高校经典教材配套辅导系列

高等代数题解精粹

钱吉林 编著

中央民族大学出版社

高校经典教材配套辅导

高等代数题解精粹

钱吉林　编著

中央民族大学出版社

策　划　　宋　谨
责任编辑　　吴　云
封面设计　　众　邦

图书在版编目(CIP)数据

高等代数题解精粹/钱吉林编著.—北京:中央民族大学出版社,2002.10

ISBN 7-81056-722-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.钱…　Ⅲ.高等代数—研究生—入学考试—解题　Ⅳ.O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 076942 号

高等代数题解精粹

出版者:中央民族大学出版社
　　　　中国北京市海淀区中关村南大街 27 号
印刷者:华中理工大学印刷厂
发行者:新华书店
开本:850mm×1168mm　1/32　印张:15.75
字数:500 千字
版次:2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷
定价:26.80 元

前　　言

随着全球经济一体化的进程，企业人才竞争也步入国际化，优胜劣汰将更趋明朗公开。我等均需充电，以期提高素质和提升学历。这本《高等代数题解精粹》旨在帮助学生对教材中的考点融会贯通，给考研人员以更丰富更实用的题解信息，其特点有：

1. **罕见的试题**：本书所列试题很多没对外发表过，是各院校秘而不宣的内部资料，诸多考生常常为获取这些试题而煞费苦心。本书试题涉及到北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和中国科学院等100多所名牌权威院府。此外，还有美国、俄罗斯、日本、澳大利亚等国的试题及解答。

2. **经典的解析**：本书依据作者几十年高校教学生涯的经验积累，对各种考题作了双向归纳。一向是对考题的题型作了归纳；另一向是对考题的解法作了归纳。希望达到抛砖引玉的效果，使学生和考生能由此及彼，举一反三，从而在考试时挥洒自如。

3. **便捷的结构**：全书共分9章，章下面是节，每节又分若干个考点。这对于考研人员是一本精美完整的综合复习资料。学生可通过章节，迅速找到自己所需要的考题，思路明晰，重点突出。

由于本书集知识性、资料性、方法性、应考性于一体，它不仅是考研人员的良师益友，更是理科、工科、经济类的学生学习《线性代数》和《高等代数》的参考书，也是高校数学教师的教学参考资料。

本书的目标是：提供信息，帮您领先一步！

钱吉林　华中师范大学数学系

2002年8月

书卷多情似故人，

晨昏忧乐每相亲。

眼前直下三千字，

脑中全无一点尘。

——明·于谦

目　　录

耕也，馁在其中矣；学也，禄在其中矣。

——《论语》

第一章　多项式

§1　概念、根

【考点综述】

1. 数域(1)设 P 是复数的子集，若 $0\in P$，$1\in P$，且如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)的运算结果仍然是 P 中的数，则称 P 是一个数域.

(2)任何数域都包含有理数域，从而数域是无限集.

(3)数域有无穷多个，其中最重要的有复数域 C，实数域 R 和有理数域 Q.

2. 多项式的概念　(1)设 x 是一个文字，P 是数域，形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,(a_i\in P,n\text{ 是非负整数})\qquad ①$$

表达式，称为数域 P 上的一元多项式. P 上一元多项式的全体记为 $P[x]$.

(2)如果①式中 $a_n\neq0$，称它为 n 次多项式，零多项式不定义次数. 多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$或次$(f(x))$或 $deg(f(x))$等.

3. 根　(1)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$，若 $\beta\in P$ 有$f(\beta)=0$，则称 β 为$f(x)$的一个根或零点.

(2)β 是多项式$f(x)$的根$\Leftrightarrow(x-\beta)\mid f(x)$.

(3)$n(n\geqslant1)$次复系数多项式，在复数域中有 n 个复根(重根按重数计).

一般，数域 P 中 $n(n\geqslant1)$次多项式，在 P 中根的个数不超过 n.

(4)$x^n-1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})(x-1)$，

[redacted]

其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, $\varepsilon^n=1$.

(5)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,其中 $a_i\in\mathbf{Z}$.若 $f(x)$有一个有理根$\frac{r}{s}$(其中 r,s 互素),则 $s\mid a_n$, $r\mid a_0$.

特别,当 $a_n=1$ 时,$f(x)$的有理根都是整数,而且是 a_0 的因数.

