初中数学解题思维导引

张焕明　编

北京师范大学出版社

(京)新登字160号

初中数学解题思维导引

张焕明 编

北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：10.25 字数：214千
1991年11月第1版 1991年11月第1次印刷
印数：1—23 000

ISBN7-303-01305-9/G·785
定价：3.90元

前　言

长期以来，人们就有这样一种渴望：找出一种魔力无边的方法，它能解决所有的问题.笛卡儿曾提出过运用方程的观点来解决世间一切问题的万能方法；莱布尼兹曾非常清楚地叙述了完善解法的思想．然而，这仅仅是一些美妙的梦想．实践证明，这样的方法是不存在的．但人们总想揭示数学上的发现是怎样得来的？数学难题的解法是怎样想出来的？而要回答这些问题，并不是三言两语所能解决的.

众所周知，解决有一定难度的数学题，需要扎实的基础知识和基本技能，这是毫无疑问的．然而解题的过程并不是基础知识的堆积，也不是基本技能技巧的任意组合，而是一个沟通条件和结论的严密的逻辑推理过程。

数学思维是导向发现的首要条件，发现解题思路又是获得解题成功的前提，而解题思路的发现来源于平时的探索.这本书是经过笔者多年的探索而写成的.

本书主要从三个方面揭示数学思维与解题的关系.其一，着重阐述了学好数学的基本途径.其二，着重阐述了数学解题中的辩证思维.主要包括：陌生与熟悉；进与退；正与逆；合与分；升与降；相等与不等．其三，介绍了发现解题思路的主要途径，主要包括：猜想及其作用；猜想的主要途径；构造法解题及其主要类型；等价转换和逆反转换等等.

为了便于读者阅读和思考，全书在例题的安排上，力求

体现由浅入深、由简单到复杂的原则．各个例题一般都有剖析、发现解题思路的方法、技巧或思维过程。各章节中还安排了适量的练习题，供读者练习思考．篇末还附有答案或提示．

在编写过程中，曾参阅了很多有关数学思维与解题的资料，并得到许多同行、专家的关注与鼓励，谨此表示衷心的感谢．

由于作者水平有限，全书在体系结构、内容和文字等方面，一定会有许多错误、缺点和不妥，希望读者批评指正．

编　者

1991.4.1

目　　录

第一章　怎样才能学好数学

要想学好数学，离不开解题.一方面，通过解题练习，有助于深刻理解数学概念，有助于牢固掌握数学的基础知识和基本技能，有助于发展思维的灵活性和创造性，从根本上提高分析问题和解决问题的能力.另一方面，解题能力又是衡量数学水平的重要标志，任何数学考试，又常常是通过解题来进行的.

每个同学都希望自己能迅速、准确地解答数学题.有的同学认为：要学好数学，题目做得越多越好，也有的同学偏重于解难题、怪题.实际上，这些都不是好方法.那么，怎样才能学好数学呢？

第1节　要深刻理解每一个数学概念

理解数学概念是掌握定理、法则、公式和解题方法的基础.初中数学中有很多重要的概念，如绝对值、算术根、相反数、方程和方程的根等等.一般的数学题的解法，首要的是弄清概念，有些题目就是直接依赖于基本概念而解决的。

例1　已知$\sqrt{19-8\sqrt{3}}$的整数部分为a，小数部分为b，求$b^{-1}-a$的值.

分析：要弄清什么是整数部分，什么是小数部分.这里b为小数部分，则$0\leqslant b<1$.

解： $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=|4-\sqrt{3}|$

$=4-\sqrt{3}$，

$\because\quad 2<4-\sqrt{3}<3$，

$\therefore\quad a=2,\qquad b=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$.

$\therefore\quad b^{-1}-a=(2-\sqrt{3})^{-1}-2=\sqrt{3}$.

例2 设$\sqrt{x^2+4x+4}$与$|y-2|$互为相反数，试求$x^{1991}+y^{1991}$的值.

解： $\because\quad \sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|$，

而$\sqrt{x^2+4x+4}$与$|y-2|$互为相反数.

$\therefore\quad |x+2|+|y-2|=0$.

由非负数性质，求得$x=-2$，$y=2$.

$\therefore\quad x^{1991}+y^{1991}=(-2)^{1991}+2^{1991}=0$.

例3 已知方程$3x^2-19x+m=0$的一个根是1，求它的另一根及m的值.

初中学生很多是这样解的：

设另一根为x_2，由韦达定理得方程组

$$\begin{cases}1+x_2=\dfrac{19}{3}\\[2ex]1\cdot x_2=-\dfrac{m}{3},\end{cases}$$

解这个方程组得m及x_2

若根据方程根的定义可知：把1代入原方程时，原方程成立，因而得到下列解法：

解： 把1代入原方程得 $3\times1^2-19\times1+m=0$，

解得 $m=-16$.

$\therefore$ 原方程为$3x^2-19x-16=0$.

$\therefore$ $(x-1)(3x-16)=0$，　　得另一根为$\frac{16}{3}$.

