



21世纪高职高专规划教材

公共基础系列

# 高等数学

(工科类、经管类)

主 编 刘 平

副主编 布秀敏 刘 琳 王庭宽



北京交通大学出版社  
<http://press.bjtu.edu.cn>

21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

# 高等数学

(工科类、经管类)

主 编 刘 平

副主编 布秀敏 刘 琳 王庭宽

北京交通大学出版社

· 北京 ·

## 内 容 简 介

全书包括极限与连续(包括函数及其图形)、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程初步共6章。每节末有习题,每章末有学习指导,其内容包括基本要求与重点、本章小结、典型例题分析与解答、复习题、阶段测验等。书末附有习题答案或提示、初等数学中的常用公式和简易积分表。

本书主要适用于工科类、经管类、现代远程教育各专业学生的教材,也可作为“专升本”及学历文凭考试的教学参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学:工科类、经管类/刘平主编. —北京:北京交通大学出版社,2005.6

(21世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 7-81082-544-5

I. 高… II. 刘… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第054965号

责任编辑:黎丹

出版者:北京交通大学出版社 电话:010-51686414

北京市海淀区高粱桥斜街44号 邮编:100044

印刷者:北京东光印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开本:185×230 印张:21.75 字数:488千字

版次:2005年6月第1版 2005年6月第1次印刷

书号:ISBN 7-81082-544-5/O·27

印数:1~5000册 定价:29.00元

---

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@center.bjtu.edu.cn。

# 前 言

本书根据 2000 年教育部《应用数学基础课程基本要求》和 1996 年国家教委颁布的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》编写的，供高职高专学生使用。

高等数学课程是工科类、经管类专业必修的重要基础课，它对提高学生的科学、文化素质，为学生学习后继课程，从事工程技术和科学研究工作，以及进一步获得现代科学知识奠定必要的数学基础。在编写中我们努力体现下述特点。

(1) 降低理论深度，加强应用，强化能力的培养，适度更新，兼顾体系；尽可能做到深入浅出，由易到难，从具体到抽象，循序渐进，注意系统性、科学性。根据共性精选内容等原则，切合高职高专教育的教学规律。

(2) 重点突出，难点分散。注重几何直观与物理解释，重视培养学生的几何想像能力、抽象概括能力和逻辑推理能力。

(3) 对基本概念、基本理论、基本方法的介绍力求做到通俗易懂，配备了较多的例题并附有一些解说，以便学生更好地理解、掌握，并能将基本方法条理化，以培养学生的运算能力。

(4) 为了培养学生的数学意识、兴趣和能力，教材中编入了较多的应用实例和习题。

(5) 教材富有弹性，加入了经营管理的内容，此内容经管类专业必学，其他专业选学；有的内容标有“\*”号，供选学用。

(6) 为了辅导学生学习，章末有学习指导，其内容包括基本要求与重点、本章小结、典型例题分析与解答、复习题、阶段测验等。该部分例题、习题丰富，与正文密切配合；结合高职高专特点，注重培养应用意识；概念清晰，注重数形结合；重点内容滚动复习，便于自学。同时，力图帮助学生理出知识框架和脉络，领会思想，掌握精髓，培养学生分析问题、解决问题的能力。

本书由河北省高职数学研究会组织编委会编写。全书由刘平任主编，布秀敏、刘琳、王庭宽任副主编，齐晓东、史恩静参加了编写。第 1、2、3、4、5、6 章分别由布秀敏、刘平、王庭宽、齐晓东、刘琳、史恩静、张春编写，最后由主编修改、统稿、定稿。

本书是在原河北省中专数学研究会主编的《微积分》和现代交通远程教育系列教材《高等数学》这两本书的基础上，结合高职高专学生的特点编写的。河北师范大学何连法教授详细审阅了前者的全部书稿，北京交通大学王维锦副教授审阅了后者的全部书稿，他们对书稿提出了许多修改意见，在此对两位老师表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正，以便再版时更加完善。

