10

1981

高中课程辅导

GAOZHONG
KECHENG
FUDAO

天津人民出版社

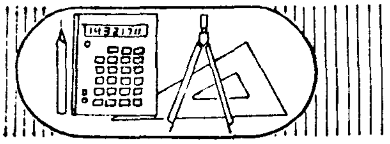
高中课程辅导

第 十 辑

〔高二下学期〕

目 录

数学



学好数列和极限

北京 绮望

高中数学第四册“数列和极限”一章十分重要，它在课本中起着承上启下的作用．一方面，它是中学代数的最后一章，由于大量的综合题都与数列有关，学习本章可起到综合复习前面所学知识的作用；另一方面，数列与函数的极限又是学习后面微积分的基础，因此本章内容务必学好，下面就这一章中的某些问题，谈点个人的学习体会．

一、深入理解数列的概念

数列是本章中最重要的概念之一，课本中指出“象上面例子中按一定次序排列的一列数叫做数列”．这个定义比较直观，但它并未说清某些问题．事实上，数列中用省略号表示的那些数是什么，并没有告诉我们．因此，书上又接着提出了较为严格的数列定义：数列是（书上是“看作”）一个定义域为自然数集（或它的有限子集｛1，2，…，n｝）的函数当自变量从小到大依次取自然数时相应的一系列函数值．理解这个较抽象的定义时，应注意三点：

1．这个函数的定义域为自然数集，或它的有限子集｛1，2，…，n｝．如$f(n)=2n$就是一个以自然数集为定义域的函数：$f(1)=2$，$f(2)=4$，…．

2．根据函数构造数列时，自变量取值必须依照从小到大的顺序，即每个函数值在数列中的位置由相应的自变量（序号）决定．如对于数列$f(n)=2n$，有下面的对应关系：

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{函数值（项）} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots \\ \text{自变量（序号）} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n & \end{array}$$

3．当定义域为自然数集本身时，相应的数列是无穷数列；当定义域为自然数集的有限子集｛1，2，…n｝时，相应的数列是有穷数列．

我们看到，数列与函数这两个概念关系密切，但又不是一回事．函数反映了定义域与值域的数值间的对应关系，而数列是按一定次序排列的一系列函数值．另外，数列与集合这两个概念亦有联系，但它们之间的区别是集合内的元素是没有重复的，而数列中的项是可以相同的．如通项为$1^n+(-1)^n$的数列为

$$0，2，0，2，0，2，\cdots，$$

其中所有的奇数项为0，偶数项为2；而由上述函数值所组成的集合则只有两个元素：0和2．

由上可见，数列的前一种定义直观而不够确切，后一种定义严谨却较抽象，将它们结合起来，就可以对数列的概念有一个较为深刻的理解．

二、给出数列的方式

从数列的定义知道，一个数列已知，当且仅当它的每一项都已知．对于比较简单的数列，常用两种方法给出：

1．通项公式．如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用1，2，3，…去代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项．但应注意：

（1）并不是每个数列都有通项公式．例如由$\sqrt{2}$的精确到1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值组成的数列1，1.4，1.41，1.414，…就没有通项公式．

（2）满足前n项为已知项的通项公式不唯一．例如前4项为2，4，6，8的通项公式$a_n=2n$，

还有 $a_n=2n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$，

因此课本中关于这类习题的提法是：说出数列的**一个**通项公式，使它的前4项分别为已知的4个数．

2．递推公式．例如非常有用的所谓斐波那奇数列 1，1，2，3，5，8…，

就是由递推公式给出的：第1项是1，第2项是1，以后各项由公式$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$给出．这种给出数列的方法包括两部分：（1）给出数列的前若干项，（2）给出由前项推出后项的递推公式，二者缺一不

可.这个方法与用数学归纳法推证命题的两个步骤有些类似.

三、学习等差数列、等比数列时的注意事项

等差数列和等比数列是两种简单而又重要的数列，它们都有通项公式与前n项和的公式.从函数观点来看，等差数列的通项a_n可看成是项数n的一次函数，等比数列的通项a_n可看成是项数n的指数函数（这里自变量n是自然数）.两种数列之间，还有这样的联系：

如果$\{a_n\}$是等差数列，那么$\{c^{a_n}\}$是等比数列($c>0$)；

如果$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，那么$\{\log_m a_n\}$是等差数列.

对于等差数列，$a_{n+1}-a_n$是个常数；对于等比数列，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$是个常数.这是两种数列的基本性质，也是证明一个数列成等差、等比的基本方法.并注意：公差是指数列从第二项起后一项减前一项，公比是指后一项比前一项，不能搞颠倒了.

两种数列各有两个通项公式和求和公式，但其中各有一个是基本的.如等差数列的求和公式中，$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$是基本的，从它可推出另一公式$s_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$.应强调的是，四个基本公式在课本中都是用不完全归纳法推出的，我们还应该会用数学归纳法严格地对它们进行证明.

两个数的等差中项就是这两个数的算术平均数；两个数的等比中项有两个，它们互为相反数；当两个数都是正数时，其正的等比中项就是这两个数的几何平均数.

四、解某些数列题的途径

1．对有些稍复杂一点的数列，可经适当变形，将它们分解成等差数列、等比数列和其它已知数列.如对于“求数列3×4，5×7，7×10，9×13，…的前30项的和”这道题，就可先写出其通项公式$a_n=(2n+1)(3n+1)$以观察其特点，从而可很快看出应将它展开，得到

$$a_n=6n^2+5n+1,$$

由于以等号右边的每一项为通项的数列的前n项的和都能求出，整个数列的前n项的和就可求了.

2．在题目中需要设成等差数列或等比数列的三个数时，一般将它们设为$a-d$，a，$a+d$.或$\frac{a}{q}$，a，aq，以便于运算.例如，在解题过程中需要设成等差数列的三角形三内角时，如果将它们设成$a-d$，a，$a+d$，由于其和为180°，便立即得到中间的内角a为60°，从而这三内角可表示为$60°-d$，60°，$60°+d$.而如果将三内角设成a，$a+d$，$a+2d$，计算就要麻烦多了.

类似地，在设成等差数列、等比数列的四个数时，一般将它们设成$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$和$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3.

3．注意运用等差数列、等比数列的基本性质解题.如“已知$\{a_n\}$是等差数列，求数列$\left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right\}$的前$n$项的和”这道题，只要注意到将各项的分母有理化后，这些分母实际上都是公差，从而可通过将各分子相加很快求出s_n，

即
$$s_n=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{d}$$
$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}$$
$$=\frac{a_{n+1}-a_1}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}})}$$
$$=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

五、关于极限概念的理解

数列的极限是这样定义的：“对于一个数列，如果存在一个常数A，无论预先指定多么小的正数ε，都能在数列中找到一项a_N，使得这一项后面的所有项与A的差的绝对值都小于ε（即当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立），就把常数A叫做数列$\{a_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$”.