例4 方程组$\begin{cases}x+2y=n\\4x-y=8\end{cases}$和$\begin{cases}5x+3y=27\\3x-4y=m\end{cases}$有相同的解，求$m$、$n$的值.

解： 根据方程组的定义有

$$\begin{cases}x+2y=n & ①\\4x-y=8 & ②\\5x+3y=27 & ③\\3x-4y=m & ④\end{cases}$$

由②、③解得$x=3$，$y=4$. 再分别代入④、①解得$m=-7$，$n=11$.

这里若先分别求解原来的两个方程组，再使得它们的解相同而得关于m、n的方程组解之，则计算量很大. 这里应用方程组的概念，把原来的两个二元方程组看作一个四元一次方程组，使问题得以简便地解决.

例5 求证：方程$7x^3+8x^2+9x+10=0$的根的倒数是方程$10x^4+19x^3+17x^2+15x+7=0$的根.

解： 利用倒数概念和方程根的定义，设a是方程$7x^3+8x^2+9x+10=0$的根，则$7a^3+8a^2+9a+10=0$　　①

把四次方程的x换成$\frac{1}{a}$，化简得

$$7a^4+15a^3+17a^2+19a+10=0 \qquad ②$$

②÷①得$(7a^4+15a^3+17a^2+19a+10)$

$$\div(7a^3+8a^2+9a+10)=a+1,$$

即　②变为$(a+1)(7a^3+8a^2+9a+10)=0$　　③

由③可知，$\frac{1}{a}$是方程$10x^4+19x^3+17x^2+15x+7=0$的根.

这种题目，其常规思路是：先解出第一个方程，再把所求出的根的倒数逐一代入第二个方程，进行验证.这种方法既繁且难，而用方程的根的定义证明，既避免了繁琐的计算，而且思路简捷.

例6　解方程$y=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x+1}-1$.

分析：若按解分式无理方程的一般方法求出结果，再经过检验判断方程的解，其运算过程很繁琐，而且也不是初中学生所能解决的，若利用算术根的概念、分式的有关性质，解起来却十分简便.

解：由题设可知：$x^2-1\geqslant 0$且$1-x^2\geqslant 0$及$x+1\neq 0$.

即　$x^2=1$且$x\neq -1$.可知$x=1$.

将$x=1$代入原方程得$y=-1$.

经检验知$x=1$且$y=-1$是原方程的解.

例7　化简：$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+(a-1)}\right)\cdot$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right).$$

分析：本例如用常规方法求解十分繁琐.由于定义本身都是可逆的，所以如能逆用绝对值的定义则十分简单.

解：∵　$1-a=\sqrt{(1-a)^2}$，

∴　原式$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right.$

$$+\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1+a)(1-a)}+\sqrt{(a-1)^2}}\Bigg)$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$

$$=\frac{1-a^2-1}{a^2}=-1.$$

例8 计算$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

本题用配凑的方法比较繁琐，若逆用公式$\sqrt{a^2}=|a|$是非常简便的.

解：∵ $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}>0$.

∴ 原式$=\sqrt{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2}.$$

例9 计算$\frac{1}{(a-2)(a-1)}+\frac{1}{(a-1)\cdot a}+\frac{1}{a(a+1)}$

$$+\frac{1}{(a+1)(a+2)}.$$

分析：这类分式加减法的题目，其常规思路是根据分式加减法法则，先通分，再计算.若逆用这一法则，解法异常简捷.

解：$$\text{原式}=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{1}{a^2-4}.$$

例10 求作一个一元二次方程，使其根是方程$x^2+px+q=0(p^2-4q\geqslant 0)$的根的立方.

解：一般用韦达定理求出原方程两根的和与积，再根据韦达定理求出所作方程的系数和常数项. 但若活用方程的解的定义，则可得巧解.

设y是所作方程的解，则$\sqrt[3]{y}$是已知方程的解，因而有

$\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y}+q=0$，即 $\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y}=-q$.

两边立方得 $$y^2+3\sqrt[3]{y^2}\cdot p\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y})+p^3y=-q^3.$$

即 $y^2+3py(-q)+p^3y+q^2=0$.

$\therefore$ $y^2+(p^3-3pq)y+q^2=0$，即为所求.

例11 求作一元二次方程，使其根分别是方程$x^2-6x-7=0$各根的：(1) 倒数；(2) 相反数；(3) 平方.

解：这类题目一般是用韦达定理解决的，而灵活运用方程的根的定义可得更为简捷的解法.

设a是方程$x^2-6x-7=0$的根，x是所求方程的根.

(1) 由题意得$x=\frac{1}{a}$，则$a=\frac{1}{x}$.代入原方程得

$\left(\frac{1}{x}\right)^2-6\left(\frac{1}{x}\right)-7=0$，化简即得所求方程为$7x^2+6x-1=0$.

(2) 由题意得$x=-2$，则$a=-x$.代入原方程得

$(-x)^2-6(-x)-7=0$，即$x^2+6x-7=0$为所求.