编 者  
2005 年 6 月

# 目 录

第 1 章 极限与连续	1
1.1 初等函数	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 基本初等函数	9
1.1.3 复合函数、初等函数	12
1.1.4 建立函数关系举例	15
习题 1.1	18
1.2 数列极限的定义与性质	20
1.2.1 数列极限的定义	20
1.2.2 收敛数列的性质	21
习题 1.2	22
1.3 函数的极限	22
1.3.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	22
1.3.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	24
1.3.3 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的左、右极限	27
1.3.4 极限的性质	29
习题 1.3	29
1.4 极限的运算法则	29
习题 1.4	33
1.5 两个重要极限	34
1.5.1 重要极限(I) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	34
1.5.2 重要极限(II) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	35
习题 1.5	37
1.6 无穷小与无穷大	37
1.6.1 无穷小	37
1.6.2 无穷大	39
1.6.3 无穷小的比较	40
习题 1.6	42

1.7	函数的连续性与间断点	43
1.7.1	函数连续性的概念	43
1.7.2	函数的间断点	47
	习题 1.7	50
1.8	连续函数的运算法则与初等函数的连续性	51
1.8.1	连续函数的四则运算法则	51
1.8.2	复合函数的连续性	51
1.8.3	反函数的连续性	52
1.8.4	初等函数的连续性	52
	习题 1.8	54
1.9	闭区间上连续函数的性质	54
1.9.1	最大值和最小值定理	55
1.9.2	介值定理	56
	习题 1.9	57
1.10	经济问题中常见的函数	58
1.10.1	需求函数	58
1.10.2	供给函数	58
1.10.3	成本函数	59
1.10.4	收入函数	60
1.10.5	利润函数	60
	习题 1.10	61
	学习指导	61
	基本要求与重点	61
	本章小结	62
	典型例题分析与解答	64
	复习题一	72
	阶段测验一	75
<b>第 2 章</b>	<b>导数与微分</b>	<b>78</b>
2.1	导数概念	78
2.1.1	两个引例	78
2.1.2	导数的定义	80
2.1.3	利用导数定义求导数	81
2.1.4	导数的简单应用	83
2.1.5	函数的可导性与连续性之间的关系	84
	习题 2.1	86

2.2	导数的四则运算法则	87
	习题 2.2	89
2.3	反函数的求导法则与复合函数的求导法则	90
2.3.1	反函数的求导法则	90
2.3.2	复合函数的求导法则	92
2.3.3	初等函数的求导问题小结	95
	习题 2.3	96
2.4	隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数	97
2.4.1	显函数和隐函数	97
2.4.2	隐函数的导数	97
2.4.3	对数求导法	99
2.4.4	由参数方程确定的函数的导数	100
	习题 2.4	102
2.5	高阶导数	103
2.5.1	高阶导数的定义及其求法	103
2.5.2	二阶导数的力学意义	105
	习题 2.5	105
2.6	微分及其应用	106
2.6.1	微分的概念	106
2.6.2	微分的几何意义	108
2.6.3	微分的基本公式和运算法则	109
2.6.4	微分在近似计算中的应用	111
	习题 2.6	114
	学习指导	114
	基本要求与重点	114
	本章小结	115
	典型例题分析与解答	117
	复习题二	121
	阶段测验二	122
<b>第 3 章</b>	<b>中值定理与导数的应用</b>	<b>124</b>
3.1	中值定理	124
3.1.1	罗尔(Rolle)定理	124
3.1.2	拉格朗日(Lagrange)中值定理	125
	习题 3.1	127
3.2	洛必达法则	127

