代数拓扑学基础教程

〔美〕 J·R·Munkres 著
熊 金 城译

河 北 教 育 出 版 社

代数拓扑学基础教程

〔美〕 J·R·Munkres 著
熊 金 城 译

河 北 教 育 出 版 社

代数拓扑学基础教程

〔美〕 J·R·Munkres 著

熊 金 城 译

河北教育出版社出版（石家庄市城乡街44号）

河 北 新 华 印 刷 一 厂 印 刷　河 北 省 新 华 书 店 发 行

850×16 毫米 1/32　9.625 印张　248,000 字　1991 年 7 月第 1 版

1991 年 7 月第 1 次印刷　印数：1—640　定价：3.75 元

ISBN 7-5434-0950-x/G·778

译者前言

近年来，国内越来越多高等院校的数学系将代数拓扑学这门课程排上了课程表，因此选译一些国外的优秀教材当有必要。读者面前的这本《代数拓扑学基础教程》是根据J. R. Munkres所著《Elements of Algebraic Topology》一书的前半本译出的，适于用作高等院校数学系高年级大学生或研究生代数拓扑学课程一学期教材或教学参考书。掌握了点集拓扑和群论的基本知识的读者即可开始学习此书。

我们曾将此书作为教材在中国科学技术大学使用过。就我们的体验而言，此书取材的深度和广度比较适中，行文严谨，细腻；而又脉络清晰。更为难能可贵的是，每当引进重要的概念或者是讲述繁难的证明时，作者总是不遗余力地揭示其几何背景，阐明论证的构思，力图使读者有生动的几何直观并且能在总体上把握住所论内容的实质而不致于陷入单纯的逻辑推演。此外，作者在书中精心配置了一定数量水平适中的习题。通过做这些习题，读者既可增进对正文的理解，又可拓广视野。

加了星号的各节，大多讲的是代数拓扑学的各种深刻而又有趣的应用，从逻辑上讲，独立于本书的其他部分，也就是说删除它们并不影响理论的完整性。但我们觉得不讲授这些应用实在是一个大损失，因为作为应用对象的那些问题，学生原本就能够理解但却又无法证明，正好用来向他们显示代数拓扑学这门理论的锋芒，这对于提高他们的学习兴趣大有好处。

少许几个数学名词的中译，出于无章可寻，只得自拟。例如“Coherent topology”一词我们译作“相通拓扑”；这样一来，

“某空间的拓扑与它的一些子空间（的拓扑）相通”这句话在汉语上也就说得通了。（以前也有人译作“凝聚拓扑”）

由于译者水平所限，译文中的错误在所难免，敬祈读者指正。

顺此，对河北教育出版社，特别是该社杨惠龙先生为出版此书所作的努力表示衷心的谢意。

译　者

1989年夏于合肥

中国科学技术大学

目　录

第1章　单纯复合形的同调群……………………………（1）
§1　单纯形 ……………………………………………（2）
§2　单纯复合形和单纯映射 ……………………………（9）
§3　抽象单纯复合形 ……………………………………（19）
§4　复习材料：阿贝尔群 ………………………………（26）
§5　同调群 ………………………………………………（34）
§6　曲面的同调群 ………………………………………（43）
§7　零维同调群 …………………………………………（52）
§8　锥形的同调群 ………………………………………（55）
§9　相对同调群 …………………………………………（59）
*§10　任意系数同调群 ……………………………………（64）
*§11　同调群的可计算性 …………………………………（66）
§12　单纯映射诱导同态 …………………………………（77）
§13　链复合形和零调载体 ………………………………（89）
第2章　同调群的拓扑不变性……………………………（99）
§14　单纯逼近 ……………………………………………（99）
§15　重心重分 ……………………………………………（104）
§16　单纯逼近定理 ………………………………………（111）
§17　重分的代数 …………………………………………（119）
§18　同调群的拓扑不变性 ………………………………（125）
§19　同伦的映射的诱导同态 ……………………………（129）
§20　复习材料：商空间 …………………………………（139）
*§21　应用：球面映射 ……………………………………（145）