4. 根与系数关系(1)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $(n\geqslant1$, $a_n\neq0)$如果它的 n 个根记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

(2)如果记 $\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$, $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$, $\cdots$, $\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$,并称它们为初等对称多项式.那么关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意对称多项式都可表示为初等对称多项式的多项式.

5. 设 $f(x)\in P[x]$,则 $f(x)$没重根$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))=1$.

$f(x)$有重根$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))\neq1$.

【经典题解】

1.**(中国人民大学,1991 年)** 多项式 $f(x)$除以 $ax-b(a\neq0)$所得余式为________.

答 $f(\frac{b}{a})$.

解 设 $f(x)=(ax-b)q(x)+A$. ①

将 $x=\frac{b}{a}$ 代入①式,得 $f(\frac{b}{a})=A$.由商式和余式唯一性即得.

2.**(河南大学)** 设 $f(x)$为一多项式,若

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\qquad x,y\in R \quad ①$$

则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

证 如果 $f(x)=0$,则证毕.若 $f(x)\neq0$,由 $f(2x)=f^2(x)$,

那么 $f(x)$只能是零次多项式,令 $f(x)=A\neq0$.又因为 $A=f(0)=f(0+0)=f^2(0)=A^2$, $A\neq0$, $\therefore A=1$.此即 $f(x)=1$.

3.**(自编)** 设 P 是一个数集,有一个非零数 $a\in P$,且 P 关于减法,除

法(除数不为 0)封闭,证明 P 是一个数域.

证 $\because a\in P$, $\therefore 0=a-a\in P, 1=\dfrac{a}{a}\in P$.

$\forall x,y\in P$,那么 $x+y=x-(0-y)\in P$,即证加法封闭.

$\forall x,y\in P$,若 x,y 中有一为 0,那么 $xy=0\in P$.若 $xy\neq 0$,那么

$xy=\dfrac{x}{\frac{1}{y}}\in P$.从而证明乘法封闭.

综上可知:P 关于加法、减法、乘法、除法都封闭,所以 P 是一个数域.

4.(北京大学,1992 年) 试就实数域和复数域的两种情况,求 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的标准分解式.

解 令 $g(x)=(x-1)f(x)$.则 $g(x)=x^{n+1}-1$.那么

$$g(x)=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^n)(x-1). \qquad ①$$

其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+i\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$.

(1)由①式可知,$f(x)$在复数域上的标准分解式为

$$f(x)=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^n).$$

(2)因为$\overline{\varepsilon^k}=\varepsilon^{n+1-k}$,$(0<k<n+1)$,并由①式可知,$f(x)$在实数域的标准分解式,可分为两种情况:

(ⅰ)当 n 为偶数时,

$$f(x)=(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n+1}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n+1}+1)\cdots(x^2-2x\cos\frac{n\pi}{n+1}+1).$$

(ⅱ)当 n 为奇数时,

$$f(x)=(x+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n+1}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n+1}+1)\cdots(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n+1}+1).$$

5.(中山大学) 设 a,b 是正整数,$p(\geqslant 3)$为素数,$\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ 为 p 次单位根,证明:

$$(a+b)(a+\varepsilon b)(a+\varepsilon^2 b)\cdots(a+\varepsilon^{p-1}b)=a^p+b^p.$$

证 把 a 看成一个文字,那么 a^p+b^p 在复数域中有 p 个根,它们是 $-b,-\varepsilon b,\cdots,-\varepsilon^{p-1}b$.

$$\therefore a^p+b^p=(a+b)(a+\varepsilon b)(a+\varepsilon^2 b)\cdots(a+\varepsilon^{p-1}b).$$

6.(华中科技大学) 设不可约的有理分数$\dfrac{p}{q}$是整系数多项式

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根,证明:$q\mid a_0,p\mid a_n$.

[redacted]

证　因为$\frac{p}{q}$是$f(x)$的根，那么$(x-\frac{p}{q})\mid f(x)$，从而$(qx-p)\mid f(x)$. 因为p,q互素，所以$qx-p$是本原多项式(即多项式的系数没有异于± 1的公因子)，

$$f(x)=(qx-p)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0),\quad b_i\in Z.$$

比较两边系数，得　$a_0=qb_{n-1}, a_n=-pb_0, \therefore q\mid a_0, p\mid a_n$.

