高等学校教材同步辅导系列

组合数学习题精解

匡正 主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书一共收编了300多道组合数学习题，并给出详尽解答，这些题目覆盖了Richard A. Brualdi所著的"Introductory Combinatorics"（第3版）（国外经典教材）一书中的绝大部分的习题，以及孙淑玲、许胤龙编著的《组合数学引论》一书中的大部分习题，因此可作为这两本教材的学习指导书和教学参考书。

习题内容涉及鸽巢原理、排列与组合、二项式系数、容斥原理、递推关系与生成函数、特殊计数序列、二分图中的匹配、玻里雅计数法以及组合设计。该书每一部分都有内容提要和一些典型例题以及针对内容和思考方法的归纳总结。

本书可作为大专院校计算机专业和数学专业的研究生及高年级本科生的学习参考书，也可作为数学竞赛或奥赛的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

组合数学习题精解/匡正主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2005.9

（高等学校教材同步辅导系列）

ISBN 7-5603-2213-1

Ⅰ.组… Ⅱ.匡… Ⅲ.组合数学-高等学校-解题 Ⅳ.O157-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第091466号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市龙华印刷厂
开　　本 850×1168 1/32 印张9 字数228千字
版　　次 2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-2213-1/O·188
印　　数 1~4 000
定　　价 13.80元

前　言

组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科。目前,组合数学在计算机科学、信息论、运筹学和规划论等许多学科有着重要应用。在组合数学之中,蕴涵着许多思想深刻、方法巧妙的内容,对于开拓学习者的创造性思维能力,提高他们分析问题、解决问题的能力,可以起到十分重要的作用。

组合数学的内容特点是基本原理大都比较浅显和简单,但应用和求解却并非如此。学习者往往面对一些组合数学习题,不知如何思考和求解,感觉题目难做。而要学好组合数学,不进行一定量的习题练习,是不可能的。特别是,组合数学中许多方法和技巧是通过一些具体题目或问题来体现和浓缩的。因此,为了给读者特别是初学者学习提供帮助和参考,作者编写了这本《组合数学习题精解》。本书从有利于学习的角度,收编了 Richard A. Brualdi 所著的国外经典教材“Introductory Combinatorics(第 3 版)”中的绝大部分习题和孙淑玲、许胤龙编著的《组合数学引论》一书中的大部分习题,可供使用这两本教材的读者参考学习。

本书共包含 300 多道习题,涉及鸽巢原理、排列与组合、二项式系数、容斥原理、递推关系与生成函数、特殊计数序列、二分图中的匹配、玻里雅计数法和组合设计等内容。习题解答力求详尽,注重思考方法和技巧。在每一章中,编加了归纳和总结,旨使读者在进行一段时间的学习和进行一定量的习题练习之后,使方法和技巧进一步升华。

在使用本书过程中,学习者切忌先看解答,后去做题,一定要先行思考,再去做题,适当参考答案才能达到效果。

本书在资料收集、审阅和校对等过程中得到张岩、李治军以及哈尔滨工业大学计算机科学学院软件基础教研室多位老师的帮助和指导，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有缺点和疏漏，希望读者批评指正。

作　者

2005年6月

目　　录

第一章

鸽巢原理

1.1 内容提要、例题及归纳

1.1.1 鸽巢原理的简单形式及例题

定理 1.1 （鸽巢原理的简单形式） 如果将 $n+1$ 个物体(鸽子) 放进 n 个盒子(鸽巢),那么至少有一个盒子(鸽巢) 包含两个或更多的物体(鸽子)。

还有一些与鸽巢原理相近的其他原理,叙述如下:

(1) 如果将 n 个物体放入 n 个盒子,并且没有一个盒子是空的,那么每个盒子恰好包含一个物体。

(2) 如果将 n 个物体放入 n 个盒子并且没有盒子被放入多于一个的物体,那么每个盒子里恰有一个物体。

例 1 在 13 个人中必有两个人的生日在同一个月份中。

例 2 若 12 个人的生日均在不同的月份,则每个月中恰好含有其中一个人的生日。

鸽巢原理还可以有如下推广的形式:

设 m、n 是正整数,且 $m > n$。如果 m 个物体被放入 n 个盒子中,则至少有一个盒子包含两个或更多的物体。

还可以从集合论的角度描述鸽巢原理:

设 X 和 Y 是两个有限集。如果 $|X|>|Y|$,则对任意一个从 X 到 Y 的映射 f,必存在 $a,b \in X$,且 $a \neq b$,使 $f(a)=f(b)$。