*§ 22　应用：Lefschetz 不动点定理 ……(151)
第 3 章　相对同调与 Eilenberg-Steenrod 公理 ……(160)
§ 23　正合同调序列 ……(160)
§ 24　拉锯引理 ……(168)
§ 25　Mayer-Vietoris 序列 ……(176)
§ 26　Eilenberg-Steerod 公理 ……(180)
§ 27　单纯同调论满足的公理 ……(184)
*§ 28　范畴与函子 ……(191)
第 4 章　奇异同调论 ……(199)
§ 29　奇异同调群 ……(199)
§ 30　奇异同调论满足公理 ……(208)
§ 31　奇异同调群的切除性质 ……(217)
*§ 32　零调模体 ……(225)
§ 33　Mayer-Vietoris 序列 ……(230)
§ 34　单纯同调与奇异同调的同构 ……(234)
*§ 35　应用：局部同调群和流形 ……(241)
*§ 36　应用：Jordan 曲线定理 ……(249)
§ 37　再论商空间 ……(257)
§ 38　CW 复合形 ……(264)
§ 39　CW 复合形的同调群 ……(275)
*§ 40　应用：射影空间和透镜空间 ……(287)
参考文献 ……(302)

第 1 章　单纯复合形的同调群

判定两个空间是否同胚是拓扑学的基本问题之一。为证明两个空间同胚，只需构造一个既单且满的双方连续的映射将一个空间映为另一个空间；而为证明两个空间不同胚，则需指出这种映射不存在。后者往往更为困难，常用的办法乃是找出某种拓扑性质（即同胚变换下不变的性质）使得这一性质为两个空间之一所具备而不为另一所具备。例如，$\boldsymbol{R}^2$ 中的单位闭圆盘与平面 $\boldsymbol{R}^2$ 不同胚，因为闭圆盘是紧致的而平面却不是。又例如，实直线 $\boldsymbol{R}$ 与平面 $\boldsymbol{R}^2$ 也不同胚，因为从 $\boldsymbol{R}$ 中剔除一点之后留下了一个不连通的空间，而从 $\mathbf{R}^2$ 中剔除一点之后留下的空间却依然连通。

用这类初等性质去处理同胚问题并非总能凑效：例如，将所有紧致曲面进行拓扑分类便需要用到更为复杂的拓扑不变性质；为证明当 $n\neq m$ 时 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 不同胚情形也是如此。

代数拓扑源出于 Poincaré, Betti 等数学家为构作拓扑不变量而作的努力。Pioncaré 引进了某一个群，称之为拓扑空间的基本群；由定义即可验证基本群是一个拓扑不变量。不难知道，我们所熟悉的许多空间，如球面，环面，Klein 瓶等，各自有着彼此不同的基本群，因而这些空间互不同胚（参见[Mu] 第 8 章）。事实上，我们能用基本群将所有紧致曲面进行分类（参见[Ma] 第 4 章）。

另一方面，Betti 将每一个空间联系着由阿贝尔群组成的一个序列，这一串阿贝尔群称为该空间的同调群。得到同胚的空间有同构的同调群这一结果颇为不易，但最终还是给出了证明。同调群也能用于处理同胚问题，并且有着比基本群易于计算的优点。

我们将从同调群开始来学习代数拓扑，随后再研究其余的拓

扑不变量，如上同调群以及上同调环等。

定义同调群有好些个途径，但对于足够“好”的空间来说，效果都是相同的。本书将要讨论两种同调群，即单纯同调群和奇异同调群。我们将先讨论单纯同调群，因为从历史上看它出现得最早。无论从概念上讲或是从计算的可行性上讲，单纯同调群都是既具体而又易于把握的，然而它却只是对于特别“好”的空间（多面体）才有定义，并且难于证明其拓扑不变性。稍后再处理奇异同调群，并把它当作单纯同调群的推广。奇异同调群的拓扑不变性可从定义直接推出。就理论上讲奇异同调群比单纯同调群简便得多，但计算起来却要难些，然而在两者都有定义时，这两种群恰好是一样的。