7.(**上海交通大学**)　若$(x^4+x^3+x^2+x+1)\mid[x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5)]$，

这里$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$为实系数多项式，求证：

$$f_i(1)=0,\quad (i=1,2,3,4).$$

证　设x^5-1的5个根为$1,\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4$，其中$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，$\varepsilon^5=1$.

那么　$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)$，$\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4$互不相同，且记为$\varepsilon=\varepsilon^1,\varepsilon^2=\varepsilon_2,\varepsilon^3=\varepsilon_3,\varepsilon^4=\varepsilon_4$.

由假设可得

$$\begin{cases}\varepsilon_1^3f_1(1)+\varepsilon_1^2f_2(1)+\varepsilon_1f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon_2^3f_1(1)+\varepsilon_2^2f_2(1)+\varepsilon_2f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon_3^3f_1(1)+\varepsilon_3^2f_2(1)+\varepsilon_3f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon_4^3f_1(1)+\varepsilon_4^2f_2(1)+\varepsilon_4f_3(1)+f_4(1)=0,\end{cases}\qquad ①$$

由范德蒙行列式可知齐次方程组①的系数行列式不等于0.

$\therefore f_i(1)=0\quad (i=1,2,3,4)$.

8.(**西南交通大学**)　设$f(x),g(x)$是两多项式，且$f(x^3)+xg(x^3)$可被x^2+x+1整除，则$f(1)=g(1)=0$.

证　设x^2+x+1的两个复根为α,β. 则$\alpha^3=\beta^3=1$.

因为　$x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$，由于

$(x-\alpha)(x-\beta)\mid[f(x^3)+xg(x^3)]$.

$$\therefore\begin{cases}f(\alpha^3)+\alpha g(\alpha^3)=0,\\ f(\beta^3)+\beta g(\beta^3)=0.\end{cases}\qquad \therefore\begin{cases}f(1)+\alpha g(1)=0,\\ f(1)+\beta g(1)=0.\end{cases}$$

解得　$f(1)=g(1)=0$.

9.(**清华大学**)　$f(x)=x^3+6x^2+3px+8$，试确定p的值，使$f(x)$有重根，并求其根.

解　$f'(x)=3(x^2+4x+p)$.　求　$(f(x),f'(x))\neq 1$.

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 6 & 3p & 8 & 1 & 4 & p \\
1 & 4 & p & & & & \\
\hline
 & 2 & 2p & 8 & & & \\
 & 1 & p & 4 & & & \\
 & 1 & 4 & p & & & \\
\cline{2-4}
 & & p-4 & 4-p & & &
\end{array}
\qquad ①
$$

(1)当 $p=4$ 时,$(f(x),f'(x))=x^2+4x+4$.

则 $x+2$ 是 $f(x)$ 的三重因式,则可得 $\therefore f(x)=(x+2)^3$,

这时 $f(x)$ 的三个根为 $-2,-2,-2$.

(2)若 $p\neq 4$,那么表①还可以继续做下去

$$
\begin{array}{cc|ccc}
1 & -1 & 1 & 4 & p \\
 & & 1 & -1 & \\
\cline{3-5}
 & & & 5 & p \\
 & & & 5 & -5 \\
\cline{4-5}
 & & & & p+5
\end{array}
$$

当 $p=-5$ 时,这时 $(f(x),f'(x))=x-1$.

即 $x-1$ 是 $f(x)$ 的二重因式,用 $(x-1)^2$ 除 $f(x)$ 得商式 $x+8$.

$\therefore f(x)=x^3+bx^2-15x+8=(x-1)^2(x+8)$,

这时 $f(x)$ 的三个根为 $1,1,-8$.

10.**(武汉大学)** 问多项式

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

有无重根.

解 $f(x)=f'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$, ①

若 α 是 $f(x)$ 的重根,那么 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$.代入①得 $\alpha=0$,但 0 不是 $f(x)$ 的根,故 $f(x)$ 无重根.

11.**(澳大利亚数学竞赛题)** 设 x_1,x_2,x_3 为方程 $x^3-6x^2+ax+a=0$ 的三个根,使

$$(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=0 \qquad ②$$

的所有实数 a,并对每个这样的 a,求出相应的 x_1,x_2,x_3.