为了正确理解这个非常重要的概念，请注意：

1．这个定义的直观意义是：数列$\{a_n\}$以A为极限，是表示当n无限增大时，数列$\{a_n\}$中的项a_n无限趋近于常数A.

2．正数ε是任意指定的.首先，它是可以变动的，可以取得任意小，但一经给定之后，它就是一个确定的正数了.然后，如果能找到相应于所指定的ε的N，使得当$n>N$时$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，就说明数列$\{a_n\}$当项数无限增大时与数A充分接近，即以A为极限.要很好体会ε这个数的“两重性”：它是可以任意变动的，而在找相应的N时，它又是确定的.

3．数列$\{a_n\}$以A为极限，是指对所有大于N的n来说，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$都成立.如果这个不等式只是对大于N的一部分n成立，就不能说明数

列 $\{a_n\}$ 以A为极限．例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 的所有奇数项为-1，所有偶数项为1．尽管这个数列从第一项起，所有的奇数项与-1的差的绝对值都是零，因而小于任何预先指定的正数ε，但-1却不是这个数列的极限．

关于函数的极限，我们可以结合课本例题中的表格、图象，或借用数列极限的确切定义来了解这个概念的实际意义．如可将 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$进行类比，这里$x$相当于$n$，$f(x)$相当于$a_n$．

六、极限运算中易出错的地方

对于极限的四则运算法则，如果我们不大注意运用这些公式的前提条件，常出计算错误．我们来看下面两道题的推算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)$
$=0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$
$=0+0+\cdots+0=0$.

想一想上述推算过程中有没有错误？错在哪里？仔细检查会发现：在(1)中，$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)$ 并不存在，因而不能运用公式$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，应记住，用这个公式的前提是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在；在(2)中，项数$n$不是一个常数，它随着极限过程无限增大，这样就不能运用公式

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(k)})$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}+\lim_{n\to\infty}a_n^{(2)}+\cdots+\lim_{n\to\infty}a_n^{(k)}.$$

事实上，课本中关于两个数列极限的四则运算法则，运用数学归纳法可将其推广到任意有限个数列的情形，就是说，尽管数列个数可以任意多，但在取极限的过程中它必须是固定的．

七、求函数极限常用的方法

1．课本上指出（多数并未证明），幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数在其定义域内的每一点处都是连续的．根据函数$f(x)$在点x_0处连续的定义，要求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，只须求$f(x)$在$x=x_0$时的函数值就行了．这就把求极限的问题化成了求函数值的问题．如$\sin x$在$x=0$时有定义，因此在这点连续，从而$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)=\sin 0=0$.

2．在求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$时，如果$p(x)$，$q(x)$分别是关于$x$的$m$次和$n$次多项式，且$m\leqslant n$，那么可将分式的分子、分母同除以$x^n$后再求极限．例如，我们来求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}.$$

由于式中的分子、分母分别是三次、四次多项式，可用x^4同时去除分子、分母，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+x}{x^4}}{\frac{x^4+3x^2+1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}},$$

这样，分子、分母就都有极限了，从而可用极限的运算法则求得结果．

3．在求某些两函数之商当$x\to x_0$的极限时，如果分母在$x=x_0$时等于零，那么可看看能否通过约去分子、分母中含$x-x_0$的因式，使其变得可以求极限．例如，我们来求

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}.$$

当$x=3$时，分母为0，函数在$x=3$处不连续．怎么办呢？能不能通过适当的变形约去$x-3$这个因子呢？看来是可以的．事实上，

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(1+x)-2^2}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2},$$

至此极限就很容易求了，它等于$\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}$

$=\frac{1}{4}$.

等差数列与等比数列的基本性质

北京　明知白

数列是中学数学中的重要内容之一．要学好这部分知识必须认真掌握有关的定义、通项公式与求和公式，并在此基础上，归纳出它们的一些基本性质，以便更好理解与解决有关数列的各种问题．这里，我们初步总结出数列的八条基本性质，供大家参考．

性质一　a，A，b成等差数列的充要条件是：

$$a+b=2A.$$

由等差数列的定义，这条性质是显然的．

性质二　设$\{a_n\}$是等差数列，若$m+n=k+l$，则$a_m+a_n=a_k+a_l$．

证明　$\because$

$$a_m=a_1+(m-1)d,$$
$$a_n=a_1+(n-1)d,$$
$$a_k=a_1+(k-1)d,$$
$$a_l=a_1+(l-1)d.$$

$\therefore$

$$a_m+a_n=2a_1+(m+n-2)d,$$
$$a_k+a_l=2a_1+(k+l-2)d.$$

$\because$ $m+n=k+l$,

$\therefore$ $a_m+a_n=a_k+a_l$．

说明：设等差数列是有穷的，末项为a_l，取$k=1$，则有$a_m+a_n=a_1+a_l$，它的意义是：在等差数列中，与首末两项等距离的两项之和，等于首末两项之和．性质二是这一性质的推广．

性质三　若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则$\{ka_n+b\}$（其中k，b是常数，且$k\neq0$）是公差为kd的等差数列．

证明Ⅰ　设$ka_n+b=c_n$，

则$c_{n+1}-c_n=(ka_{n+1}+b)-(ka_n+b)$

$$=k(a_{n+1}-a_n)=kd.$$

其结果是一常数，所以$\{c_n\}$即$\{ka_n+b\}$是公差为kd的等差数列．

证明Ⅱ　根据通项公式

$$ka_n+b=k[a_1+(n-1)d]+b$$
$$=(ka_1+b)+(n-1)(kd),$$

$\therefore$　$\{ka_n+b\}$是首项为ka_1+b，公差为kd的等差数列．

说明：以上两种方法是证明一个数列是等差数列的基本方法，应该很好掌握．

性质四　公差不为零的等差数列的通项a_n是项数n的一次函数，反之也对；而它的前n项的和S_n是项数n的二次函数．

证明　$\because a_n=a_1+(n-1)d$

$$=dn+(a_1-d),$$

由公差$d\neq0$可知a_n是n的一次函数，反之，设$a_n=kn+b$（k，b是常数且$k\neq0$），

$\because$ $\{n\}$是等差数列，由性质三，$\{kn+b\}$即$\{a_n\}$也是等差数列．

$\because$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$$=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n,$$