对于任一给定空间定义同调群的第三条途径是E. Čech 提供的。Čech 同调论一直不能令人完全满意，但 Čech 上同调论却既重要而又有用，我们将在本书的最后部分提到它*。

§1 单纯形

在定义单纯同调群之前，我们要先讨论单纯同调群所赖以定义的空间——多面体。多面体乃是用一些诸如线段，三角形，四面体以及它们的高维类似物作为“砖块”并将这些“砖块”沿表面“粘合”起来构筑而成的空间，在这一节中我们讨论这种基本的“砖块”，下一节再用“砖块”来构筑多面体。

我们先来学习少许欧氏空间中的解析几何知识。

在 $\boldsymbol{R}^N$ 中给定一个点集$\{a_0, \cdots, a_n\}$，如果对于任意实数 t_i，等式

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \qquad \text{和} \qquad \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0$$

* 本书只译了原书的前四章，但涉及后四章的文字均照原书译出。——译注

蕴含着 $t_0=t_1=\cdots=t_n=0$，那么这个点集 $\{a_0, \cdots, a_n\}$ 便称为是几何独立的。

显然，独点集总是几何独立的。藉助于代数的基础知识即可证明：点集$\{a_0, \cdots, a_n\}$是几何独立的当且仅当向量

$$a_1-a_0, \cdots, a_n-a_0$$

在通常线性代数的意义下是线性独立的。因而，$\boldsymbol{R}^N$ 中相异的两点组成的集合总是几何独立的；同样，不共线的三点，不共面的四点分别构成的集合也都是几何独立的，等等。

给定几何独立的一个点集$\{a_0, \cdots, a_n\}$，我们定义由这些点张成的 n 维平面 P 为 $\boldsymbol{R}^N$ 中所有形如

$$x=\sum_{i=0}^{n} t_i a_i$$

的点 x 所组成的集合，其中 t_i 为满足条件$\sum t_i=1$ 的实数。我们有：由于诸a_i是几何独立的，所以诸 t_i 由 x 所唯一确定。此外易见，每一个 a_i 均属于平面 P。

平面 P 也可说成是由所有形如

$$x=a_0+\sum_{i=1}^{n} t_i(a_i-a_0)$$

的点 x 所组成的集合，其中 $t_1, \cdots, t_n$ 都是实数。藉助于这种表达方式，我们也可称 P 为“通过点 a_0 平行于诸向量 a_i-a_0 的平面”。

容易验证，如果$\{a_0, \cdots, a_n\}$是几何独立的并且 w 是由这些点张成的平面之外的一点，那么$\{w, a_0, \cdots, a_n\}$也是几何独立的。

$\boldsymbol{R}^N$ 的一个自映射 T 称为一个**仿射变换**，如果它是平移（即可表为 $T(x)=x+p$ 的映射，其中 p 是某固定的点）和非蜕化的线性变换的复合。从定义立即可知，如果T 是一个仿射变换，那

么T保持点集的几何独立性，并且把由a_0，…，a_n张成的平面变为由Ta_0，…，Ta_n张成的平面。

平移$T(x)=x-a_0$将P映为$\boldsymbol{R}^N$中以a_1-a_0，…，a_n-a_0为基的向量子空间；如果我们在T后面再接上一个线性变换，这个线性变换把a_1-a_0，…，a_n-a_0映为$\boldsymbol{R}^N$中的前n个单位基向量$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$，那么我们便得到了$\boldsymbol{R}^N$的一个仿射变换$S$使得$S(a_0)=0$以及$S(a_i)=\epsilon_i$，$i>0$。于是，映射$S$将$P$映为$\boldsymbol{R}^N$中前$n$个坐标组成的平面$\boldsymbol{R}^n\times 0$，这便是我们称$P$为$\boldsymbol{R}^N$中的“$n$维平面”的原因。

