21世纪高职高专规划教材

公共基础系列

高等数学

（工科类、经管类）

主 编 刘 平

副主编 布秀敏 刘 琳 王庭宽

北京交通大学出版社

http://press.bjtu.edu.cn

21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高 等 数 学

（工科类、经管类）

主　编　刘　平

副主编　布秀敏　刘　琳　王庭宽

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

全书包括极限与连续(包括函数及其图形)、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程初步共6章. 每节末有习题，每章末有学习指导，其内容包括基本要求与重点、本章小结、典型例题分析与解答、复习题、阶段测验等. 书末附有习题答案或提示、初等数学中的常用公式和简易积分表.

本书主要适用于工科类、经管类、现代远程教育各专业学生的教材，也可作为“专升本”及学历文凭考试的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类、经管类/刘平主编. —北京：北京交通大学出版社，2005.6

（21世纪高职高专规划教材・公共基础系列）

ISBN 7-81082-544-5

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第054965号

责任编辑：黎　丹

出 版 者：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414

北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044

印 刷 者：北京东光印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　　印张：21.75　　字数：488千字

版　　次：2005年6月第1版　　2005年6月第1次印刷

书　　号：ISBN 7-81082-544-5/O・27

印　　数：1～5 000册　　定价：29.00元

前　　言

本书根据 2000 年教育部《应用数学基础课程基本要求》和 1996 年国家教委颁布的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》编写的，供高职高专学生使用.

高等数学课程是工科类、经管类各专业必修的重要基础课，它对提高学生的科学、文化素质，为学生学习后继课程，从事工程技术和科学研究工作，以及进一步获得现代科学知识奠定必要的数学基础. 在编写中我们努力体现下述特点.

(1) 降低理论深度，加强应用，强化能力培养，适度更新，兼顾体系；尽可能做到深入浅出，由易到难，从具体到抽象，循序渐进，注意系统性、科学性. 根据共性精选内容等原则，切合高职高专教育的教学规律.

(2) 重点突出，难点分散. 注重几何直观与物理解释，重视培养学生的几何想像能力、抽象概括能力和逻辑推理能力.

(3) 对基本概念、基本理论、基本方法的介绍力求做到通俗易懂，配备了较多的例题并附有一些解说，以便学生更好地理解、掌握，并能将基本方法条理化，以培养学生的运算能力.

(4) 为了培养学生的数学意识、兴趣和能力，教材中编入了较多的应用实例和习题.

(5) 教材富有弹性，加入了经营管理的内容，此内容经管类各专业必学，其他专业选学；有的内容标有“*”号，供选学用.

(6) 为了辅导学生学习，章末有学习指导，其内容包括基本要求与重点、本章小结、典型例题分析与解答、复习题、阶段测验等. 该部分例题、习题丰富，与正文密切配合；结合高职高专特点，注重培养应用意识；概念清晰，注重数形结合；重点内容滚动复习，便于自学. 同时，力图帮助学生理出知识框架和脉络，领会思想，掌握精髓，培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书由河北省高职数学研究会组织编委会编写. 全书由刘平任主编，布秀敏、刘琳、王庭宽任副主编，齐晓东、史恩静参加了编写. 第 1、2、3、4、5、6 章分别由布秀敏、刘平、王庭宽、齐晓东、刘琳、史恩静、张春编写，最后由主编修改、统稿、定稿.

本书是在原河北省中专数学研究会主编的《微积分》和现代交通远程教育系列教材《高等数学》这两本书的基础上，结合高职高专学生的特点编写的. 河北师范大学何连法教授详细审阅了前者的全部书稿，北京交通大学王维锦副教授审阅了后者的全部书稿，他们对书稿提出了许多修改意见，在此对两位老师表示由衷的感谢.

由于编者水平有限，时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正，以便再版时更加完善.

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

极限是微积分中最重要、最基本的概念之一，也是微积分学的基础。本章将在复习函数的有关概念后，阐明极限概念，介绍无穷小量与函数极限的关系，复习并引申极限的有关运算，然后讨论函数的连续性.

1.1　初 等 函 数

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

引例 1　自由落体运动，设 t 为物体下落的时间，s 为下落的距离，假设开始下落的时刻 $t=0$，则 s 与 t 之间的依赖关系由下式给出

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 T，则当时刻 t 在闭区间$[0, T]$上任取一值时，由上式就可以确定相应的 s 值.

引例 2　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜的气温变化如图 1－1 所示. 由图可以看到，一昼夜内任一时刻 t，都有惟一确定的温度 T 与之对应，因此图中曲线在闭区间$[0, 24]$上确定了 t 与 T 之间的一种依赖关系.

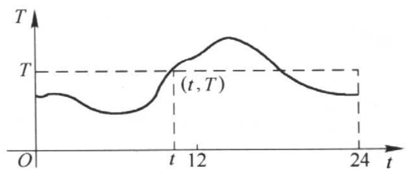

图 1－1

以上两例均表达了两个变量之间的相依关系，当一个变量在某一数集内任意取定一个值时，另一个变量就依此关系有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种关系称为函数关系.

定义 1.1 设 D 是一个实数集，若对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，y 都有惟一确定的值和它对应，则 y 称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**. 当 x 取遍 D 中一切值时，与它对应的函数值的集合 M 就称为函数的**值域**.

2. 函数的定义域

在研究函数时，必须注意函数的定义域. 考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域；而对于用数学式子表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义. 例如：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方；

(3) 在对数式中，真数要大于零；

(4) 在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域；

(5) 若函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 1.1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$　　(2) $y=\lg x(x-1)$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$

解 (1) 因为

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\geqslant -2\end{cases}$$

所以函数的定义域为$(-2, 2)\cup(2, +\infty)$.