3.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	128
3.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	129
3.2.3	其他类型的未定式	130
	习题 3.2	132
3.3	函数的单调性与函数的极值	133
3.3.1	函数的单调性定义及判定法	133
3.3.2	函数的极值与极值点定义	136
	习题 3.3	139
3.4	函数的最大值与最小值	140
3.4.1	最大值与最小值	140
3.4.2	经济应用举例	143
	习题 3.4	144
* 3.5	边际分析与弹性分析简介	145
3.5.1	边际分析	145
3.5.2	弹性分析	146
	习题 3.5	147
3.6	曲线的凹凸性和拐点	147
3.6.1	曲线的凹凸性定义与判定法	148
3.6.2	拐点的定义和判定	149
	习题 3.6	151
3.7	函数图像的描绘	152
3.7.1	曲线的水平渐近线和垂直渐近线	152
3.7.2	函数作图	153
	习题 3.7	156
	学习指导	156
	基本要求与重点	156
	本章小结	157
	典型例题分析与解答	158
	复习题三	163
	阶段测验三	163
<b>第 4 章</b>	<b>不定积分</b>	<b>165</b>
4.1	原函数与不定积分	165
4.1.1	原函数	165



4.1.2 不定积分 .....	167
4.1.3 不定积分的几何意义 .....	167
习题 4.1 .....	168
4.2 不定积分的基本公式和运算法则(直接积分法) .....	169
4.2.1 积分基本公式 .....	169
4.2.2 积分的基本运算法则 .....	170
4.2.3 直接积分法 .....	171
习题 4.2 .....	173
4.3 换元积分法 .....	174
4.3.1 第一类换元积分法 .....	174
4.3.2 第二类换元积分法 .....	179
习题 4.3 .....	182
4.4 分部积分法 .....	184
习题 4.4 .....	187
4.5 简易积分表及其用法 .....	188
习题 4.5 .....	190
学习指导 .....	190
基本要求与重点 .....	190
本章小结 .....	191
典型例题分析与解答 .....	192
复习题四 .....	195
阶段测验四 .....	196
<b>第 5 章 定积分及其应用</b> .....	<b>198</b>
5.1 定积分的概念 .....	198
5.1.1 两个引例 .....	198
5.1.2 定积分的定义 .....	201
5.1.3 定积分的几何意义 .....	202
5.1.4 定积分的性质 .....	204
习题 5.1 .....	206
5.2 微积分基本定理 .....	207
5.2.1 变上限的定积分及其导数 .....	208
5.2.2 牛顿-莱布尼兹公式 .....	209
习题 5.2 .....	213
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法 .....	213
5.3.1 定积分的换元积分法 .....	214

5.3.2 分部积分法 .....	216
习题 5.3 .....	217
5.4 定积分在几何上的应用 .....	217
5.4.1 平面图形的面积 .....	218
5.4.2 旋转体的体积 .....	221
* 5.4.3 平面曲线的弧长 .....	223
习题 5.4 .....	225
5.5 定积分在物理和经济上的应用 .....	226
5.5.1 变力做功 .....	226
* 5.5.2 液体的压力 .....	227
* 5.5.3 函数的平均值 .....	229
* 5.5.4 定积分在经济中的应用 .....	230
习题 5.5 .....	232
5.6 无限区间上的广义积分 .....	233
习题 5.6 .....	236
学习指导 .....	236
基本要求与重点 .....	236
本章小结 .....	236
典型例题分析与解答 .....	238
复习题五 .....	242
阶段测验五 .....	243
<b>第 6 章 微分方程初步</b> .....	246
6.1 微分方程的概念 .....	246
6.1.1 两个引例 .....	246
6.1.2 微分方程的概念 .....	248
习题 6.1 .....	250
6.2 可分离变量的微分方程与可化为可分离变量的微分方程 .....	251
6.2.1 可分离变量的微分方程 .....	251
* 6.2.2 可化为可分离变量的微分方程 .....	256
习题 6.2 .....	258
6.3 一阶线性微分方程 .....	259
6.3.1 一阶线性微分方程的概念与解的结构 .....	259
* 6.3.2 伯努利方程 .....	264
习题 6.3 .....	265
6.4 二阶常系数线性齐次微分方程 .....	266