由$d\neq0$得：S_n是n的二次函数．

说明：这条性质没有条件$d\neq0$，显然是不对的，应予注意．

性质五　a，G，b成等比数列的充要条件是$a\cdot b=G^2$．（其中a，G，b均不为零）

由等比数列的定义，这条性质是显然成立的．

性质六　设$\{a_n\}$是等比数列，若$m+n=k+l$，

则　$a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l$．

这条性质的证明，可仿照性质二，留给同学们去证，同样，当$\{a_n\}$是有穷数列时，我们有：与首末两项等距离的两项之积，等于首末两项之积的结论．

性质七　若$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，则$\{ka_n{}^\alpha\}$（k是不为零的常数）是公比为q^α的等比数列．

证明　$\because \frac{ka_{n+1}{}^\alpha}{ka_n{}^\alpha}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha=q^\alpha$,

是一常数，由等比数列定义知，$\{ka_n{}^\alpha\}$是公比为q^α的等比数列．

性质八　设$\{b_n\}$是各项为正的等比数列，则$\{\log_a b_n\}$是等差数列，反之也对．

证明　设$\{b_n\}$是各项为正的等比数列，公比为q．

$\because$ $\log_a b_{n+1}-\log_a b_n=\log_a\frac{b_{n+1}}{b_n}$

$$=\log_a q,$$

$\therefore$　$\{\log_a b_n\}$是公差为$\log_a q$的等差数列．

反之，设$\{\log_a b_n\}$是等差数列，则

$$\log_a b_{n+1} - \log_a b_n = d.$$

于是 $\log_a \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = d$, $\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a^d$。

这说明 $\{b_n\}$ 是各项为正的等比数列.

以上八条性质，有的是课本上的内容，有的是课本中某些习题的抽象与概括，有的则是书中某些习题的引深与推广，从而成为一般性的结论.利用这些性质来解决某些问题，或则显而易见，不证自明；或则认清本质，触类旁通，这件工作希望同学们自己认真做一作，以加深对这些性质的理解、记忆与运用，并能初步体会归纳这些性质的好处，下面我们再补充一些题目，进一步说明这些性质的应用.

〔例1〕若方程

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$$

有两个相等的实根，求证 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 成等差数列.

分析 由性质一，只要证

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}，\text{即证} bc + ab = 2ac.$$

证明 显然$x=1$是方程的一个根，又因方程两根相等，所以$x_1 = x_2 = 1$.

由韦达定理：

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c(a-b)}{a(b-c)} = 1,$$

$$ac - bc = ab - ac,$$

$$bc + ab = 2ac$$

两边同除以abc，得$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$.

故 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列.

说明：此题一般易从判别式为零入手，也是可以的，但较为麻烦.

〔例2〕 $\{a_n\}$ 是等差数列，且

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20, \quad \text{求：}S_{20}.$$

分析 注意到：$6+15=9+12$，故可以利用性质二.

解 $\because$ $a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12}$，

$\therefore$ $a_6 + a_{15} = 10$.

又 $a_1 + a_{20} = a_6 + a_{15} = 10$，

$$\therefore \quad S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \times 20}{2} = \frac{10 \times 20}{2} = 100.$$

〔例3〕已知 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，求证

$$\frac{b+c}{a}，\frac{c+a}{b}，\frac{a+b}{c}\text{也成等差数列}.$$

此题可根据定义或性质一证，但不如用性质三好.

证明 $\because$ $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，

各项乘以$a+b+c$后仍成等差数列，

$\therefore$ $\dfrac{a+b+c}{a}$，$\dfrac{a+b+c}{b}$，$\dfrac{a+b+c}{c}$成等差数列.

即 $1+\dfrac{b+c}{a}$，$1+\dfrac{a+c}{b}$，$1+\dfrac{a+b}{c}$成等差数列.

各项减1后仍成等差数列，

$\therefore$ $\dfrac{b+c}{a}$，$\dfrac{c+a}{b}$，$\dfrac{a+b}{c}$成等差数列.

〔例4〕试求等差数列相邻三项的平方，分别是等比数列相邻三项的条件.

分析 设等差数列相邻三项为$a-d, a, a+d$. 由性质五，有$(a-d)^2 \cdot (a+d)^2 = (a^2)^2$.由此找出条件.

解 设等差数列相邻三项的平方为

$(a-d)^2$，a^2，$(a+d)^2$.

据题意有 $(a-d)^2 \cdot (a+d)^2 = a^4$，

由此可得$(a^2-d^2)^2 = a^4$，

$$a^2 - d^2 = \pm a^2.$$

由 $a^2 - d^2 = a^2$，得$d=0$.

由 $a^2 - d^2 = -a^2$，得$d = \pm\sqrt{2}a$.

因此，所求条件是$d=0$或$d=\pm\sqrt{2}a$.

〔例5〕设 $\{a_n\}$ 为等比数列，且$a_1 + a_8 = 387$，$a_4 \cdot a_5 = 1152$. 求此数列的公比.

分析 注意到：$1+8=4+5$，由性质六，$a_1 \cdot a_8 = a_4 \cdot a_5$，于是可以解关于$a_1$与$a_8$的二元方程组，从而求出公比.

解 $\because$ $a_1 \cdot a_8 = a_4 \cdot a_5 = 1152$，

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_8 = 387 \\ a_1 \cdot a_8 = 1152 \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_8 = 384; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 384, \\ a_8 = 3. \end{cases}$

又 $a_8 = a_1 \cdot q^7$，

$$\therefore \quad q^7 = \frac{a_8}{a_1} = \frac{384}{3} = 128, q_1 = 2.$$

$$\text{或} \quad q^7 = \frac{a_8}{a_1} = \frac{3}{384} = \frac{1}{128}，\quad q_2 = \frac{1}{2}.$$

〔例6〕已知等差数列$\lg a_1, \lg a_2, \cdots$的第五项是8，第八项是5，求$a_1, a_2, \cdots$的前十三项之和.

解 由题意$\lg a_5 = 8$，$\lg a_8 = 5$.

$\therefore$ $a_5 = 10^8$，$a_8 = 10^5$.

$\because$ $\{\lg a_n\}$ 是等差数列，由性质八，$\{a_n\}$ 是等比数列，

$\therefore\ \begin{cases} a_5 = a_1 q^4 = 10^8, \\ a_8 = a_1 q^7 = 10^5. \end{cases}$

解之得 $q = \frac{1}{10}, a_1 = 10^{12}$.

故 $S_{13} = \frac{a_1(1-q^{13})}{1-q} = \frac{10^{12}(1-\frac{1}{10^{13}})}{1-\frac{1}{10}}$

$= \frac{10^{13}-1}{9}$

$= \underbrace{11\cdots1}_{13个}$.

