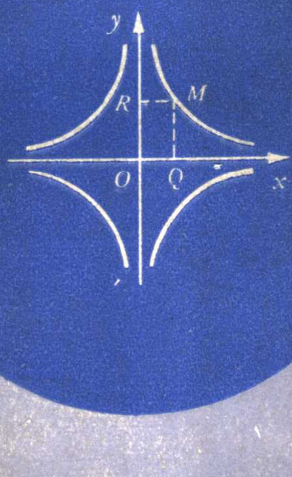
中学数学课本辅导丛书

高中解析几何（平面）学习指导

石治源 编著



辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

高中解析几何(平面)学习指导

石 治 源 编著

辽 宁 教 育 出 版 社

一九八五年·沈阳

高中解析几何(平面)学习指导

石 治 源 编著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数：194,000 开本：787×1092 1/32 印张：9
印数：1—12,000
1985年8月第1版 1985年8月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：理 于
封面设计：周咏红

统一书号：7371·42 定价：1.25 元

出 版 说 明

提高学生的自学能力，是时代对人才培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本丛书的主编，并同钱永耀同志一起审阅了全部初稿。

这套丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，逐章逐节逐个问题的进行剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每个单元都配有巩固基本知识的思考与练习，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

引　　言

这一部分应明确了解以下三个问题：1．解析几何研究的方法；2．平面解析几何研究的主要问题；3．解析几何产生的意义及其研究方法的重要作用．

1．解析几何研究的方法．平面几何和立体几何研究的方法是以给出的公理为基础，引出若干定理，以此为依据，运用严格的逻辑推理，直接由图形上的点、线、面间的关系，来研究图形的有关性质．而解析几何则是在建立坐标系（中学阶段只研究直角坐标系和极坐标系）的基础上，使坐标与点，方程与曲线（包括直线）之间建立一一对应的关系，从而，把数学研究的两个主要对象“形”与“数”紧密地结合起来，使我们能够通过研究变数的方程的性质，间接地研究动点的轨迹的曲线的性质．简言之，解析几何是用代数方法（即解析法）研究几何问题的一门数学学科．

2．平面解析几何研究的主要问题（详见课本，此处略）．

3．解析几何产生的意义及其研究方法的重要作用．解析几何是因生产发展的需要而产生和发展的．在十七世纪初期，由于生产的发展，自然科学的各个分支和生产技术都有了很大的进步，这就需要解决随之发生的许多数学上的问题．例如，在天文学上，发现行星的轨道是椭圆，在力学上，确定了抛掷体的轨道是抛物线．因而，有关圆锥曲线的计算就成为迫切的需要．在现代生产中，还需要研究其他各