证明 假如不然，则 f 是 X 到 Y 的单映射，从而必有 $|X| \leqslant |Y|$，与已知矛盾。

例 3 设有 n 对夫妇。为保证能够有一对夫妇被选出，至少要从这 $2n$ 个人中选出多少人？

解 在这种情形下可以应用鸽巢原理，考虑 n 个盒子，其中每个盒子对应一对夫妇，现将 n 对夫妇从 1 到 n 编号。在选人的过程中，若从第 i 对夫妇中选出的人，就放入第 i 个盒子中，那么当选出 $n+1$ 个人时，必有一个盒子中有两个人，亦即有一对夫妇已被选出。而选出 n 个人时会发生恰好选出所有丈夫或所有妻子的情况。因此，$n+1$ 是保证能有一对夫妇被选出的最少的人数。

例 4 试证明对任意 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，存在整数 k 和 l，$0 \leqslant k < l \leqslant m$，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ 能够被 m 整除。也就是说，在序列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中存在连续的 $l-k$ 个 a，它们的和能被 m 整除。

证明 考虑 m 个和 $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$，如果这些和当中存在可被 m 整除的，则结论成立。如不存在，则可设这些和中的每一个除以 m 都有一个非零余数，这些余数均在整数 1 到 $m-1$ 之中。设这些和为“鸽子”，则共有 m 个“鸽子”；设整数 1 到 $m-1$ 为“鸽巢”，则共有 $m-1$ 个“鸽巢”。根据鸽巢原理，必有整数 k 和 $l(k<l)$，使 s_k 与 s_l 在被 m 除之后有相同的余数 r，即

$$s_k = a_1 + \cdots + a_k = bm + r$$

$$s_l = a_1 + \cdots + a_l = cm + r$$

两式相减，得

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l = (c-b)m$$

即 $a_{k+1} + \cdots + a_l$ 能够被 m 整除。

例 5　一位棋手有 11 周的时间准备一场比赛。他决定每天至少下一盘棋。但为了不使自己过于疲劳，他还决定每个连续的 7 天内所下盘数不能超过 12 盘。试证明存在连续的若干天，他在这些天内恰好下了 21 盘棋。

证明　令 a_1 是第 1 天所下的盘数，a_2 是第 1 天和第 2 天所下的总盘数，a_3 是第 1 天、第 2 天和第 3 天所下的总盘数…… 如此得序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$。由于棋手每天至少要下一盘棋，故这个序列是一个严格递增的序列。此外，$a_1 \geqslant 1$，而且由于每个连续的 7 天最多下 12 盘棋，故 $a_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$。因此，有

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leqslant 132$$

同样，序列 $a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ 也是一个严格递增序列，且

$$22 \leqslant a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leqslant 132 + 21 = 153$$

于是，有 154 项的序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$$

的每一项均为 1 ~ 153 中的一个整数，由鸽巢原理可知，它们中间必有两项是相等的。由 $a_1, \cdots, a_{77}$ 的严格递增性可知，$a_1, \cdots, a_{77}$ 和 $a_1 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ 中没有相等的数。因此，必存在 i 和 j，使得 $a_i = a_j + 21$，即 $a_i - a_j = 21$。所以，这位棋手在第 $j + 1, j + 2, \cdots, i$ 天总共下了 21 盘棋。

注　从上面的证明可知，如果将条件“连续 7 天内下棋不超过 12 盘”换成“在这 11 周内最多只能下 132 盘棋”也是可以的。

例 6　从 1 ~ 200 的所有整数中任选 101 个，则这 101 个整数中至少有两个数，其中一个可被另一个整除。

证明　设取出的 101 个整数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{101}$，将它们表示为

$$a_i = 2^{s_i} \times r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, 101$$

式中，s_i 为非负整数；$r_i \in \{1, 3, 5, \cdots, 199\}$。

对任意整数，总可以惟一表示为上面的形式，比如 $13 = 2^0 \times 13$，$72 = 2^3 \times 9$ 等。

设 $r_1, r_2, \cdots, r_{101}$ 这 101 个奇数为“鸽子”，设集合 $\{1,3,5,\cdots,199\}$ 中 100 个奇数为“鸽巢”，由鸽巢原理可知，存在整数 i 和 $j(1 \leqslant i, j \leqslant 101$，且 $i \neq j)$，使

$$r_i = r_j$$

不妨设 $s_i < s_j$，则

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{s_j} \times r_j}{2^{s_i} \times r_i} = 2^{s_j - s_i} = \text{整数}$$