定义 设$\{a_0, \cdots, a_n\}$为$\boldsymbol{R}^N$中的一个几何独立的集合。我们定义由a_0，…，a_n张成的n**维单纯形**σ为由$\boldsymbol{R}^N$中所有形如

$$x=\sum_{i=0}^{n} t_i a_i$$

的点所组成的集合，其中$t_i\geqslant 0$对于所有i成立，并且满足条件

$$\sum_{i=0}^{n} t_i=1.$$

诸实数t_i是由x所唯一地确定的，称之为σ中的点x相对于a_0，…，a_n而言的**重心坐标**。

例1 在低维的情况下，我们容易把单纯形画出来。一个0维单纯形当然就是一个点。由a_0和a_1张成的1维单纯形由所有形如

$$x=ta_0+(1-t)a_1$$

的点x组成，其中$0\leqslant t\leqslant 1$，因此它恰恰就是连结a_0和a_1的线段。类似地，由a_0，a_1，a_2张成的2维单纯形σ等于以这三个点为顶点的三角形。这一点能按如下方式容易看出来：设$x\neq a_0$，则

$$x=\sum_{i=0}^{2} t_i a_i=t_0 a_0+(1-t_0)[(t_1/\lambda)a_1+(t_2/\lambda)a_2]$$

其中$\lambda=1-t$。方括号中的式子表示连结a_1和a_2的线段中的某点P，因为$(t_1+t_2)/\lambda=1$并且$t_i/\lambda\geqslant 0$，$i=1, 2$。

于是x便是连结a_0和p的线段中的某一个点了。见图1.1。反之，这种线段中的任何一个点都属于σ，这一点请你自己验证。于是，σ等于连结a_0与a_1a_2中的点的所有线段之并；也就是说，σ是一个三角形。

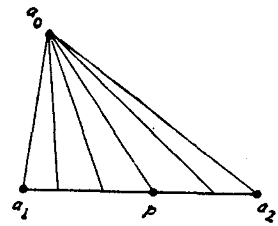

图 1.1

类似地可证3维单纯形都是四面体。

我们来列举单纯形的一些基本性质。证明都是初等的，大多留作习题。

以下假设P是由几何独立的点集$\{a_0, \cdots, a_n\}$中的点所确定的n维平面，σ是由点$a_0, \cdots, a_n$张成的n维单纯形。若$x\in\sigma$，则令$\{t_i(x)\}$为x的诸重心坐标，它们被条件

$$x=\sum_{i=0}^{n} t_i a_i \quad 和 \quad \sum_{i=0}^{n} t_i=1$$

所唯一确定。以下性质成立：

(1) x相对于$a_0, \cdots, a_n$而言的诸重心坐标$t_i(x)$都是x的连续函数。

(2) σ等于连结a_0与由$a_1,\cdots,a_n$张成的单纯形s中的点的所有线段之并。这些线段中的任何两条仅交于a_0。

我们重温以下定义：$\mathbf{R}^N$的一个子集A称为**凸集**，如果连结A中每一对点x, y的线段均包含于A中。

(3) σ是$\boldsymbol{R}^N$中的一个紧致的凸集，它等于$\boldsymbol{R}^N$中包含点$a_0, \cdots, a_n$的所有凸集之交。