6.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程的概念与解的结构 .....	266
6.4.2 二阶常系数线性齐次微分方程的解法 .....	267
习题 6.4 .....	270
6.5 二阶常系数线性非齐次微分方程 .....	271
6.5.1 二阶常系数线性非齐次微分方程解的概念与结构 .....	271
6.5.2 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 .....	272
习题 6.5 .....	278
* 6.6 二阶线性微分方程的应用 .....	279
习题 6.6 .....	284
学习指导 .....	285
基本要求与重点 .....	285
典型例题分析与解答 .....	285
复习题六 .....	295
阶段测验六 .....	296
习题答案或提示 .....	298
附录 A 初等数学中的常用公式 .....	323
附录 B 简易积分表 .....	327

# 第 1 章 极限与连续

极限是微积分中最重要、最基本的概念之一，也是微积分学的基础。本章将在复习函数的有关概念后，阐明极限概念，介绍无穷小量与函数极限的关系，复习并引申极限的有关运算，然后讨论函数的连续性。

## 1.1 初等函数

### 1.1.1 函数的概念

#### 1. 函数的定义

**引例 1** 自由落体运动，设  $t$  为物体下落的时间， $s$  为下落的距离，假设开始下落的时刻  $t=0$ ，则  $s$  与  $t$  之间的依赖关系由下式给出

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中， $g$  是重力加速度。假定物体着地的时刻为  $T$ ，则当时刻  $t$  在闭区间  $[0, T]$  上任取一值时，由上式就可以确定相应的  $s$  值。

**引例 2** 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜的气温变化如图 1-1 所示。由图可以看到，一昼夜内任一时刻  $t$ ，都有惟一确定的温度  $T$  与之对应，因此图中曲线在闭区间  $[0, 24]$  上确定了  $t$  与  $T$  之间的一种依赖关系。

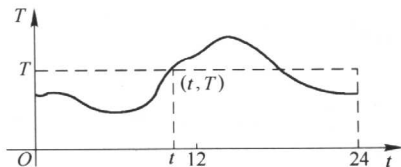


图 1-1

以上两例均表达了两个变量之间的相依关系，当一个变量在某一数集内任意取定一个值时，另一个变量就依此关系有一个确定的值与之对应。两个变量之间的这种关系称为函数关系。

**定义 1.1** 设  $D$  是一个实数集, 若对属于  $D$  的每一个数  $x$ , 按照某种对应关系  $f$ ,  $y$  都有惟一确定的值和它对应, 则  $y$  称为定义在数集  $D$  上的  $x$  的函数, 记作  $y=f(x)$ .  $x$  称为自变量, 数集  $D$  称为函数的定义域. 当  $x$  取遍  $D$  中一切值时, 与它对应的函数值的集合  $M$  就称为函数的值域.

## 2. 函数的定义域

在研究函数时, 必须注意函数的定义域. 考虑实际问题时, 应根据问题的实际意义来确定定义域; 而对于用数学式子表示的函数, 它的定义域可由函数表达式本身来确定, 即要使运算有意义. 例如:

- (1) 在分式中, 分母不能为零;
- (2) 在根式中, 负数不能开偶次方;
- (3) 在对数式中, 真数要大于零;
- (4) 在反三角函数式中, 要符合反三角函数的定义域;
- (5) 若函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式, 则应取各部分定义域的交集.

**例 1.1** 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2} \qquad (2) y = \lg x(x-1)$$

$$(3) y = \arcsin \frac{x+1}{3}$$

**解** (1) 因为

$$\begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

所以函数的定义域为  $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$ .

(2) 因为

$$x(x-1) > 0$$

即

$$x > 1 \text{ 或 } x < 0$$

所以函数的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

(3) 因为

$$-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$$

即

$$-3 \leq x+1 \leq 3, \quad -4 \leq x \leq 2$$

所以函数的定义域为 $[-4, 2]$ .