〔例7〕试问数列

$\lg 100, \lg(100\sin\frac{\pi}{4}), \lg(100\sin^2\frac{\pi}{4}), \cdots,$

$\lg(100\sin^{n-1}\frac{\pi}{4})$ 的前多少项的和的值最大？并求出这个最大值.（这里取$\lg 2 = 0.3010$）

这是1979年全国高考数学试题，这是一个综合性题目，但是如果关于数列的基础知识熟练的话，也不是很困难的，请看：

（1）显然100，$100\sin\frac{\pi}{4}$，$100\sin^2\frac{\pi}{4}$，…是一个等比数列，由性质八，所给数列：$\lg 100$，$\lg(100\sin\frac{\pi}{4})$，$\lg(100\sin^2\frac{\pi}{4})$，…是一个等差数列；

（2）再由性质四，等差数列前n项之和S_n是n的二次函数.

由上述两点分析，所求问题实质上是求一个二次函数的最大值问题，这是不困难的，于是一个较为综合的数学问题，运用数列的两条基本性质，分解为一个易于解决的问题了，当然这题还有其他好的解法.

解： $\because a_n = \lg(100\sin^{n-1}\frac{\pi}{4})$

$= \lg 100 + (n-1)\lg\sin\frac{\pi}{4}$

$= 2 - \frac{1}{2}(n-1)\lg 2$,

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为2，公差为$-\frac{1}{2}\lg 2$的递减的等差数列，它的前n项的和

$$S_n = \frac{[2 + 2 - \frac{1}{2}(n-1)\lg 2]\cdot n}{2}$$

$$= (-\frac{1}{4}\lg 2)n^2 + (2 + \frac{1}{4}\lg 2)\cdot n.$$

它是关于n的二次函数.

$\because -\frac{1}{4}\lg 2 < 0$,

$\therefore S_n$有最大值.

当$n = -\frac{b}{2a} = -\frac{2+\frac{1}{4}\lg 2}{2\times(-\frac{1}{4}\lg 2)}$

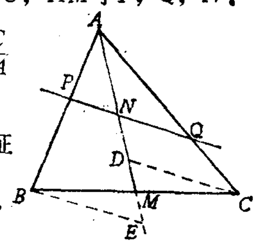
≈ 13.78时，

S_n有最大值，但n是自然数，故取离顶点横坐标13.78最近的整数，即$n = 14$时，S_n有最大值，经计算，这个最大值是$S_{14} \approx 14.30$.

〔例8〕设AM是$\triangle ABC$中BC边上的中线，任作一直线分别交AB，AC，AM于P，Q，N. 求证

$\frac{PB}{PA}$，$\frac{NM}{NA}$，$\frac{QC}{QA}$

成等差数列.



分析 由性质一，只要证

$\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = \frac{2NM}{NA}$.

为此，需添加适当的辅助线，利用三角形相似或平行截割定理而得证.

证明 作$CD \parallel PQ$交AM于D，作$BE \parallel PQ$交AM延长线于E.

$\because BM = CM, \quad BE \parallel CD,$

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle CDM$， 故 $EM = DM$.

于是 $NE + ND = 2NM$.

$\because BE \parallel PQ, \quad CD \parallel PQ,$

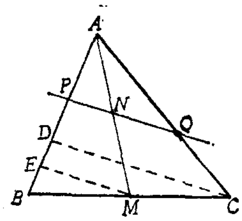
$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{NE}{NA}, \quad \frac{QC}{QA} = \frac{ND}{NA}$.

两式相加，得

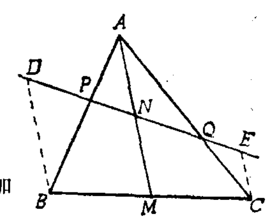
$\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA}$

$= \frac{NE + ND}{NA}$

$= \frac{2NM}{NA}$.



故 $\frac{PB}{PA}$，$\frac{NM}{NA}$，$\frac{QC}{QA}$成等差数列.



也可用下面两种添加辅助线的方式证明之：

（1） 作$CD \parallel PQ$交AB于D，
作$ME \parallel PQ$交AB于E；

（2） 作$BD \parallel AM$交QP延长线于D，
作$CE \parallel AM$交PQ延长线于E.

解题研究

求函数极限的一种方法
——近似逼近法

天津师院学生　陶　杰摘译

初学微积分的同学常在求某些点的函数极限的时候感到棘手，例如“求$\lim\limits_{x\to a}f(x)$的值，而$f(x)$恰于a点无定义或者$f(x)$在a点的左右有不同的定义式”….

本文针对这些问题给出一种方法——近似逼近法．它可以帮助我们借助初等数学的知识克服该部分难点，又能够自然地引出ε—δ方法和初步领会无穷小概念．

下面以具体例子加以说明．

〔例1〕 已知　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 0, & x=2,\end{cases}$
求$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$的值．

在解这道题的时候，有的同学不能理解老师的启发，仍然错误地断定x在2附近（但$x\neq 2$）时，$f(x)$的极限值是零．用近似逼近法可以明白地看到当x趋近于2时，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$的值是4而不是0．

当我们用近似逼近法求$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$的值时，先设u是一个非常小的正数或者负数（但$u\neq 0$），再去考虑$f(2+u)$．就有

$$\begin{aligned}&f(2+u)\\&=(2+u)^2\\&=4+4u+u^2.\end{aligned}$$

随着我们让u变得愈来愈小，$f(2+u)$可以很清楚地表明：当x趋近于2时$f(x)$趋近于4．

〔例2〕 已知　$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$x\neq 1$，

求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$的值．

解此题的典型方法是消去零因子$(x-1)$，亦就是$f(x)$的分子、分母同时被$(x-1)$除，于是得到$f(x)=x+1$，因为$x\neq 1$（即$x-1\neq 0$）．然而这种方法使我们感到困惑不解的是：为什么不在第一个式子里就限定$f(x)=x+1$，而由此避免模糊不清的$\dfrac{0}{0}$型式呢？

用近似逼近法来解此题就可以避免消去零因子这种被认为是必不可少的手段．

仍然借用u，用$f(1+u)$代替$f(x)$去求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$时，就有

$$\begin{aligned}&f(1+u)\\&=\frac{(1+u)^2-1}{1+u-1}\\&=\frac{1+2u+u^2-1}{u}\\&=2+u.\end{aligned}$$

由于u是一个可以任意小的正数或负数，所以$f(1+u)=2+u\to 2$（当$u\to 0$时），从而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$是很清楚的．

这种办法同消零因子法比较，其优点之一就是不必一开始就必须认定$(x-1)$是分子x^2-1的因式了．

此外近似逼近法对于求某点的左、右侧分别被不同的定义式所确定的函数的极限时，是特别有用的，这点用下面的例子加以说明．

〔例3〕 已知　$f(x)=\dfrac{[x-x]}{x}$，$x\neq 0$，

（$[x]$表示不大于x的最大整数）

求当$x\to 0^+$，$x\to 0^-$时，$\lim f(x)$的值．

为了求得右侧极限我们考虑$f(0+u)$（这里u是一个很小的正数）．于是

$$\begin{aligned}&f(0+u)\\&=\frac{[0+u]-(0+u)}{0+u}\\&=\frac{-u}{u}\\&=-1.\end{aligned}$$

