau_{xy}), \sigma'_z = \sigma_z, \tau'_{yz} = (\tau_{yz} - \tau_{zx})/\sqrt{2}, \tau'_{zx} = (\tau_{zx} + \tau_{yz})/\sqrt{2}, \tau'_{xy} = (\sigma_y - \sigma_x)/2$ 和 $\varepsilon'_x = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy})/2, \varepsilon'_y = (\varepsilon_x + \varepsilon_y - \gamma_{xy}), \varepsilon'_z = \varepsilon_z, \gamma'_{yz} = (\gamma_{yz} - \gamma_{zx})/\sqrt{2}, \gamma'_{zx} = (\gamma_{zx} + \gamma_{yz})/\sqrt{2}, \gamma'_{xy} = \varepsilon_y - \varepsilon_x$。再代入和比较之后，又得一个关系式：

$$2c_{66} = c_{11} - c_{12} \tag{1.2.13}$$

于是独立的弹性常数减至5个，广义虎克定律将简化为

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{11}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_z &= c_{13}\varepsilon_x + c_{13}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= c_{44}\gamma_{yz}, \tau_{zx} = c_{44}\gamma_{zx}, \tau_{xy} = c_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.2.14}
$$

式中 c_{66}，c_{11} 和 c_{12} 间有关系式(1.2.13)。或者写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z \\
\varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{13}\sigma_z \\
\varepsilon_z &= s_{13}\sigma_x + s_{13}\sigma_y + s_{33}\sigma_z \\
\gamma_{yz} &= s_{44}\tau_{yz}, \gamma_{zx} = s_{44}\tau_{zx}, \gamma_{xy} = s_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.2.15}
$$

式中

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) \tag{1.2.16}$$

如果用工程常数来写，(1.2.15)又可写成

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z, \gamma_{yz} = \frac{1}{G'}\tau_{yz} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z, \gamma_{zx} = \frac{1}{G'}\tau_{zx}
\end{aligned}
\tag{1.2.17}
$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu'}{E'}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'}\sigma_z, \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

式中

$$2G = E/(1 + \nu) \tag{1.2.18}$$

(4) 各向同性体

如果物体内任何方向都是弹性主方向,则可以证明独立常数只有两个。实际上,只需在(1.2.14)或(1.2.15)的基础上,作一新坐标 $x' = z, y' = x, z' = y$,则在表 1.3 中有 $l_{13} = l_{21} = l_{32} = 1$,其它 $l_{ij} = 0$,就能推导得到 $c_{12} = c_{13} = \lambda, c_{44} = c_{66} = \mu = G, c_{33} = c_{11} = \lambda + 2\mu$,这里常数 λ 和 μ 称为拉梅常数,广义虎克定律可写成如下形式:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z \\
&\sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z \\
&\sigma_z = \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z \\
&\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}, \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

也常写成如下形式

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
&\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
&\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\tau_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
&\gamma_{zx} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\tau_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \\
&\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

式中 E, ν 和 G 分别是杨氏模量、泊松比和剪切模量。

§ 1.3　弹性力学基本方程和定解条件

在 § 1.1 和 § 1.2 中具体列出了笛卡尔坐标系中弹性力学的基本方程:几何方程,运动方程和物理方程,用张量记法可写成如下紧凑形式:

(1) 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{1.3.1}$$

从(1.1.5)看到,当 $i \neq j$ 时 $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$。也可用矩阵记号写出几何方程,即

$$\{\varepsilon\} = E^T(\nabla)\{u\} \tag{1.3.2}$$

式中 $\{u\} = [u, v, w]^T$ 和 $E(\nabla)$ 是如下所示的算子矩阵,

$$E(\nabla) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.3}$$

(2) 运动方程

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \dot{u}_i \tag{1.3.4}$$

式中的"·"号表示对时间 t 的偏导数。如果不计加速度项，则上式简化为

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{1.3.5}$$

称为平衡方程。

(3) 物理方程

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.3.6}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.3.7}$$