**注意** 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时, 这两个函数才认为是相同的.

例如, 函数  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$  与  $y = 1$ , 它们的定义域和对应关系都相同, 所以它们是相同的函数. 又如函数  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  与  $y = x+1$ , 它们的定义域不同, 所以它们是不同的函数.

### 3. 函数与函数值的记号

我们知道,  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ . 但在同一个问题中, 如果需要讨论几个不同的函数, 为区别起见, 可用不同的函数记号来表示. 例如, 以  $x$  为自变量的函数也可表示为  $F(x)$ ,  $\phi(x)$ ,  $y(x)$ ,  $S(x)$  等.

当  $x = x_0 \in D$  时, 函数  $y = f(x)$  对应的函数值可记作  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ .

**例 1.2** 设  $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ , 求  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(a)$ ,  $f(a+b)$ .

**解**  $f(2) = 0$ ,  $f(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = -4$

$$f(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2, \quad f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}, \quad f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$$

**例 1.3** 设  $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ , 证明  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$ .

**证** 因为

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin \frac{2}{3}\pi}{1 + \cos \frac{2}{3}\pi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

所以

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1$$

另外, 在函数的定义中, 并没有要求自变量变化时函数值一定要变, 只要求对于自变量  $x \in D$  都有惟一确定的  $y \in M$  与它对应. 故常量  $y=C$  也符合函数的定义, 因此当  $x \in \mathbf{R}$  时, 所对应的  $y$  值都是确定的常数  $C$ . 通常称  $y=C$  ( $C$  为常数) 为常函数.

#### 4. 函数的表示法

函数的表示方法, 常用的有解析法、表格法和图像法三种.

(1) **表格法** 在实际应用中, 有时常把自变量所取的值和对应函数值列成表, 用来表示函数关系, 如三角函数表、对数表等.

(2) **图像法** 用函数的图像来表示自变量  $x$  与函数  $y$  之间的关系(如引例 2 就是用图像来表示时间  $t$  与温度  $T$  之间的函数关系的).

(3) **解析法** 用数学式子表示自变量  $x$  与函数  $y$  之间关系的方法即为解析法. 本书常用解析法讨论函数.

#### 5. 反函数

**引例 3** 在商品销售中, 已知某种商品的价格(即单价)为  $m$ , 如果要想用该商品的销售量  $x$  来计算该商品销售总收入  $y$ , 则  $x$  是自变量,  $y$  是函数, 其函数关系式为

$$y=mx$$

反过来, 如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量, 就必须把  $y$  作为自变量, 把  $x$  作为函数, 并由函数  $y=mx$  解出  $x$  关于  $y$  的函数关系式为

$$x=\frac{y}{m}$$

这时称  $x=\frac{y}{m}$  为  $y=mx$  的反函数, 而  $y=mx$  称为直接函数. 推广到一般, 即得反函数的定义如下.

**定义 1.2** 设有函数  $y=f(x)$ , 其定义域为  $D$ , 值域为  $M$ . 若对于  $M$  中的每一个  $y$  值 ( $y \in M$ ) 都可以从关系式  $y=f(x)$  确定惟一的  $x$  值 ( $x \in D$ ) 与之对应, 则所确定的以  $y$  为自变量的函数  $x=\phi(y)$  或  $x=f^{-1}(y)$  称为函数  $y=f(x)$  的**反函数**, 它的定义域为  $M$ , 值域为  $D$ .

习惯上, 函数的自变量都以  $x$  表示, 所以反函数也可表示为  $y=f^{-1}(x)$ .

函数  $y=f(x)$  的图像与其反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称.