(4) 对于给定的一个单纯形σ，存在唯一的一个几何独立的点集张成σ。

张成单纯形 σ 的诸点 a_0，…，a_n 称为 σ 的**顶点**；这些点的个数 n 称为 σ 的**维数**。由 $\{a_0, \cdots, a_n\}$ 的子集张成的任何一个单纯形均称为 σ 的一个**面**。特别，由 $a_1, \cdots, a_n$ 张成的面称为 a_0 的**对立面**。凡 σ 的面而又不同于 σ 本身的，均称为 σ 的**真面**。σ 的诸真面之并称为 σ 的**边缘**，记作 $Bd\,\sigma$。σ 的**内部**则用等式 $Int\,\sigma = \sigma - Bd\,\sigma$ 来定义。集合 $Int\,\sigma$ 有时也称为**开单纯形**。

因为 $Bd\,\sigma$ 由 σ 中至少有一个重心坐标 $t_i(x)$ 为 0 的点 x 组成，所以对于 $Int\,\sigma$ 中的点 x 而言 $t_i(x)>0$ 对于所有 i 成立。由此可见，对于给定的 $x\in\sigma$，σ 有且仅有一个面 s 使得 $x\in Int\,s$，因为这个 s 必然应是使 $t_i(x)$ 为正值的那些个 a_i 所张成的面。

(5) $Int\,\sigma$ 是一个凸集，也是平面 P 中的开集，它的闭包便是 σ。并且，$Int\,\sigma$ 等于连结 a_0 与 $Int\,s$ 中的点的所有开线段之并，这里 s 为 a_0 的对立面。

我们来回顾一下某些标准的记号。若 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点，则 x 的**模**定义为

$$||x|| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

n **维单位球** B^n 乃是 $\boldsymbol{R}^n$ 中所有满足条件 $||x||\leqslant 1$ 的点 x 组成的集合，而**单位球面** S^{n-1} 则是满足条件 $||x||=1$ 的点 x 所组成的集合。S^{n-1} 的**上半球面** E_+^{n-1} 由 S^{n-1} 中满足条件 $x_n\geqslant 0$ 的点 x 所组成，而**下半球面** E_-^{n-1} 则由 S^{n-1} 中满足条件 $x_n\leqslant 0$ 的点 x 所组成。

根据这些定义，B^0 恰为独点空间，B^1 等于线段 $[-1, 1]$，而 S^0 则是由两个点所组成的空间 $\{-1, 1\}$。2 维球 B^2 乃是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的以原点为中心的单位圆盘，而 S^1 便是单位圆周。

(6) 存在一个从 σ 到单位球 B^n 的同胚，这个同胚同时将 $Bd\,\sigma$ 映到单位球面 S^{n-1} 上。

我们将性质(1)—(5)留作习题，只证明(6)。事实上，下面证明的结论比（6）还强一点，往后还要用到它。

若 $w\in \boldsymbol{R}^n$，从 w 出发的一条**射线**$\mathscr{R}$乃是由所有形如 $w+tp$ 的点所组成的集合，其中 p 是 $\boldsymbol{R}^n-0$ 中某一确定的点，而 t 则取遍非负实数。

引理 1.1 设 U 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界的，凸的，开集；又设 $\omega\in U$。

(1) 从 w 出发的每一条射线恰交 $Bd\,U=\bar{U}-U$ 于一点.

(2) 存在从 $\bar{U}$ 到 B^n 的一个同胚把 $Bd\,U$ 映到 S^{n-1} 上.

证明 (a) 对于从 w 出发的一条给定的射线 $\mathscr{R}$，它与 U 的交应当是有界的，凸的，并且在$\mathscr{R}$中是开的。因而这交集由所有形如 $x=w+tp$ 的点组成，其中 t 取遍一个半开的区间 $[0,a)$。于是 $\mathscr{R}$交 $\bar{U}-U$ 于点 $x=w+ap$。