请注意u是一个很小正数，这一点在这里起着决定性的作用．

在左侧，考虑$f(0-u)$（u还是一个很小的正数），于是

$$\begin{aligned}&f(0-u)\\&=\frac{[0-u]-(0-u)}{0-u}\\&=\frac{-1+u}{-u}\\&=\frac{1}{u}-1.\end{aligned}$$

因而，当u变得愈来愈小时，$f(0-u)$是无限增长的（参考图1）．

$f(x)$

$=\frac{[x]-x}{x}$，$x\neq 0$，

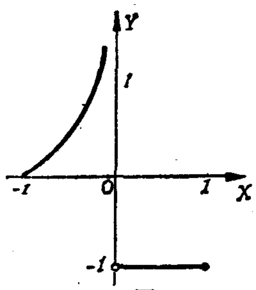


图1

这种通过小正数u来考虑$f(k+u)$和$f(k-u)$的办法可以很容易地求出函数在每个整数k点的左侧或右侧的极限．

〔例4〕 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+4, & x<2,\\ x^3, & x\geqslant 2,\end{cases}$

求$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$的值．

我们还是和前面的作法一样，用u表示一个很小的正数．于是

$$f(2+u)=(2+u)^3=8+12u+6u^2+u^3,$$

$$f(2-u)=(2-u)^2+4=4-4u+u^2+4=8-4u+u^2.$$

当u趋于零时，$f(2+u)$和$f(2-u)$都趋于8．于是，我们可以很清楚地看出$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$的值是8．

综上所述，当求$\lim\limits_{x\to a}f(x)$值的时候，就考虑$f(a+u)$的情形；当求单侧极限时，则通过小正数u考虑$f(a+u)$或$f(a-u)$的情形．一句话就是用$\lim\limits_{u\to 0}f(a+u)$代替$\lim\limits_{x\to a}f(x)$．

近似逼近法还有另外几个优点．

1．它可以帮助我们从另一角度观察ε—δ证法．在例4中，当$0<u<1$时．我们得到

$$|f(2+u)-8|=|12u+6u^2+u^3|=|u||12+6u+u^2|<19|u|,$$

$$|f(2-u)-8|=|-4u+u^2|=|u||-4+u|<4|u|.$$

因而任取满足$0<u<\delta<1$的一切u的时候，都有$|f(2\pm u)-8|<19\delta$．所以对任给$\varepsilon>0$，只要选取$\delta=\varepsilon/19$（这里δ是小于1的正数）就会满足当$0<|x-2|<\delta$时，$|f(x)-8|<\varepsilon$．

2．这种逼近法为我们了解非标准分析的无穷小量作了准备，特别是求$f(a+u)$以及$f(a-u)$时，两式中的u是完全相同的无穷小量．

3．为进一步学习求微商作了准备．一旦同学借助u求得了$f(a+u)$以后，就可以很容易地过渡到微商$(f(a+u)-f(a))$了．而在其后就可以顺利地理解

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx=\lim_{u\to 0}\int_a^{b-u}f(x)dx\text{了}.$$

——选自美国“*Mathematics Teacher*”杂志1980年7月号

学习导数和微分的几个问题

北京 景山

导数和微分是微积分的主是内容之一．微积分是以函数为研究对象，而导数是解决函数变化率问题，微分是解决函数的改变量问题，它们构成了微分学的两大基本问题．微分是在导数概念的基础上定义的，而导数又可看成是函数的微分与自变量微分之商，求微分的方法与求导数的方法完全相同，所以高中数学课本把这些内容编排在同一章里，以导数作为重点．

学习这一章的基本要求是：理解导数的概念，掌握基本初等函数的求导公式和函数的求导法则，并能运用这些公式和法则，熟练地求初等函数的导数，理解微分的概念，会求初等函数的微分．

一、导数的概念

函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$，就是函数改变量Δy与自变量的改变量Δx的比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当$\Delta x\to 0$时的极限，即$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

它的几何意义是曲线$y=f(x)$在点$(x, f(x))$处的切线的斜率．

在学习这一概念时，要注意三个问题：

1．要重视这个概念的实际意义，明确导数是从解决非均匀变化的变化率问题中抽象出来的数学问题，了解导数概念在解决这些实际问题中所起的作用．课本是以自由落体运动的瞬时速度为例导入这个概念的．

物理中学过，作直线运动的物体的平均速度、路程和时间之间的关系为 $平均速度=\frac{路程}{时间}$，

如果是匀速运动，这个平均速度是常数，而自由落体运动是非匀速直线运动，它的速度随时在变，不能直接用路程除以时间求得速度，那么怎样求任意时刻的速度（瞬时速度）呢？这种方法是把某段时间内的平均速度当时间改变量趋于零时的极限作为其瞬时速度，我们称这个极限为路程函数对时间的导数．这里不仅规定了瞬时速度的概念，而且还给出了瞬时速度的计算方法．对于其它非均匀变化的变化率问题，都可以仿此方法处理，即可将它们归纳为当$\Delta x\to0$时求平均变化率的极限．总之，导数的概念就是从解决这样一类非均匀变化的变化率问题而抽象出来的，现将瞬时速度与导数对照如下：

瞬　时　速　度	导　　数
位置改变量$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$	函数改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
时间改变量Δt	自变量改变量Δx
平均速度$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$	导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

类似的实际问题还很多，例如运动的物体所作的功W，随时间t的变化而非匀速地变化，其函数关系设为$W=f(t)$，那么，t从t_0变到$t_0+\Delta t$时，功的改变量为ΔW；于是$\frac{\Delta W}{\Delta t}$就是在时间$\Delta t$内平均功率，而极限

$$W=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

即为时刻t_0的瞬时功率．所以功率是功对时间的导数．

又如，电流通过导线的横截面的电量Q（库仑），随时间t（秒）的变化而非均匀地变化，其函数关系设为$Q=f(t)$．那么，t从t_0变到$t_0+\Delta t$时，电量的改变量为ΔQ；于是$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$就是在时间$\Delta t$内平均电流强度，而极限

$$I=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

为时刻t_0的电流强度．所以电流强度是电量对时间的导数．

可见，如果弄清了导数概念的实际意义，不仅有助于理解导数概念的本质，而且便于用这个概念去解决实际问题．

2．导数的定义实际上也就是计算导数的方法．初学时，要按照课本第63页规定的求函数 $y=f(x)$的导数的一般方法的三个步骤来进行求导数练习．作为例子，我们来求函数$y=f(x)=x^2$的导数．

解：第一步　求改变量
$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=(x+\Delta x)^2-x^2\\&=2x(\Delta x)+(\Delta x)^2;\end{aligned}$$

第二步　算比值
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=2x+\Delta x;\end{aligned}$$

第三步　取极限　$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$= 2x.$$

由上例可以看出，导数实际上就是一种特殊的极限，因此在求导数时，极限的性质都可以运用.