解 令 $y=x-2$ 代入原方程得

$$y^3+(a-12)y+(3a-16)=0. \quad ③$$

$\because x_1,x_2,x_3$ 为原方程的三个根,那么 $y_1=x_1-2,y_2=x_2-2,y_3=x_3-2$ 为③的三个根.所以

$$0=y_1+y_2+y_3=(y_1+1)+y_2+(y_3-1). \quad ④$$

在代数中有公式

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz. \quad ⑤$$

在⑤中　令 $x=y_1+1,y=y_2,z=y_3-1$,并注意④式,那么②式变为

$$0=(y_1+1)^3+y_2^3+(y_3-1)^3=3(y_1+1)y_2(y_3-1). \quad ⑥$$

$\therefore y_1=-1$ 或 $y_2=0$,或 $y_3=1$.

(1)当 $y_1=-1$ 时,$x_1=y_1+2=1$.由于 x_1 为原方程的根,将 $x_1=1$ 代入方程,

$\therefore 1-6+a+a=0$.解得　$a=\dfrac{5}{2}$.

$$x^3-6x^2+ax+a=(x-1)(x^2-5x-\frac{5}{2}), \quad ⑦$$

这时,由⑦得

$$x_1=1,x_2=\frac{1}{5}(5+\sqrt{35}),x_3=\frac{1}{5}(5-\sqrt{35}).$$

(2)当 $y_2=0$ 时,则 $x_2=y_2+2=2$,代入原方程,可解得 $a=\dfrac{16}{3}$.

$\therefore x^3-6x^2+ax+a=(x-2)(x-x_1)(x-x_3)$.

可得　$x_1=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{15},x_2=2,x_3=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

(3)当 $y_3=1$ 时,则 $x_3=y_3+2=3$.代入方程可求得 $a=\dfrac{27}{4}$.这时有

$$x_1=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2}),x_2=\frac{3}{2}(1-\sqrt{2}),x_3=3.$$

12.(**俄罗斯大学生数学竞赛题**)　设 $f(x)$ 是整系数多项式,若 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数,求证:$f(x)$ 无整数根.

证　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,其中 $a_i\in Z$　①

$\because f(0)=a_0$ 是奇数,　②

$f(1)=a_n+\cdots+a_1+a_0$ 是奇数.　③

由②知　$f(x)$ 无偶数根.因为设 $2d\in Z$　则

$f(2d)=a_n(2d)^n+\cdots+a_1(2d)+a_0$ 是奇数,$\therefore f(2d)\neq 0$.

再证 $f(x)$ 无奇数根.因为

$$f(2d+1)=a_n(2d+1)^n+\cdots+a_1(2d+1)+a_0 \quad ④$$

④-③得

[redacted]

$f(2d+1)-f(1)=a_n[(2d+1)^n-1]+\cdots+a_1[(2d+1)-1]$ ⑤

由⑤右端知 $f(2d+1)-f(1)=2s\in Z$.

$\therefore f(2d+1)=f(1)+2s$ 是奇数,即 $f(2d+1)\neq 0$.从而得证 $f(x)$ 无整数根.

13.(北京师范大学) 证明:一个非零复数 α 是某一有理系数非零多项式的根必要而且只要存在一个有理系数多项式 $f(x)$,使得 $\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$.

证 先证充分性.设 $f(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$,其中 b_i 是有理数($i=0,1,\cdots n$),且 $\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$,即 $\frac{1}{\alpha}=b_n\alpha^n+\cdots+b_1\alpha+b_0$,

$\therefore b_n\alpha^{n+1}+\cdots+b_1\alpha^2+b_0\alpha-1=0$.

令 $g(x)=b_nx^{n+1}\cdots+b_1x^2+b_0x-1$.则 $g(x)\in Q[x]$,且 $g(\alpha)=0$.

再证必要性.设 α 是某一有理系数非零多项式 $h(x)$ 的根.

(1)若 $h(x)=c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0$,其中 $c_0\neq 0,c_i\in Q(i=0,1\cdots,m)$

由于 $0=h(\alpha)=c_m\alpha^m+\cdots c_1\alpha+c_0$,那么

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{a_m}{c_0}\alpha^{m-1}-\cdots-\frac{c_2}{c_0}\alpha-\frac{c_1}{c_0}. \quad ①$$

令 $f(x)=-\frac{a_m}{c_0}x^{m-1}-\cdots-\frac{c_2}{c_0}x-\frac{c_1}{c_0}$,由①有 $\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$.