即 a_j 能被 a_i 整除。

注 此例中若只选 100 个数就不一定成立，例如，选 101，102，…，200，其中没有一个数能被另一个整除。

例 7 （中国余式定理）设 m 和 n 为两个互素的正整数。对于两个整数 a 和 b，$0 \leqslant a \leqslant m-1$，$0 \leqslant b \leqslant n-1$，存在一个正整数 x，使得 m 除以 x 所得的余数为 a，n 除以 x 所得的余数为 b，即 x 既可以写成 $x = pm + a$，又可以写成 $x = qn + b$。

证明 根据要证明的结论，考虑如下序列

$$a, m+a, 2m+a, \cdots, (n-1)m+a \qquad (*)$$

即序列中的每一项被 m 除之后都余 a。下面只要证明从序列 (*) 中可找出题中要求的 x 即可。为此，先证明序列 (*) 中各项被 n 除后没有相同余数。事实上，假设序列中存在两项，它们被 n 除后有相同余数 r。令它们为 $im + a$ 和 $jm + a$，$0 \leqslant i < j \leqslant n-1$，则存在整数 q_i 和 q_j，使

$$im + a = q_i n + r$$

$$jm + a = q_j n + r$$

所以
$$(j-i)m = (q_j - q_i)n$$

这表明 n 是 $(j-i)m$ 的因子，由于 n 与 m 互素，所以 n 是 $j-i$ 的

因子。然而，$0 < j - i \leqslant n - 1$，$n$ 是 $j - i$ 的因子是不可能的。这个矛盾的产生是由于前面假设不成立，即序列（∗）中各项被 n 除后没有相同余数。所以序列（∗）中 n 个数被 n 除后余数只能是 $0,1,2,\cdots,n-1$，且它们都会出现。当然，对整数 $b(0 \leqslant b \leqslant n-1)$，一定对应一个整数 q，使序列（∗）中某数 $x = pm + a$ 被 n 除后可写成 $x = qn + b$。证毕。

1.1.2 鸽巢原理的加强形式及例题

定理 1.2 （鸽巢原理的加强形式） 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为正整数。如果将 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ 个物体放入 n 个盒子内，那么，或者第一个盒子至少含有 q_1 个物体，或者第二个盒子至少含有 q_2 个物体 …… 或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物体。

证明 设将 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ 个物体分别放到 n 个盒子中。如果对于每个 $i = 1,2,\cdots,n$，第 i 个盒子含有少于 q_i 个物体，那么，所有盒子中的物体总数不超过

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n$$

比所分发的物体总数少 1，因此可断言，对 $i = 1,2,\cdots,n$，第 i 个盒子至少包含 q_i 个物体。证毕。

由于当 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 2$ 时，有

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1 = 2n - n + 1 = n + 1$$

所以，鸽巢原理的简单形式是鸽巢原理的加强形式的特例。又当 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = r$ 时，鸽巢原理的加强形式可叙述如下：如果 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒子中，那么至少有一个盒子含有 r 个或更多的物体。

如果设放入第 i 个盒子中的物体数是 $m_i(i = 1,2,\cdots,n)$，并且它们的平均数大于 $r - 1$，即

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} > r - 1$$

那么，至少有一个整数大于或等于 r。也就是说，这些盒子中有一个盒子至少含有 r 个物体。可称此结论为平均数原理。

另一个平均数原理为：

如果 n 个整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的平均数小于 $r+1$，即

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} < r + 1$$

则其中至少有一个整数小于 $r+1$。

例 8 一篮子水果中有苹果、香蕉和梨。为保证篮仔或者至少有 8 个苹果，或者至少有 6 个香蕉，或者至少有 9 个梨，则放入篮中的水果的最小数目是多少？

解 对照鸽巢原理的加强形式，$q_1 = 8, q_2 = 6, q_3 = 9, n = 3, q_1 + q_2 + q_3 - n + 1 = 21$，即放入篮中水果的最小数目为 21 时，可保证题目要求。如果只放入 20 个水果，我们可以放 7 个苹果、5 个香蕉、8 个梨，就不满足题目要求。此例可以对鸽巢原理的加强形式有一个感性的认识。

例 9 试证明：在任意 $n^2 + 1$ 个实数构成的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 中，或者含有长度为 $n+1$ 的递增子序列，或者含有长度为 $n+1$ 的递减子序列。

证明 假设不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列，则只需证明必有一个长度为 $n+1$ 的递减子序列。

令 m_k 表示从 a_k 开始的最长递增子序列长度，假设

$$1 \leqslant m_k \leqslant n \qquad k = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$$

这相当于将 $n^2 + 1$ 个物体 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$ 放入 n 个盒子 1, 2, $\cdots$, n 中，由鸽巢原理知，必有一个盒子 i，里面至少有 $n+1$ 个物体（否则物体总数将不超过 n^2），即存在