3. 函数可导与连续的关系. 可导一定连续，但反过来，连续并不一定可导，也就是，连续是可导的必要条件，但不是充分条件，课本第64页以函数 $y = |x|$ 为例来说明该函数在点 $x = 0$ 处虽然连续，但并不可导.由此可见，可导函数只是连续函数的一部分.

二、求导方法

本单元主要是在导数定义的基础上，根据导数的定义和极限的某些性质，推导了初等函数的十二个求导公式和函数六个求导法则，它们是对初等函数求导的基础，必须熟练掌握.

上述十二个公式包括常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的导数公式，它们可分成三组：

第一组　$y = c$（c为常数）和 $y = x^n$ 的导数

函数 $y = c$ 的导数等于零，可由定义直接推出，它的几何意义是平行于x轴的直线上任何一点的切线都是这条直线本身，所以其切线斜率都是零.可结合几何意义来记忆和理解这个公式.

公式　$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$，是分几种情况推导的.

当n为正整数时，可根据导数定议得出.这里在求Δy时，用到了二项式定理：

$$(x + \Delta x)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot (\Delta x) + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n (\Delta x)^n,$$

展开后，再运用极限的运算法则，就可求得；

当n为负整数时，可设$n = -m$（m为正整数），再利用商的求导法则求得；

当n为任意实数时，可利用指数函数求导公式和复合函数求导法则求得.

这个公式的几个特例经常用到，应该记熟：

当$n = 1$时，　$y' = (x)' = 1$；

当$n = \frac{1}{2}$时，　$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$；

当$n = -1$时，　$y' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$.

根据这个公式并运用函数的求导法则还可求得函数

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$（其中$a_n$，$a_{n-1}$，$\cdots a_1$，$a_0$为常数）的导数：

$$y' = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1) x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

当n为整数时，它就是多项式函数的导数公式.

第二组　对数函数和指数函数的导数.

对数函数 $y = \log_a x$ 的导数为 $y' = \frac{\log_a e}{x}$，它是由导数定义和根据重要极限

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

推出的.

这个公式的一个特例为$a = e$时，

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

因为指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $x = \log_a y$ 互为反函数，由反函数的求导法则，可得指数函数 $y = a^x$ 的导数，即

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a.$$

这个公式的一个特例为$a = e$时，

$$y' = (e^x)' = e^x.$$

第三组　三角函数和反三角函数的导数.

三角函数$y=\sin x$的导数可由导数的定义和重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

推得：

$$y'=(\sin x)'=\cos x,$$

再由复合函数的求导法则可得

$$y'=(\cos x)'=-\sin x,$$

利用上面两个结果和商的求导法则，可得

$$y'=(\operatorname{tg}x)'=\sec^2 x,$$

$$y'=(\operatorname{ctg}x)'=-\csc^2 x,$$

再由反函数的求导法则，可得到四个反三角函数的导数公式：

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(\operatorname{arc\,tg}x)'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y'=(\operatorname{arc\,ctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

这八个公式的符号，容易弄错，可这样来记：带"正"字的函数的导数符号为正号，带"余"字的函数的导数符号为负号，即正弦、正切、反正弦、反正切的导数都为正号，余弦、余切、反余弦、反余切的导数都为负号.

运用复合函数的求导法则，可使基本初等函数求导公式的应用范围大大扩充了，实际上根据基本初等函数的导数公式、六个求导法则，就能求出一切初等函数的导数.所以复合函数的求导法则必须掌握.

学习复合函数求导法则，要注意两点：

其一，给定一个复合函数，要会将它进行分解，如复合函数

$$y=\sin(x^2),$$

可分解为函数　$y=\sin u$ 和 $u=x^2$；

其二，在求复合函数的导数时，不要忘记乘以中间变量的导数．如求复合函数

$$y=\sin\sqrt{x}$$

的导数时，常出现如下错误：

$$y'=(\sin\sqrt{x})'=\cos\sqrt{x}$$

实际上，它应该为

$$y'=(\sin\sqrt{x})'=\cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}.$$

求复合函数的导数可这样来考虑：在函数$y=f(x)$的表达式中，找出所出现的基本初等函数；将复合函数分解，明确各个中间变量之间的关系；利用基本初等函数求导公式和函数的求导法则一步一步地求导数.

例如，求函数　$y=\sin(\cos\sqrt{x})$ 的导数.

解：函数y是复合函数，表达式中涉及到的函数有正弦、余弦和幂函数；复合函数的第一个中间变量为正弦函数，第二个中间变量为余弦函数，第三个中间变量为幂函数；求导过程如下：

$$y'=[\sin(\cos\sqrt{x})]'$$

$$=\cos(\cos\sqrt{x})\cdot(\cos\sqrt{x})'$$

$$=\cos(\cos\sqrt{x})(-\sin\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'$$

$$=\cos(\cos\sqrt{x})(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

（下转13页）

导数和微分的应用学习提要

北京 观 德

高中数学"导数和微分的应用"一章中的主要内容是利用导数来讨论函数的增减性与极值，通过求闭区间上函数的最大值与最小值来解决一些实际问题，以及利用微分来进行近似计算.

一、理解微分中值定理的内容和意义

理解并掌握微分中值定理的内容和意义，是学会用导数去解决一些实际问题的关键.课本中对这一定理是利用函数图象进行描述加以说明的，并没有进行数学证明，这个定理之所以叫做中值定理，是因为它与自变量区间内的某个中间值有关.这一定理是我们将来利用导数研究函数性质的根据，在微积分学中占着极其重要的地位.

值得注意的是：定理中的两个条件"$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续"和"$f(x)$在开区间(a, b)内可导"，两者缺一不可，比如，如果缺少在开区间(a, b)内可导这一条件，就不能保证结论中$f'(\xi)$的存在.此外，还要注意定理结论中的"至少"两字，就是说，如果定理条件成立，那么这样的ξ至少有一个，也可能多于一个（如课本图9—1中所示的ξ就有两个），当$f(x)=kx+m$时，这样的ξ甚至有无限多个，也就是(a, b)内的一切点x都能充当ξ.