(2)若 $h(x)=c_mx^m+\cdots+c_sx^s$. ($c_s\neq 0,s\geqslant 1$),$c_i\in Q(i=s,s+1,\cdots,m)$、$0=c_m\alpha^m+\cdots+c_s\alpha^s$. ②

由于 $\alpha\neq 0$,由②有 $c_m\alpha^{m-s}+\cdots c_{s+1}\alpha+c_s=0$.从而化为上述情况有

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{c_m}{c_s}\alpha^{m-s-1}-\cdots-\frac{c_{s+2}}{c_s}\alpha-\frac{c_{s+1}}{c_s} \quad ③$$

令 $f(x)=-\frac{c_m}{c_s}x^{m-s-1}-\cdots-\frac{c_{s+2}}{c_s}x-\frac{c_{s+1}}{c_s}$.那么由③有 $\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$.

14.(华中师范大学)求证:实系数三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根的实部均为负数的充要条件是 $a>0,c>0,ab-c>0$.

证(1)先证必要性.设此方程的三个根为 x_1,x_2,x_3.分两种情况.

(ⅰ)当 x_1,x_2,x_3 是三个负实数时.那么

$a=-(x_1+x_2+x_3)>0.\quad c=-x_1x_2x_3>0.$

$$\begin{aligned}ab-c&=-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3\\&=-x_1(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_2b-x_3b+x_1x_2x_3\\&=-x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_2b-x_3b>0.\end{aligned}$$

其中 $b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>0$.

(ⅱ)当 $x_1<0,x_2=\alpha+\beta\mathrm{i},x_3=\alpha-\beta\mathrm{i}$,其中 $\alpha<0,\beta\neq 0$ 时,那么

$x_2+x_3=2\alpha<0, x_2x_3=\alpha^2+\beta^2>0.$

$\therefore a=-(x_1+x_2+x_3)=-(x_1+2\alpha)>0.$

$b=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=2\alpha x_1+\alpha^2+\beta^2>0.$

$c=-x_1x_2x_3=-x_1(\alpha^2+\beta^2)>0.$

$$\begin{aligned} ab-c &= -x_1(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha x_1^2-4\alpha^2x_1+x_1(\alpha^2+\beta^2) \\ &= -2\alpha(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha x_1^2-4\alpha^2x_1>0. \end{aligned}$$

(2)再证充分性.由于 $a>0,c>0,ab-c>0,\therefore b>\frac{c}{a}>0$,即此方程的系数全为正实数,从而此方程无正实根,且0也不是方程的根,设 x_1,x_2,x_3 为此方程的三个根.

(ⅰ)当 x_1,x_2,x_3 均为实数时,由上可知 $x_1<0,x_2<0,x_3<0.$

(ⅱ)当 $x_1<0,x_2=a_1+b_1i,x_2=a_1-b_1i\quad(b_1\neq0)$时.

先证 $a_1\neq0$.否则 $x_2=b_1i,x_3=-b_2i$ 那么

$a=-x_1,b=\beta^2,c=-x_1\beta^2,$

$\therefore ab-c=-x_1\beta^2+x_1\beta^2=0$.矛盾. $\quad\therefore a_1\neq0.$

再证 $a_1<0$.用反证法.若 $a_1>0$,那么

$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2a_1x_1+(a_1^2+b_1^2),$

$b-(a_1^2+b_1^2)=2a_1x_1<0,(\because 0<a=-x_1,\therefore x_1<0).$

$c=-x_1(a_1^2+b_1^2),\therefore a_1^2+b_1^2=-\frac{c}{x_1},$

$\therefore b+\frac{c}{x_1}<0,bx_1+c>0.$

$c>-bx_1=b(a+2a_1)=ab+2a_1b>ab,$

此即 $ab-c<0$,矛盾.$\therefore a_1<0.$

15.(**华中师范大学,1995年**) 设 $f(x_1,x_2,x_3,)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$,计算此3级行列式,并将它表成初等对称多项式的多项式.

解 $f=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$

指数组	对应 σ 的方幂乘积
3 0 0	σ_1^3
2 1 0	$\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	σ_3

[redacted]

其中 $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$,

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

$\therefore f = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$. ①

令 $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ 由①得 $2 = 8 + 2A$, $\therefore A = -3$.