种图形的性质，解析几何便得到了进一步的应用。

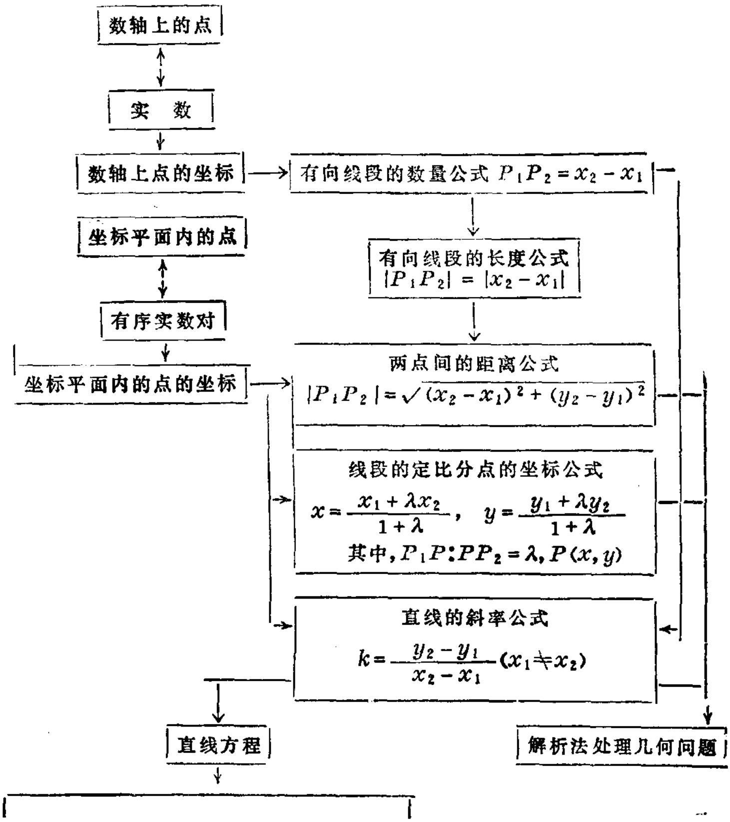
法国数学家笛卡儿(1596年3月31日至1650年2月11日)创始了解析几何。笛卡儿的中心思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来，他从自古已知的天文和地理的经纬制度出发，指出平面上的点和实数对(x,y)的对应关系，进一步考虑二元方程$F(x,y)=0$的性质，满足这一方程的x,y值无穷多，当x变化时，y值也跟着改变，x,y不同的数值所确定平面上许多不同的点，便构成了一条曲线，这样，一个方程就可以通过几何的直观和方法去处理；反过来，可以离开几何图形，用代数的方法研究曲线的性质。具有某种性质的点，其间有某种关系，“这关系可用一个方程来表示”，这就是解析几何的基本思想。

笛卡儿把过去对立着的两个研究对象“形”和“数”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成数学史上一项划时代的变革。恩格斯对笛卡儿的革新思想给予极高评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，……。”解析几何的产生、对微积分的出现及发展起了促进作用。它的研究方法，在数学、物理和其他科学技术中都有广泛的应用。

目　　录

第一章　直　　线

本章的知识结构：



四种特殊形式

- 点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$
- 斜截式 $y=kx+b$
- 两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

与坐标轴垂直的直线方程

- 垂直于 x 轴的直线方程 $x=a$
- 垂直于 y 轴的直线方程 $y=b$

一般式 $Ax+By+C=0$（A、B 不全为零）

其中，$k=-\frac{A}{B}$，$b=-\frac{C}{B}$（$B\neq0$ 时）

点 (x_0, y_0) 与直线 $Ax+Bx+C=0$ 的位置关系

- 点在直线上 $Ax_0+By_0+C=0$
- 点在直线外 $Ax_0+By_0+C\neq0$
  - 点在直线的上方 $Ax_0+By_0+C>0$
  - 点在直线的下方 $Ax_0+By_0+C<0$

点到直线距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

两条直线 L_1、L_2 的位置关系（L_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，L_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$）

- 平行 $k_1=k_2$，或 L_1、L_2 都垂直于 x 轴
- 相交 $k_1\neq k_2$，或 L_1、L_2 不都垂直于 x 轴
  - 直交 $k_1\cdot k_2=-1$，或 L_1、L_2 分别与 x 轴、y 轴垂直

斜交 $k_1 \cdot k_2 \neq -1$，或L_1、L_2中之一与 x 轴垂直，另一不与 x 轴垂直

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ （θ 为 L_1 到 L_2 成的角）

交点坐标$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$的解

直线系　具有某种共同性质的直线的集合

一　有向线段、定比分点

（一）内容简介

在这一单元里，主要学习有向线段及其长度、数量，两点间的距离和线段的定比分点等概念及公式．这些概念和公式是以后学习的重要基础，尤其直线上的点的坐标、有向线段的数量、两点间的距离和线段的定比分点坐标等公式，在整个解析几何的学习过程中随时都要用到，所以，必须透彻理解，牢固掌握，准确记忆。

（二）学习指导

1.1 有向线段、两点的距离

有向线段是一维空间解析几何中的重要概念之一．规定了起点和终点的线段叫做**有向线段**．规定了正方向（用箭头表示）的直线叫做**有向直线**．如果有向线段 AB 在有向直线 l 上或与 l 平行，根据 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的正方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，即有

向线段的长度，连同表示它的方向的正负号叫做这条有向线段的数量.