理解并掌握了微分中值定理的内容和意义后，还要会运用它去证明判定可导函数增减性的定理（即课本第115页定理2），然后会利用这个判定定理去判断可导函数的增减性.这里必须注意：定理中所说的"如果在(a,b)内$f'(x)>0$"（或"$f'(x)<0$"），是指对(a, b)内一切x值，恒有$f'(x)>0$（或$f'(x)<0$），否则就不能利用这一定理来判定函数的增减性；其次，这个定理的条件是充分的，但并非必要，也就是说，$f(x)$在(a, b)内是增（减）函数，并不能推出(a, b)内$f'(x)>0$（或$f(x)<0$）.例如，课本图9—3所示$f(x)=x^3$在$(-\infty, +\infty)$内是增函数，但在点$x=0$处的导数$f'(0)=0$.

最后，建议大家在学习这两个定理时，分各种情况画几个图，连定理带图一起记忆，这样就能记得既清晰又牢固了.在后面学习极值的判断方法时，也可以这样记忆.

二、熟练掌握求可导函数极值的方法

可导函数增减性的判定是讨论这类函数的极值的基础，而求这类函数在定义域内的极大（小）值与最大（小）值，是学习这一章的第一个重点.学习时，必须注意：

1．课本第119页说，"可导函数的极值点一定是它的驻点"，这里"可导"两字决不能丢掉.例如函数$f(x)=|x-1|$在点$x=1$处有极小值，$f(1)=0$，可是$f'(1)$根本不存在，当然$x=1$这一点不是$f(x)$的驻点.

2．可导函数的驻点，可能是极值点，但也可能不是极值点.看课本图9—7便可明白，应记住这个例子.

3．在求一个可导函数的极值时，常常把驻点附近的函数值的讨论情况列成表格，这样可使函数在各单调小区间的增减情况一目了然.例如，求函数$f(x)=x^4-2x^2-5$的单调区间和极值，我们知道，$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，由$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)=0$，得三个驻点：$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.它们把$(-\infty, +\infty)$分成四个单调小区间.我们可把函数在各单调小区间的情况列表如下：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值 -6	↗	极大值 -5	↘	极小值 -6	↗

所以$f(x)$在$(-1, 0)$及$(1, +\infty)$内是增函数，在$(-\infty, -1)$及$(0, 1)$内是减函数；极小值是-6，极大值是-5（最小值是-6，没有最大值）.

4．求闭区间$[a, b]$上的可导函数的最大（小）值的方法是：首先求出此函数在开区间(a, b)内的驻点，然后计算函数在驻点与端点的值，并将它们进行比较，其中最大的一个即为最大值，最小的一个即为最小值.这里无需对各驻点讨论其是否为极大（小）值点，讨论了也没有用.

如果函数不在闭区间$[a, b]$上可导，那么求函数的最大（小）值时，不仅要比较此函数在各驻点与端点的值，还要比较函数在定义域内各不可导的点处的值．

5．关于可导函数的极大（小）值与最大（小）值之间的区别和联系，课本第137页“小结”第三点说得很明白，应把这里的每句话的意思搞清楚．在处理实际问题时，一般是先找出自变量和因变量，建立自变量与因变量的函数关系式，并确定自变量的取值范围．如果由问题的实际情况，函数的定义域（即自变量取值范围）是开区间，这个函数是可导函数（其实我们接触到的函数基本上都是初等函数，初等函数在自己的定义域内都是可导的），并且按常理分析，此函数在这一开区间内应该有最大（小）值（注意：如果定义域是闭区间，那么只要函数在闭区间上连续，它就一定有最大值与最小值，这就是所谓“闭区间上的连续函数必定有界”这一著名定理，记住这个定理很有好处），然后通过对函数求导，发现在定义域内又只有一个驻点（即方程$f'(x)=0$在定义域内的根只有一个，在定义域外的根我们可以不管），那么立即可以断定这个驻点的函数值就是最大（小）值．知道这一点是非常重要的，因为它在应用上可以使我们减少许多麻烦．课本中举的几个例题，都是运用了这一点．这就省去了讨论驻点是否极值点，求函数在端点的值，以及同函数在极值点的值进行比较等步骤．

三、学会用近似公式计算某些函数值的近似值

微分在近似计算中应用很广．上一章同学们已学过利用微分来计算函数改变量的近似值，现在学习的是利用近似公式$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$来计算某些函数在点$x_0$处附近的函数值的近似值．这是学习这一章的第二个重点，我们首先要明白这个近似公式的由来；其次要记住运用这一公式的条件，即函数$f(x)$必须在点x_0处附近有定义，并且存在一阶导数，一般说来，自变量的改变量Δx的绝对值$|\Delta x|=|x-x_0|$越小，利用这个公式算得的函数值的精确度就越高．

运用这一公式求函数值的近似值的要点如下：

1．根据问题的要求，确定$f(x)$的函数表示式；

2．适当选择x_0与Δx的值，选择时必须使$|\Delta x|$尽可能小，并$f(x_0)$，$f'(x_0)$要容易计算．

举例来说，如果要求$\sqrt{2}$的近似值，我们可设$f(x)=\sqrt{x}$．那么x_0与Δx的值如何选择呢？取$x_0=1$，$\Delta x=1$行吗？不行！因为这样一来，$|\Delta x|$与$|x_0|$比较起来，$|\Delta x|$的值显得太大了．依靠我们熟记的$14^2=196$可知$1.4^2=1.96$（当然，从$1.41^2=1.9881$出发更好；从$1.5^2=2.25$出发也可以，这时Δx取负值），于是可选择$x_0=1.96$，$\Delta x=0.04$．另外，易知近似公式$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$这时成为

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}},$$

从而将$x_0=1.96$，$\Delta x=0.04$代入可得

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&\approx1.4+\frac{1}{2\times1.4}\times0.04\\&\approx1.4+\frac{1}{70}\\&\approx1.414\ .\end{aligned}$$

这样，我们通过近似公式，就从$\sqrt{2}$的一个比较粗糙的近似值1.4，求得$\sqrt{2}$的一个比较精确的近似值1.414.

（上接11页）

三、微分概念

函数$y=f(x)$的微分为　$dy=f'(x)\,dx$.

微分的概念，课本是通过函数改变量的近似值引入的，由于这个概念比较抽象，要通过微分的几何解释，来加深对这个概念的认识.根据微分的定义，求函数$y=f(x)$的微分，是在求出了函数$y=f(x)$的导数后，再乘以自变量的微分dx．对于比较简单的函数，求微分就根据这个定义来求；而对于比较复杂的函数，可利用微分的法则来求.

从微分的几何意义，我们有$\Delta y\approx dy$（见课本104页）

因为　$dy=f'(x_0)\,\Delta x$,

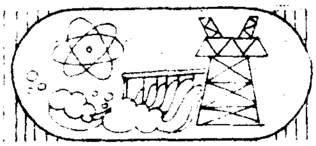
$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

所以有　$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\,\Delta x$,

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x$.