(2) 因为

$$x(x-1)>0$$

即

$$x>1 \text{ 或 } x<0$$

所以函数的定义域为$(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$.

(3) 因为

$$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1$$

即

$$-3 \leqslant x+1 \leqslant 3, \quad -4 \leqslant x \leqslant 2$$

所以函数的定义域为$[-4, 2]$.

注意 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的.

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数. 又如函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数.

3. 函数与函数值的记号

我们知道，y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 但在同一个问题中，如果需要讨论几个不同的函数，为区别起见，可用不同的函数记号来表示. 例如，以 x 为自变量的函数也可表示为 $F(x)$，$\phi(x)$，$y(x)$，$S(x)$等.

当 $x=x_0 \in D$ 时，函数 $y=f(x)$ 对应的函数值可记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

例 1.2 设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

解

$$f(2)=0, \quad f(-2)=\frac{|-2-2|}{-2+1}=-4$$

$$f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2, \quad f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}, \quad f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}$$

例 1.3 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，证明 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$.

证 因为

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sin\frac{2}{3}\pi}{1+\cos\frac{2}{3}\pi}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

所以

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}=1$$

另外，在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$ 都有惟一确定的 $y\in M$ 与它对应. 故常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因此当 $x\in\mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C. 通常称 $y=C$(C 为常数)为常函数.

4. 函数的表示法

函数的表示方法，常用的有**解析法**、**表格法**和**图像法**三种.

(1) **表格法** 在实际应用中，有时常把自变量所取的值和对应函数值列成表，用来表示函数关系，如三角函数表、对数表等.

(2) **图像法** 用函数的图像来表示自变量 x 与函数 y 之间的关系(如引例 2 就是用图像来表示时间 t 与温度 T 之间的函数关系的).

(3) **解析法** 用数学式子表示自变量 x 与函数 y 之间关系的方法即为解析法. 本书常用解析法讨论函数.

5. 反函数

引例 3 在商品销售中，已知某种商品的价格(即单价)为 m，如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品销售总收入 y，则 x 是自变量，y 是函数，其函数关系式为

$$y=mx$$

反过来，如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量，就必须把 y 作为自变量，把 x 作为函数，并由函数 $y=mx$ 解出 x 关于 y 的函数关系式为

$$x=\frac{y}{m}$$

这时称 $x=\frac{y}{m}$ 为 $y=mx$ 的反函数，而 $y=mx$ 称为直接函数. 推广到一般，即得反函数的定义如下.

定义 1.2 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 若对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$)都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定惟一的 x 值($x\in D$)与之对应，则所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\phi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.4 求函数 $y=2x-3$ 的反函数，并画出图像.

解 从函数 $y=2x-3$ 中直接解出 x，得反函数 $x=\frac{1}{2}(y+3)$. 交换变量记号，得 $y=2x-3$ 的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+3)$$

直接函数 $y=2x-3$ 与其反函数 $y=\frac{1}{2}(x+3)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

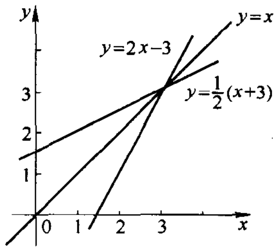

图 1-2

并不是所有的函数都有反函数，如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内就没有反函数. 但单调函数的反函数总是存在的.

6. 函数的几种特性

1) 函数的奇偶性

定义 1.3　若函数 $f(x)$ 的定义域是关于坐标原点对称的，对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 为**奇函数（或偶函数）**. 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x，既不是奇函数，也不是偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

例如，(1) $f(x)=x^3$ 是奇函数. 因为对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

(2) $f(x)=x^2$ 是偶函数. 因为对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

(3) $f(x)=\sin x$ 是奇函数. 因为对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$.

(4) $f(x)=\cos x$ 是偶函数. 因为对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数. 因为 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，它既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$.

奇函数的图像关于**原点对称**. 设 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，若点 $A(x, f(x))$ 在 $y=f(x)$ 的图像上，则和它关于原点对称的点 $A'(-x, -f(x))$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上，如图 1-3 所示.

偶函数的图像关于 **y 轴对称**. 设 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，若点 $A(x, f(x))$ 在 $y=f(x)$ 的图像上，则和它关于 y 轴对称的点 $A''(-x, f(x))$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上，如图 1-4 所示.

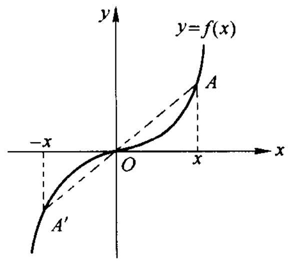

图 1-3

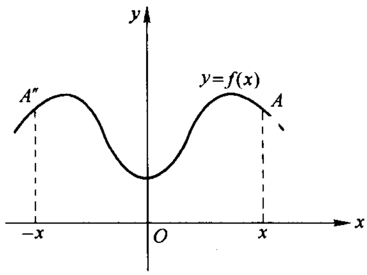

图 1-4

注意 根据上述函数奇偶性的定义，并参看图 1-3 和图 1-4 可知，不论是奇函数还是偶函数，它们的定义域必须关于原点对称.

例 1.5 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 因为

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]\\
&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\
&=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}\\
&=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)
\end{aligned}
$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

2）函数的单调性

定义 1.4 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内任意点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调增加(减少)**的，区间 (a, b) 称为函数 $f(x)$ 的**单调增加(减少)区间**.

单调增加的函数，它的图像沿横轴正向而上升，如图 1-5 所示；单调减少的函数，它的图像沿横轴正向而下降，如图 1-6 所示.