$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$. ②

令 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$,由②得 $4 = 1 + 3 - B$. $\therefore B = 0$.

$\therefore f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

16.(湖北大学,2001 年) 设 α, β, γ 是方程 $x_3 + px + q = 0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} =$ __________.

答 0. 由上题知,

原行列式 $= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 0$.

因为其中 $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0, \sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$.

17.(湖北大学,2000 年) 判断(对填“Y”,错填“N”)

(1)$P = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$是一个数域.(　　)

(2)数域 P 上任何多项式的次数都大于或等于零.(　　)

(3)设 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ 是整系数多项式,$x = b$ 是 $f(x)$ 的整数根,则 $b \mid a_0$.(　　)

答 (1)Y. (2)N. $\because$零多项式没有次数. (3)Y.

18.(湖北大学,2000 年) 令 $f(x) = (x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + \cdots - x + 1)(x^{10} + x_9 + \cdots x + 1)$,求 $f(x)$ 的奇次项系数之和.

解 $\because f(-x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是偶函数, $\because f(x)$ 奇次项系数全为 0.

$\therefore$其奇次项系数之和等于 0.

19.(北京大学,1991 年) 设 $f(x) = 6x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx - 1$, $g(x) = x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}x^2 - 5bx - 4$,其中 a, b 是整数,试求出使 $f(x), g(x)$ 有公共有理根的全部 a, b,并求出相应的有理根.

解 令 $h(x) = 4g(x)$,则 $h(x) = 4x^4 - 8ax^3 + 3x^2 - 20bx - 16$. 由于 $h(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的根. 从而可求 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的公共有理根.

$f(x)$ 可能的有理根为: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$.

$h(x)$ 可能的有理根为: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

因此它们公共有理根的可能范围是 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

(1)若 $f(1)=0, h(1)=0$ 时,得 $\begin{cases} a+b=-8, \\ 8a+20b=-9. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{151}{12}, \\ b=\frac{55}{12}. \end{cases}$

由于 a,b 不是整数,所以 1 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共有理根.

(2)若 $f(-1)=0, h(-1)=0$. 得 $\begin{cases} a-b=-2, \\ 8a+20b=9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{31}{28}, \\ b=\frac{25}{28}. \end{cases}$

$\therefore -1$ 也不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共有理根.

(3)若 $f(-\frac{1}{2})=0, h(-\frac{1}{2})=0$,得 $\begin{cases} a-2b=4 \\ a+10b=15, \end{cases}$ 解得 $a=\frac{35}{6}, b=\frac{11}{12}$. $\therefore -\frac{1}{2}$ 也不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共有理根.

(4)若 $f(\frac{1}{2})=0, h(\frac{1}{2})=0$ 得 $\begin{cases} a+2b=1 \\ a+10b=-15 \end{cases}$ 解得 $a=5, b=-2$.

$\therefore$ 仅有 $\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共有理根,此时 $a=5, b=-2$.

20.(美国数学竞赛题) 设 k 是正整数,求一切实系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,满足等式

$$f[f(x)]=[f(x)]^k. \quad ①$$

解(1)若 $f(x)=0$. 显然满足①式.

(2)若 $f(x)\neq 0$. 设 $\partial(f(x))=n$. 则

$\partial[f(f(x))]=n^2, \quad \partial[f(x)]^k=nk.$

由①式知 $n^2=nk$. $\therefore n=0$ 或 $n=k$.

(ⅰ)当 $n=0$ 时,这时 $f(x)=a_0, a_0\neq 0$. 由①式有 $a_0=a_0^k$. ②

当 $k=1$ 时,$f(x)=a_0$,其中 a_0 可以为任意非零实数.

当 $k>1$ 时,若 k 为奇数 $a_0=\pm 1$,若 k 为偶数,$a_0=1$.

(ⅱ)当 $n=k$ 时,$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$

$f[f(x)]=a_k(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^k+a_{k-1}(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^{k-1}+\cdots+a_1(a_kx^k+\cdots a_1x+a_0)+a_0.$ ③

$[f(x)]^k=(a_kx^k+\cdots a_1x+a_0)^k.$ ④

比较③,④的首项系数得

$a_k^{k+1}=a_k^k, \quad \therefore a_k=1.$ ⑤