这个公式很重要，下一章要专门讲它的应用.

物 理



利用等电势点求电路的总电阻

北　京　傅大光

在电路比较复杂的情况下求总电阻，有时可以利用等电势点的概念。如果电路中有两个点的电势相等，则不论它们之间是通过一个电阻连结在一起的还是直接连结在一起的，在两点间都没有电流通过。由于等电势点之间没有电流通过，和把连结处拆开时一样，可设想在拆开前后给整个电路加上相等的电压，则由于拆开前后电路中的总电流相等，因此总电阻也是相等的。

如图1所示，$R_1=2\Omega$、$R_2=4\Omega$、$R_3=4\Omega$、$R_4=8\Omega$、$R_5=8\Omega$、$U_{AB}=12V$。求R_{AB}。

该电路实际为桥式电路，且$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$，因此电桥处于平衡状态，$C$点和$D$点的电势相等，$CD$之间没有电流通过，因此

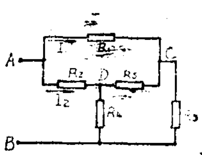


图 1

$$I_1=\frac{U_{AB}}{R_1+R_3}=\frac{12}{2+4}=2(A)$$

$$I_2=\frac{U_{AB}}{R_2+R_4}=\frac{12}{4+8}=1(A)$$

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I_1+I_2}=\frac{12}{2+1}=4(\Omega)$$

另外，由于C、D两点等电势，所以可以设想R_5不存在，CD间是拆开的，那么R_1跟R_3串联，R_2跟R_4串联，然后两条支路再并联，则

$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R_1+R_3}+\frac{1}{R_2+R_4}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$R_{AB}=4(\Omega)$$

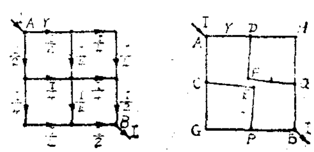
由于C、D两点等电势，所以也可以设想把C、D两点直接连结成一点，那么

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

$$=4(\Omega)$$

图2(a)是由12根电阻相等的电阻线连结成的田字形电路。每根电阻线的电阻是r，求总电阻R_{AB}。

解这种类型的题时，可以按对称的原则，把正中的节点拆开，如图2(b)所示。由于整个电路呈对称形式（以假想中的AB连线为对称线），所以由A到B的电流呈对称分配，如图2(a)所示。AD间以及AC间的电势降落都是$\frac{I}{2}r$，所以C、D两点电势相等；又因为DF以及CE间的电势降落都是$\frac{I}{4}r$，所以F和E是两个等势点，可见把F点和E点拆开以后并不影响整个电路的电流分配（即E、F两点的电势与拆开前相等，因此正中的节点拆开前后R_{AB}的阻值不变。



(a)　　图 2　　(b)

根据图2(b)，可以计算得 $R_{AB}=\frac{3}{2}r$

$=1.5r$。

另外也可以用合点法进行计算。即把所有电势相等的点合并为一点，图3与图2等效。

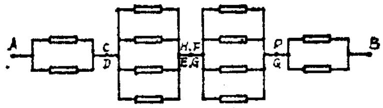


图 3

则 $R_{AB}=\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{4}+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}r$

$=1.5r$

图 4 是由12根电阻线组成的正方体图形，每根电阻都等于r，求R_{AB}。

因为整个电路以假想的AB连线为对称线，电流呈对称分配，因此C、D、E三点是等电势点，F、P、Q三点为等电势点。等电势点可以合并为一点，因此图 4 可以改画作图 5 。

则 R_{AB}

$=\frac{r}{3}+\frac{r}{6}+\frac{r}{3}=\frac{5}{6}r$

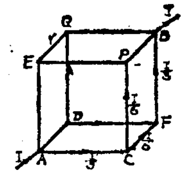


图 4

通过以上分析，可以知道利用等电势点求总电阻的方法是：

1．原来连结在一起的点，拆开后变为两点或几个点，若这些点的电势与原来的电势相等时，为便于计算，可以把它们拆开来求总电阻。

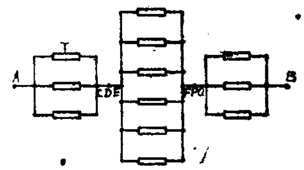


图 5

2．原来没有连结在一起的两点或几个点，若它们的电势相等时，为便于计算可以把它们合并为一点来求总电阻。

分析电容器电路的方法

齐齐哈尔　康继先

1．把电路中电势相等的导线和极板，用色笔着以相同颜色。电势不同部分着以另一种颜色如图 1 所示，(a) 图中画虚线部分着红色，实线部分着兰色。

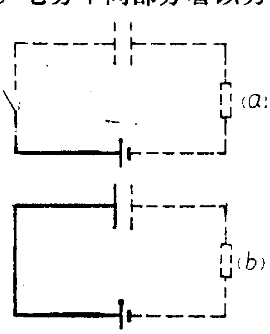


图 1

当把开关K闭合时，电荷开始移动，从新分布，电荷移动仃止后，电路中的电势分布如(b)图所示。这时电容器两极的电势差等于电池两端的电压。

2．如有n个电容器连接的电路，如图 2 所示，假定C_1，C_2，C_3为各电容器的电容，各极板上的电势分别为(U_1，U'_1)，(U_2，U'_2)，(U_3，U'_3)，……，各极板的电量分别为($+Q_1$，$-Q_1$)，($+Q_2$，$-Q_2$)，($+Q_3$，$-Q_3$)，……。

在分析时，要明确电荷和其它有关物理量之间的关系。在开始时，电荷的正负和大小可能不知道，然而，可以写成

$$U_1-U'_1=\frac{Q_1}{C_1},\ U_2-U_2'=\frac{Q_2}{C_2},$$

$$U_3-U'_3=\frac{Q_3}{C_3},\ \cdots\cdots。$$

这时，必需注意电势的减法，要从$+Q_i$极板上的电势减去$-Q_i$极板上的电势，画图时可把认为电势较高的极板标以正电($+$)符号，把和它对应的电势较低的极板标以负电($-$)符号，再从正侧到负侧画上箭头，如图 2 所示。

3．还要使用辅助方程式。(1) 在图 2 中，因为Ⅱ，Ⅲ，Ⅴ的极板用导线连上，则成为等电势。因此$U_1'=U_2=U_3'$。(2)因为Ⅱ，Ⅲ，Ⅴ极板都没有从外界给予电荷，而且原来就没有电荷；

$(-Q_1)+Q_2+(-Q_3)=0$ ……①

若从外界给予电荷q或原来就具有电荷q则$(-Q_1)+Q_2+(-Q_3)=q$ ……①′