〔注意〕课本中的图 1-1、1-2、1-3、1-4，均按水平方向画出，在没有特殊要求情况下，习惯上画成水平方向. 但实际上有向直线和有向线段的方向可以是任意的.

把数轴 ox 上任一点 P 的坐标 x_0，定义为有向线段 $\overline{OP}$ 的数量 OP，即：$OP=x_0$。

在数轴上的有向线段 $\overline{AB}$，如果 A、B 两点的坐标分别为 x_1、x_2，根据 A、B 与 O 都不重合的六种可能情形及 A 或 B 与 O 重合时的不同情况，证明或验证得到 $\overline{AB}$ 的数量公式：$AB=x_2-x_1$，并且，由此易得数轴上任意两点 A、B 间的距离公式：$|AB|=|x_2-x_1|$.

很明显，有下列等式成立：$AB=-BA$，$|AB|=|BA|$.

课本中 $|AB|=|BA|$ 及 $AB=-BA$ 两等式是由有向线段的长度和数量的定义直接推得的. 当然，由 $AB=x_2-x_1$，$-BA=-(x_1-x_2)=x_2-x_1$ 及 $|AB|=|x_2-x_1|$，$|BA|=|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$ 也可分别推得：$AB=-BA$ 及 $|AB|=|BA|$.

在这里要指出的是必须分清有向线段、有向线段的长度、有向线段的数量三者间的联系和区别.

有向线段的数量公式是本章的重点，它是后面有关公式证明的基础. 因此，必须对它的推导方法及公式本身给予重视和掌握.

两点的距离公式也是本章的重点之一，它是用坐标法研究几何问题的基本公式，也是解析几何中经常应用的不可缺少的工具之一.

这个公式是根据勾股定理及有向线段数量公式进行一般性的证明的。即不论 P_1、P_2 两点在哪个象限，此公式均成立。为了记忆的方便，可认为 P_1、P_2 都在第一象限内。

这个公式对于 $P_1P_2\perp x$ 轴、$P_1P_2\perp y$ 轴或者 P_1、P_2中之一与原点重合等特殊情况也都是适用的。即分别为 $|P_1P_2|=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$，$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$，$|P_1P_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ 或 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$。

由公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，可见：只要知道 $|P_1P_2|$、x_1、x_2、y_1、y_2 五个量中的任意四个，即可由此公式求得未知的第五个量（未知的不一定总是 $|P_1P_2|$）。

例　已知 $|AB|=5$，$B(-3,2)$，A的横坐标为 1，求 A 点的纵坐标。

解　设 A 的坐标是 $(1,y)$，$\because$ $|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(2-y)^2}=5$，$\therefore$ $(2-y)^2=9$，$\therefore$ $y=-1$ 或 $y=5$。$\therefore$ A的纵坐标为 -1 或 5。

又如课本第 7 页练习 4 及11页 5、6 等题，均属此种类型。

课本 5—6 页的例 1，是利用数轴上的有向线段的数量公式计算有向线段的数量和长度的；例 2，是利用解析法证明三角形的中线和三边间的一个重要关系。

用解析法证明几何问题时，首先要适当地建立坐标系，然后，设有关的点的坐标，……。其中，建立坐标系很重要。建立直坐标系的基本条件是：指明横纵轴的位置或指明一轴及原点的位置。选取坐标系的一般原则是：（1）尽量取图形中的一线段所在直线为x轴，适当取图形中的点为原点，建立坐标系；（2）如果图形中有相互垂直的线段，则可取其所在直线为 x 轴、y 轴；（3）如果图形是轴对称

图形，可尽量选对称轴为坐标轴；（4）如果图形是中心对称图形，可尽量选对称中心为原点；（5）尽量将图形分布在第一象限或 x 轴的上方、y 轴的右方，使图形上点的坐标为正值.