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$$

使 $$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}} = i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

下面证明对应这些下标 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ 的实数序列必满足

$$a_{k_1} \geqslant a_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{k_{n+1}}$$

即它们构成一长度为 $n+1$ 的递减子序列。事实上，如果 a_{k_1}，$a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 不满足上述递减关系，即存在 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$，使 $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$，则由 $a_{k_{j+1}}$ 开始的最长递增子序列加上 a_{k_j}，就得到一个从 a_{k_j} 开始的长度为 $m_{k_{j+1}}+1$ 的递增子序列，由 m_{k_j} 的含义知

$$m_{k_j} \geqslant m_{k_{j+1}} + 1$$

这与 $m_{k_j} = m_{k_{j+1}}$ 矛盾，从而可知 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 就是所存在的长度为 $n+1$ 的递减子序列。证毕。

这个例题可以直观理解为：有 n^2+1 个人排成一横排。此时我们总能挑选出 $n+1$ 个人，当让这 $n+1$ 个人向前迈一步形成一个新的横排时，其身高从左至右是递增（或递减）的。

此例题的结论是很重要的，它可使我们知道：任意 n^2+1 个实数的序列中必存在长度为 $n+1$ 的“有序”子序列，这种序的概念在数学和计算机科学中是很重要的。

1.1.3 Ramsay 问题

例 10 在 6 个人中，或者有 3 个人，他们中的每两个人都互相认识；或者有 3 个人，他们中的每两个人都彼此不认识。

这个例子是 Ramsay 问题的最流行和容易理解的例子。

定理 1.3 对 6 个顶点的完全图 K_6 用红和蓝两种颜色对每条边着色，则其中必存在一个红色三角形或蓝色三角形。

Ramsay 数：对于任意给定的两个正整数 m 和 n，如果存在最小的正整数 $r(m,n)$，使当 $N \geqslant r(m,n)$ 时，对 K_N 任意进行红、蓝两

色对边的着色，K_N 中均有红色 K_m 或蓝色 K_n，则称 $r(m,n)$ 为 Ramsay 数。

Ramsay 数是很难求得的，目前大多数尚未求出。

Ramsay 数可推广到用 k 种颜色对 K_N 的边着色，用 $r(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 表示，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为正整数。

1.1.4　归纳和总结

鸽巢原理又叫抽屉原理、鞋盒原理等。它是一个重要而又初等的组合学原理。用它可以解决各种十分有意义的问题，并常常得出一些十分令人惊奇的结论。鸽巢原理主要解决组合学中的存在性问题。比如在本节例 1 中鸽巢原理只是断言在 13 个人中必有两个人的生日在同一个月份，但对指出究竟是哪两个人没有任何帮助。

从前面的这些例子可以体会到，虽然鸽巢原理十分简单明了，但是在应用它的时候却涉及很多技巧。对于具体问题如何去构造“鸽巢”，将什么对象作为“鸽子”，这些往往是解题的关键，应通过习题多加练习。

1.2　习题与解答

1. 试证明任何一组人中都有两个人，它们在该组内认识的人数相等。

证明　设组内共有 n 个人，每个人所认识的人数为 $0,1,2,\cdots,n-1$。假设不存在这样两个人，他们所认识的人数相等，那么这 n 个人所认识的人数均互异，他们中的每一个人所认识的人数只取且仅取一次 $0,1,\cdots,n-1$ 中的一个数，从而他们中必有一人认识的人数是 0，也必有一人认识的人数是 $n-1$，这是一个矛盾，因此假设不成立。

2. 任取 11 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数。

证明 设这 11 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$，它们被 10 除之后其余数为 0 ~ 9 之间的整数。由鸽巢原理可知，必有两个 a，设为 a_i 和 a_j，它们二者的余数相等，从而 $a_i - a_j = 10p$（p 为一个整数），即 a_i 与 a_j 的差是 10 的倍数。

3. 任取 $n+1$ 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 n 的倍数。

证明 设这 $n+1$ 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，则可以将它们写成

$$a_i = np_i + r_i \qquad i = 1,2,\cdots,n+1$$

式中，p_i 是 a_i 被 n 除之后的商，r_i 是余数，且 $r_i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$。将 $a_i(i = 1,\cdots,n+1)$ 当作“鸽子”，将 $0,1,\cdots,n-1$ 当作“鸽巢”，则由鸽巢原理可知，必有两个 a，其余数相等，设其为 a_i 和 a_j，则

$$a_i - a_j = (p_i - p_j)n$$

即它们的差是 n 的倍数。

4. 一位棋手有 11 周的时间准备比赛。他每天至少下一盘棋，但在任意连续的 7 天内下棋不超过 12 盘。试证明对每个 $k = 1, 2, \cdots, 21$，存在连续若干天，在此期间他将恰好下 k 盘棋；能否断定存在连续若干天，在此期间他恰好下 22 盘棋。