(3) 这时有$x=a^2\geqslant 0$，于是$a=\pm\sqrt{x}$.代入原方程得

$(\pm\sqrt{x})^2-6(\pm\sqrt{x})-7=0$.

即 $x-7=\pm 6\sqrt{x}$.

两边平方并整理得$x^2-50x+49=0$，即为所求.

两种方法相比较，读者不难发现用定义解比用韦达定理解更简捷.

例12 已知方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个不为0的根x_1、x_2，若$s_1=x_1-x_2$，$s_2=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$，求$as_1+cs_2$的值.

解：由方程根的定义得

$ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$.

$\therefore\quad ax_1^2+c=-bx_1$，$ax_2^2+c=-bx_2$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad as_1+cs_2&=ax_1-ax_2+c\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\\&=\left(ax_1+\frac{c}{x_1}\right)-\left(ax_2+\frac{c}{x_2}\right)\\&=\frac{ax_1^2+c}{x_1}-\frac{ax_2^2+c}{x_2}\\&=\frac{-bx_1}{x_1}-\frac{-bx_2}{x_2}=0.\end{aligned}$$

例13 解方程$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}=x+1$.

解：若用常规方法"两边平方法"求解，则出现了大量的根式运算．若运用根式的定义，则可得如下的巧妙解法：

$$\because \begin{cases} x^2+2x-3\geqslant 0 & ① \\ x+3\geqslant 0 & ② \\ 1-x\geqslant 0 & ③ \end{cases}$$

由①得 $x\geqslant 1$或$x\leqslant -3$.

由②得 $x\geqslant -3$.

由③得 $x\leqslant 1$.

综合得 $x=1$或$x=-3$．经检查知$x=1$，$x=-3$满足原方程．

∴ 原方程的解是$x=1$和$x=-3$.

在求条件代数式值的题目中，若能巧妙地运用代数式的值的定义，就能得到一种简便的解法．

例14 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$，求$\frac{1}{1-3a}\cdot\frac{1}{1-3b}$的值．

解：令$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$．则

$$原式=\frac{1}{1-3\times\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-3\times\frac{1}{2}}=4.$$

例15 已知：$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$．求$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值．

解：令$a=4$，$b=2-\sqrt{3}$，$c=0$．则

$$原式=4^2+(2-\sqrt{3})^2+0^2-4(2-\sqrt{3})$$
$$-(2-\sqrt{3})\times 0-0\times 4$$

$$=16+(4-4\sqrt{3}+3)-8+4\sqrt{3}$$
$$=16+4-4\sqrt{3}+3-8+4\sqrt{3}$$
$$=15.$$

读者不妨利用其它方法验算一下，看看上面所得的结果是否正确.需要解决的是，这种利用特殊值求这类含条件等式的代数式值的方法的合理性是什么？实际上，根据代数式值的定义，对于含条件等式的代数式的求值问题而言，在这一条件下代数式的值是唯一确定的，与条件中字母取什么数无关，只需符合条件.这就是上面两个例题解法合理性的原因所在.

值得注意的是：取值时一要尽可能简单；二要使所取的值既要符合条件，又不能使被求式失去意义.

练　习　一

(1) 若a、b分别表示$6-\sqrt{5}$的整数部分和小数部分，试求代数式$2ab-b^2$的值.

(2) 已知$\sqrt{a+1}+|b+1|=0$，a、b为实数，求$a^{100}+b^{99}$的值.

(3) 已知a是方程 $x^2+x-1=0$ 的正根，求a^3-2a-3的值.

(4) 已知方程 $3x^2+5x-1=0$，不解方程、不用韦达定理，求作一个一元二次方程，使它的根：

① 等于已知方程各根的 2 倍；

② 比已知方程的各根大 2；

③ 等于已知方程各根的平方；

④ 等于已知方程各根的相反数.

(5) 解方程$\sqrt{x^2+5x-14}+\sqrt{x+7}+\sqrt{2-x}=5-x$.

(6) 已知x，y是实数，且满足 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\frac{2x+1}{3-4x}}+1$，求$x+xy+x^2y+x^3y$的值.

(7) 已知：$a-b=2$，$b-c=3$，求$(c-b)[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]$的值.

(8) 已知$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$ (a、b、c互不相等)，求$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$的值.

第2节　要牢固掌握重要的定理、公式和法则

数学中的定理、公式和运算法则，是解数学题的理论基础和工具，只有熟练地、灵活地掌握它们，才能有正确的思考方法和技巧，对于重要的数学公式，要做到能套用、逆用、变用和活用.

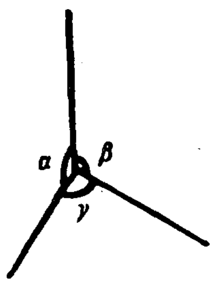

图　1-1

例1　用三个正多边形的木板铺地，拼在一起相交于一点的各边完全吻合．设它们的边数分别为a、b、c，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值.

解：设交于一点o的正a、b、c边形的一个内角分别为α、β、γ如图(1-1).