**例 1.4** 求函数  $y=2x-3$  的反函数, 并画出图像.

**解** 从函数  $y=2x-3$  中直接解出  $x$ , 得反函数  $x=\frac{1}{2}(y+3)$ . 交换变量记号, 得  $y=2x-3$  的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+3)$$

直接函数  $y=2x-3$  与其反函数  $y=\frac{1}{2}(x+3)$  的图像关于直线  $y=x$  对称, 如图 1-2 所示.

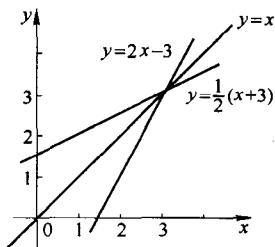


图 1-2

并不是所有的函数都有反函数, 如函数  $y=x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内就没有反函数. 但单调函数的反函数总是存在的.

## 6. 函数的几种特性

### 1) 函数的奇偶性

**定义 1.3** 若函数  $f(x)$  的定义域是关于坐标原点对称的, 对任意  $x \in D$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$  (或  $f(-x) = f(x)$ ), 则称  $f(x)$  为**奇函数**(或**偶函数**). 若函数  $f(x)$  对于定义域内的任意  $x$ , 既不是奇函数, 也不是偶函数, 则称  $f(x)$  为**非奇非偶函数**.

例如, (1)  $f(x) = x^3$  是奇函数. 因为对于一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ .

(2)  $f(x) = x^2$  是偶函数. 因为对于一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .

(3)  $f(x) = \sin x$  是奇函数. 因为对于一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ .

(4)  $f(x) = \cos x$  是偶函数. 因为对于一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ .

(5)  $f(x) = \sin x + \cos x$  是非奇非偶函数. 因为  $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$ , 对于一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 它既不等于  $f(x)$ , 也不等于  $-f(x)$ .

**奇函数的图像关于原点对称.** 设  $f(x)$  是奇函数, 则  $f(-x) = -f(x)$ , 若点  $A(x, f(x))$  在  $y=f(x)$  的图像上, 则和它关于原点对称的点  $A'(-x, -f(x))$  也在  $y=f(x)$  的图像上, 如图 1-3 所示.

**偶函数的图像关于 y 轴对称.** 设  $f(x)$  是偶函数, 则  $f(-x) = f(x)$ , 若点  $A(x, f(x))$  在  $y=f(x)$  的图像上, 则和它关于 y 轴对称的点  $A''(-x, f(x))$  也在  $y=f(x)$  的图像上, 如图 1-4 所示.



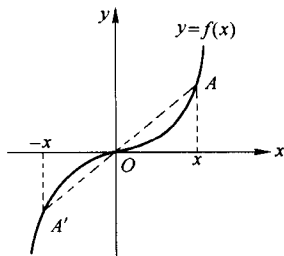


图 1-3

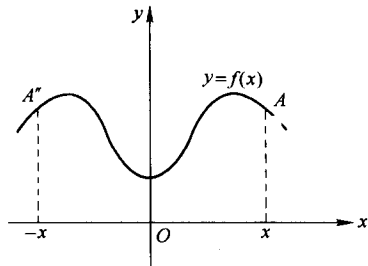


图 1-4

**注意** 根据上述函数奇偶性的定义,并参看图 1-3 和图 1-4 可知,不论是奇函数还是偶函数,它们的定义域必须关于原点对称.

**例 1.5** 判断函数  $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$  的奇偶性.

**解** 函数  $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ . 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln[(-x) + \sqrt{(-x)^2 + 1}] \\ &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1} \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x) \end{aligned}$$

所以  $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$  是奇函数.

## 2) 函数的单调性

**定义 1.4** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内随着  $x$  的增大而增大,即对于  $(a, b)$  内任意点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是单调增加(减少)的, 区间  $(a, b)$  称为函数  $f(x)$  的单调增加(减少)区间.

单调增加的函数, 它的图像沿横轴正向而上升, 如图 1-5 所示; 单调减少的函数, 它的图像沿横轴正向而下降, 如图 1-6 所示.