假定$\mathscr{R}$交 $\bar{U}-U$ 于另外某一个点 y。那么在射线$\mathscr{R}$上看 x 位于 w 与 y 之间、由于 $y=w+bp$ 对于某 $b>a$ 成立，我们有

$$x=(1-t)w+ty$$

其中 $t=a/b$。将上述等式改写作

$$w=(x-ty)/(1-t)。$$

选取 U 中收敛于 y 的某一序列 y_n，并令

$$w_n=(x-ty_n)/(1-t)。$$

参见图 1.2. 序列 w_n 收敛于 w，因而对于某一个 n 我们有 $w_n\in U$。由于 $x=tw_n+(1-t)y_n$ 并且 U 是凸集，所以 x 属于 U。这一事实与 x 的取法矛盾。

(b) 为方便起见设 $w=0$。由等式 $f(x)=x/\|x\|$ 确定了从 $\boldsymbol{R}^n-0$ 到 S^{n-1} 上的一个连续映射。根据 (a)，f 限制于 $Bd\,U$ 上时是一个从 $Bd\,U$ 到 S^{n-1} 上的既单且满的映射. 由于 $Bd\,U$ 是紧致的，这一限制映射是一个同胚；令 $g:S^{n-1}\to Bd\,U$ 为上述限制映射的逆映射。将 g 扩充

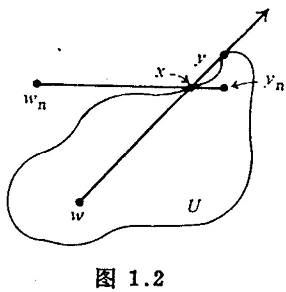

图 1.2

为一个既单且满的映射 $G: B^n \to \bar{U}$ 使得 G 将连结 0 与 S^{n-1} 中点 u 的线段线性地映满连结 0 与 $g(u)$ 的线段。然后定义

$$G(x) = \begin{cases} ||g(x/||x||)||x & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时，} \\ 0 & \text{当 } x = 0 \text{ 时。} \end{cases}$$

G 在点 $x \neq 0$ 处的连续性是显然的。验证 G 在点 0 处的连续也容易，因为如果 M 是 $||g(x)||$ 的一个上界，那么只要 $||x-0||<\delta$ 我们便有 $||G(x)-G(0)||<M\delta$。□

习　　题

1. 验证单纯形的性质(1)—(3)。〔提示：如果 T 是将 a_0 映为 0 将 a_i 映为 ϵ_i 的一个仿射变换，那么 T 便将点

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i$$

映为点 $(t_1, \cdots, t_n, 0, \cdots, 0.)$〕

2. 验证性质 (4) 如下：
   (a) 证明当 $x \in \sigma$ 且 $x \neq a_0, \cdots, a_n$ 时，x 必属于某一包含于 σ 中的开线段。(假定 $n>0$。)
   (b) 先证明若对于 $x, y \in \sigma$ 和 $0<t<1$ 有 $a_0 = tx + (1-t)y$，则 $x = y = a$。然后证明 a_0 不属于任何包含于 σ 中的开线段。

3. 验证性质 (5)。

4. 推广性质 (2) 如下：设 σ 由 $a_0, \cdots, a_n$ 张成；s 为 σ 的面，由 $a_0, \cdots, a_p$ 张成 $(p<n)$；t 亦为 σ 的面，由 $a_{p+1}, \cdots, a_n$ 张成。我们称 t 为 σ 中 s 的对立面。
   (a) 证明 σ 为连结 s 中的点与 t 中的点的所有线段之并，并且这线段中的每两条最多相交于某一个公共的端点。
   (b) 证明 $Int\,\sigma$ 为连结 $Int\,s$ 中的点与 $Int\,t$ 中的点的所有开线

段之并。

5. 设 U 为 R^n 中有界的一个开集，并设 U 相对于原点而言是星状凸集。(也就是说对于 U 中每一点 x，连结 0 与 x 的线段均包含于 U)