式中 c_{ijkl} 和 s_{ijkl} 分别称为弹性系数（或刚度系数）和柔度系数，它们都是四阶张量。

将式(1.3.1)或(1.3.2)具体写出，即如式(1.1.5)所示，相应的(1.3.4)如(1.1.8)所示，式(1.3.6)和(1.3.7)分别如(1.2.1)和(1.2.2)所示。

对于几何方程(1.3.1)，既是由位移求应变的公式，也可以看作由应变求位移的一阶偏微分方程组，这时方程有6个，而未知量 u_i 只有三个，因此，要使方程组有解，各应变分量之间必定要有某种关系，这种关系通常称为应变协调条件，用张量记法如下所示。

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{lj,ki} - \varepsilon_{ki,lj} = 0 \tag{1.3.8}$$

总共有81个方程，而不同的只有6个，这6个应变协调条件，就是由应变求解位移的必要条件，对于单连通区域，它们也是充分条件，而对于多连通区域，则必须加上位移单值条件。

在笛卡尔坐标系中，6个应变协调条件有如下形式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}\right) = 0 \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 0 \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

在圆柱坐标或球坐标系中，应变协调条件的表达式都比较复杂，一般很少应用，只在一些特殊问题中，例如，轴对称变形情形，在圆柱坐标系中，位移 $u_\alpha = 0$，u_r 和 w 只是 r 和 z 的函数，应变 $\gamma_{\alpha z} = \gamma_{r\alpha} = 0$，$\varepsilon_r$，$\varepsilon_\alpha$，$\varepsilon_z$ 和 γ_{rz} 也只是 r 和 z 的函数，这时应变协调条件只有两个，可以直接从(1.1.6)导出

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r - \varepsilon_\alpha - r\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + r\frac{\partial^2 \varepsilon_\alpha}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

弹性力学的三组基本方程中，包含三类物理量，即应力、应变和位移三类变量。这些物理量的变化和关联是由外部因素的作用引起的，因此，我们还需要建立这些变量和外部作用的关系。同时，这些物理量随着时间不断变化，而这种变化则又与这些变量开始时刻的状态有关。为

此，在求解弹性力学问题时，除了基本方程，还必须有相应的边界条件和初始条件，才能完全确定弹性力学问题的解答。

(1) 边界条件

如果在物体的全部表面 S 上都有指定的外力 $(\bar{p}_x,\bar{p}_y,\bar{p}_z)$ 称为第一类边界条件，按式(1.1.4)，边界条件可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)+\tau_{xz}\cos(n,z)&=\bar{p}_x\\
\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{yz}\cos(n,z)&=\bar{p}_y\\
\tau_{zx}\cos(n,x)+\tau_{zy}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,z)&=\bar{p}_z
\end{aligned}
\tag{1.3.11}
$$

式中 n 表示表面 S 的外法线 $\vec{n}$，若 $\vec{n}$ 与坐标轴间的夹角的余弦用 n_i 表示，则上式可写成紧凑形式：

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i \tag{1.3.12}$$

如果在物体的全部表面 S 上都有指定的位移 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ 称为第二类边界条件，可写成如下形式：

$$u=\bar{u},v=\bar{v},w=\bar{w} \tag{1.3.13}$$

或写成紧凑形式：

$$u_i=\bar{u}_i \tag{1.3.14}$$

式(1.3.12)和(1.3.14)对于圆柱坐标系和球坐标系都是适用的。

第三类边界条件称为混合边界条件，一般是指在一部分边界 S_σ 上指定外力，而在剩下的边界 S_u 上位移已知，$S_\sigma\cup S_u=S$，这时在 S_σ 上应用(1.3.11)或(1.3.12)，在 S_u 上应用(1.3.12)或(1.3.14)。混合边界条件还包含在某部分或全部表面上，指定 p_i 的一个或两个，同时 u_j 两个或一个已知，而 $i\neq j$，已知的 p_i 和已知的 u_j 的总个数等于 3。