证明 设 $b_1, b_2, \cdots, b_{77}$ 分别为这 11 周内他每天下棋的盘数，令

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_{77} &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{77} \end{aligned}$$

由于 $b_i \geqslant 1(1 \leqslant i \leqslant 77)$ 和 $b_i + b_{i+1} + \cdots + b_{i+6} \leqslant 12(1 \leqslant i \leqslant 71)$，

所以

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$$

考虑序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k \qquad (*)$$

它们的值都是 $1 \sim 132 + k$ 之间的整数。由于 $k \leqslant 21$，所以 $132 + k \leqslant 153$，而序列（*）的项数为154，由鸽巢原理可知，序列（*）中 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 与 $a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$ 之间必有2项相等，即存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 77$，使

$$a_j = a_i + k$$

则

$$k = a_j - a_i = b_{i+1} + b_{i+2} + \cdots + b_j$$

即从第 $i+1$ 天到第 j 天这连续 $j-i$ 天中，他刚好下了 k 盘棋。

当 $k = 22$ 时，只有两种情况：

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$ 这154项中有2项相等。此时由上面的讨论知结论成立，即他在连续若干天恰好下22盘棋。

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$ 这154项中没有2项是相等的。此时它们恰好分别取 $1 \sim 154$。由于

$$23 \leqslant a_1 + 22 < a_2 + 22 < \cdots < a_{77} + 22 \leqslant 154$$

故只能有 $a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_{22} = 22$。这样，他从第 $1 \sim 22$ 天的连续22天里也下棋22盘。

5. 从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中任选 $n+1$ 个数，试证明所选的数中存在2个数，其中一个可被另一个整除。

证明 设取出的 $n+1$ 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，将它们表示为

$$a_i = 2^{s_i} \times r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1$$

式中，s_i 为非负整数；$r_i \in \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$。用 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$ 作“鸽子”，用 $1, 3, \cdots, 2n-1$ 这 n 个奇数作“鸽巢”，则由鸽巢原理可知，

必有 2 个 r 取相同值，设其为 r_i 和 r_j，不妨设 $s_i < s_j$，则

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{s_j} \times r_j}{2^{s_i} \times r_i} = 2^{s_j - s_i}$$

即 a_j 可被 a_i 整除。

6. 试证明从 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 中任选 $n+1$ 个数，则总存在 2 个数，它们之间的差为 1。

证明 取“鸽巢”为 $\{1,2\}$，$\{3,4\}$，$\cdots$，$\{2n-1,2n\}$ 共 n 个。当从 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 中取 $n+1$ 个数时，由鸽巢原理可知，必有 2 个被选出的数属于同一个鸽巢，即它们两个的差为 1。

7. 试证明从 $\{1,2,\cdots,3n\}$ 中任选 $n+1$ 个数，则总存在 2 个数，它们之间最多差 2。

证明 此题类似于本节 6 题的证明，只要取“鸽巢”为 $\{1,2,3\}$，$\{4,5,6\}$，$\cdots$，$\{3n-2,3n-1,3n\}$ 即可。

8. 试证明从 $\{1,2,\cdots,kn\}$ 中选 $n+1$ 个数，总存在 2 个数，它们之间最多差 $k-1$。

证明 用 $\{1,2,\cdots,k\}$，$\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$，$\cdots$，$\{kn-k+1, kn-k+2,\cdots,kn\}$ 作“鸽巢”，用所选的 $n+1$ 个数作“鸽子”，由鸽巢原理可知，必有 2 个被选的数在同一鸽巢中，它们的差最大为 $k-1$。

9. 试证明任意给定 52 个整数，它们之中必有 2 个数，其和或差是 100 的倍数。

证明 设 A 为这 52 个整数的集合，$|A| = 52$。记 $A_i = \{a \mid a \in A$，且 a 被 100 除之后余数是 $i\} \cup \{a \mid a \in A$，且 a 被 100 除之后余数是 $100 - i(i = 0,1,\cdots,50)\}$，则 $A_0, A_1, \cdots, A_{50}$ 构成 A 的 51 个“鸽巢”，从而存在 A_k，使 $|A_k| \geqslant 2$。设 $a, b \in A_k$，则 a 和 b 除以 100，其余数要么相同，要么其和为 100，即或者是

$$a = 100m + k \qquad b = 100n + k$$