(a) 证明由 0 出发的射线可以与 BdU 有多于一点的交。

(b) 举例说明 $\bar{U}$ 不一定同胚于 B^n。

§2 单纯复合形和单纯映射

R^N 中的复合形

定义 R^N 中的一个单纯复合形 K 乃是由 R^N 中一些单纯形所组成并满足下列条件的一个集合：

(1) K 中任何一个单纯形的每一个面均属于 K。

(2)* K 中任意两个单纯形如果有非空的交集，那么这个交集是这两个单纯形中每一个单纯形的面。

例 1 在图 2.1 中，集合 K_1 由一个 2 维单纯形及其所有的面组成，是一个单纯复合形。集合 K_2 由有一条公共边的两个 2 维单纯以及这两个 2 维单纯形所有的面组成，也是一个单纯复合形。K_3 则不是单纯复合形。K_4 是不是单纯复合形呢？

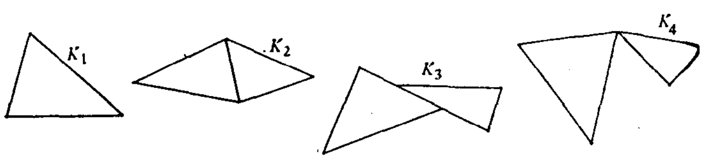

图 2.1

对于验证由单纯形所组成的某一集合是否是单纯复合形，下述引理有时是很有用的。

---

* 原文在陈述这一条件时有明显的疏漏，译者作了增补。——译注

引理 2.1 由单纯形所组成的一个集合 K 是一个单纯复合形当且仅当下列条件成立：

(1) K 中任何一个单纯形的每一个面均属于 K。

(2′) K 中任何两个不同的单纯形的内部无交。

证明 先假设 K 是一个单纯复合形。我们来证明如果 K 中的两个单纯形 σ 和 τ 的内部有一个公共点 x，那么便有 $\sigma=\tau$。令 $s=\sigma\cap\tau$。如果 s 是 σ 的一个真面，那么 x 将会属于 $Bd\,\sigma$，而这是不对的。因此，我们有 $s=\sigma$。类似可证 $s=\tau$。

为证明充分性，设条件（1）和(2′）成立。只要证明：倘若集合 $\sigma\cap\tau$ 非空，则此集合等于 σ 的某一个面 σ'，而 σ' 是由既是 σ 的顶点又属于 τ 的所有的点 b_0，…，b_m 所张成。首先，σ' 包含于 $\sigma\cap\tau$，这是因为 $\sigma\cap\tau$ 既是凸集又包含着 b_0，…，b_m。为证明反向的包含关系，设 $x\in\sigma\cap\tau$。这时，对于 σ 的某一个面 s 与 τ 的某一个面 t，我们有 $x\in Int\,s\cap Int\,t$。由条件（2′）可见，$s=t$。因此 s 的顶点均在 τ 中，并且因此是 b_0，…，b_m 中的某一些。于是 s 是 σ' 的某一个面，从而 $x\in\sigma'$，这正是我们所需要的。□

由此引理可见，若 σ 是一个单纯形，那么由 σ 及其所有真面组成的集合是一个单纯复合形。兹验证如下：条件（1）显然是符合的，条件（2′）成立是因为对于每一个点 $x\in\sigma$ 只有 σ 的唯一的一个面 s 使得 $x\in Int\,s$。

定义 如果 L 是单纯复合形 K 的一个子集，并且 L 包含着它自己的每一个元素的每一个面，那么 L 本身便是一个单纯复合形，并称为 K 的一个**子复合形**。由 K 中所有维数不大于 p 的单纯形组成的集合是 K 的一个子复合形，称为 K 的 **p 维骨架**，并记作 $K^{(p)}$。$K^{(0)}$ 中的点称为 K 的**顶点**。

定义 单纯复合形 K 中所有单纯形之并记作$|K|$，它是 $\mathbf{R}^N$的一个子集。对于每一个单纯形赋予它一个自然的拓扑使它为 $\mathbf{R}^N$ 的一个子空间。我们定义$|K|$的一个拓扑如下：$|K|$的一个子集 A