如例2，取 BC 所在直线为 x 轴，BC 中点为原点．也可取端点 B 为原点（取 C 为原点时，B、O的坐标均为负值，不如取 B 点为原点好）．又如：求证矩形的两对角线长相等．在建立坐标系时，就可取矩形互相垂直的两邻边所在直线为 x 轴、y 轴，且使第四个顶点分布在第一象限内.

1.2 线段的定比分点

线段的定比分点坐标公式及其特例线段的中点坐标公式也是解析几何中应用较多的基本公式之一，是本章的重点和难点.

点 P 分 $\overline{P_1P_2}$所成的比 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，不能错误地理解成线段或者线段长度之间的比，而是有向线段$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的数量 P_1P 和 PP_2 的比．λ的分布：（1）P 为内分点时，$\lambda>0$；（2）P 为外分点时，$\lambda<0$，且 $\lambda\neq-1$，其中，① P 在$\overline{P_1P_2}$的延长线上时，$\lambda<-1$；②P 在$\overline{P_2P_1}$ 的延长线上时，$-1<\lambda<0$；（3）P 与 P_1 重合时，$\lambda=0$；（4）P与 P_2 重合时，λ不存在.

【注意】①两条有向线段的顺序 $P_1\rightarrow P$、$P\rightarrow P_2$，即起点到分点、分点到终点；②在定义中，两个数量 P_1P和PP_2 都与所在的有向直线的方向有关．但比$\frac{P_1P}{PP_2}$实际上是可以与所在有向直线方向无关的，所以，一般不提所在有向直线的方向.

如：在解课本中第11页7题时，可这样处理：

（1）$\because\ \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，$\therefore\ \lambda=\frac{1}{4}$；（2）$\because\ \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，$\therefore\ \lambda=-\frac{15}{10}=-\frac{3}{2}$；（3）$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=-\frac{1}{6}$.

第12页：10.（2）$\because\ \lambda=\frac{AC}{CB}=-\frac{|AC|}{|CB|}=-\frac{\frac{3}{2}|AB|}{|AB|}$

$$=-\frac{3}{2},\ \therefore\ \lambda=-\frac{3}{2},\cdots;$$

12.（2）$\because\ \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=-4$，…；（3）$\because\ \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=-\frac{4}{5}$，….

有向线段的定比分点坐标公式：$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$（$\lambda\neq-1$时），是根据平行线分线段成比例定理及有向线段的数量公式推得的．在推导中，要突出$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}$的证明，即①$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$且②$\frac{P_1P}{PP_2}$与$\frac{M_1M}{MM_2}$符号相同．线段的中点坐标公式$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，是$\lambda=1$时的特例．以后应用较多，必须记准记熟．

【注意】①已知 P_1、P_2 和 P 的横（或纵）坐标及 λ 四个量中的任意三个，即可应用定比分点坐标公式求出第四个量。②由 P_1、P_2 及 P_1P_2 的中点的横（或纵）坐标三个量中任意两个量，即可由中点坐标公式求出第三个量。

课本第 9 页例 1 的处理方法，是借助于前面推导过程中的 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ 推得 $\lambda=-\frac{1}{4}$ 的。此法不太好，因为 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ 不必作为基本公式记忆。最好是利用公式 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ 得 $-\frac{7}{3}=\frac{-1+\lambda\cdot 3}{1+\lambda}$，$\therefore \lambda=-\frac{1}{4}$，$\therefore$ $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ $=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-8$。也可先求直线 P_1P_2 方程（待直线方程学过之后），由 P 点横坐标 $x=-\frac{7}{3}$，求出其纵坐标，最后，再由 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$ 确定 λ 值。

课本 9 页例 2 也可以这样做：$\because D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$，且 $\frac{DG}{GA}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 点 G 的坐标是 $x=\frac{\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{1}{2}\cdot x_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\frac{\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{1}{2}\cdot y_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$。这个三