(2) 初始条件

一般提如下的两个初始条件，一是初始位移 u_i^* 已知，二是初始速度 $\dot{u}_i^*$ 已知，写成紧凑形式是

$$t=t_0\ \text{时}:u_i=u_i^* \tag{1.3.15}$$

$$u_i=\dot{u}_i^* \tag{1.3.16}$$

如果研究静力学问题，则基本方程是(1.3.1)或(1.3.2)和(1.3.5)以及(1.3.6)或(1.3.7)，这时所有的量均与时间 t 无关，定解条件只有边界条件。

在 Eringen 和 Sububi(1975)的书中，证明了动力学问题在上述定解条件下有唯一解；对于静力学问题在所提的边界条件下同样可以证明有唯一解。只有根据这唯一性定理，才能表明弹性力学逆解法和半逆解法的合理性。

§1.4 弹性力学变分原理

在弹性力学中变分原理是求解弹性力学问题的另一种依据，尤其在求近似解时，更能显示出它的重要性和有效性。例如，在有限元法中，有文献把变分原理称为有限元法的基础。此外，变分原理还有另一个作用，它可以用来推导基本方程和边界条件等，这在弹性力学的应用中也是十分有用的。

物体在变形时机械能没有损失，因而外力所作的功等于物体中储存的应变能，这个应变能只与物体当时的状态有关，而与变形产生的过程无关。单位体积所储存的应变能称为应变能密度，用记号 U 表示应变能密度，显然 U 是应变分量 ε_{ij} 的函数，它的计算公式是

$$U = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[c]\{\varepsilon\} \tag{1.4.1}$$

将 U 分别对应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 和 γ_{xy} 求偏导数，再与式(1.2.1)相比较，立即得到

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y}, \sigma_z = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}}, \tau_{zx} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{zx}}, \tau_{xy} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

这就是通过应变能密度函数表示的应力应变关系，写成矩阵形式为

$$\{\sigma\} = \frac{\partial U}{\partial\{\varepsilon\}} \tag{1.4.3}$$

按下列公式定义余应变能密度

$$V = \{\sigma\}^T\{\varepsilon\} - U \tag{1.4.4}$$

此式的右端，应利用应力应变关系表示为应力分量的函数，即 V 是 σ_{ij} 的函数。按(1.2.2)，则 V 的计算公式为

$$V = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[s]\{\sigma\} \tag{1.4.5}$$

显然有

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial V}{\partial\{\sigma\}} \tag{1.4.6}$$

由于$[c]$和$[s]$都是正定阵，式(1.4.1)和(1.4.5)所示的 U 和 V 分别是应变分量和应力分量的正定二次型。

考虑一个弹性体在体积力 F_i 的作用下的平衡问题，假定边界 $S = S_\sigma \cup S_u$，则总势能

$$\pi = \iiint_{\Omega} (U - f_i u_i) d\Omega - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \tag{1.4.7}$$

式中 Ω 是弹性体所占的空间区域。

总余能

$$\Gamma = \iiint_{\Omega} V d\Omega - \iint_{S_u} p_i \bar{u}_i dB \tag{1.4.8}$$

二类变量广义余能

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = &\iiint_{\Omega} \{V + (\sigma_{ij,j} + F_i)u_i\} d\Omega \\ &- \iint_{S_u} p_i \bar{u}_i dS - \iint_{S_\sigma} (p_i - \bar{p}_i) u_i dS \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

二类变量广义势能

$$\begin{aligned} \pi_2 = &\iiint_{\Omega} \left\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - V - f_i u_i\right\} d\Omega \\ &- \iint_{S_u} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

三类变量广义势能

$$\begin{aligned} \pi_3 = &\iiint_{\Omega} \left\{U - f_i u_i - \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\right\} d\Omega \\ &- \iint_{S_u} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

三类变量广义余能