中学数学课实录

几何分册

徐　勋　陆亚松
夏明德　汪纯中　选编　评述
瞿葆奎　主编

人民教育出版社

中学数学课实录

几何分册

徐　勋　陆亚松
夏明德　汪纯中　选编 评述

瞿葆奎　主编

人民教育出版社

中学数学课实录

几 何 分 册

徐 勋 陆亚松
夏明德 汪纯中 选编 评述

瞿葆奎 主编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.5 字数 175,000
1984 年 3 月第 1 版 1985 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—31,000
书号 7012·0716 定价 0.91 元

序　　言

为了探索教学理论，在〈中学语文课《实录》(即《优秀语文教师上课实录》〉出版以后，我们华东师大教育系教育学教研室的几个教师，按原定计划，同研究中学数学教材教法的几位同志一起，到本市中学去向数学老师学习。

从一九八〇年十二月到一九八二年十一月，我们得到上海市三十所中学的领导和数学老师热情的帮助和支持，先后听了三十六位老师的六十四节数学课。这些老师的教学，都在勇于探索、敢于创新的道路上迈步。我们在听课时，都录了音，同时分别做了笔记，然后有选择地根据录音和笔记作了整理。在这部《中学数学课实录》里，限于篇幅，选编了其中三十五节课。

本书分代数、几何两册。代数分册，除传统的代数内容外，还收录了三角和微积分方面的有关内容，计十八个课题，十九节课；几何分册，则包括平面几何、立体几何以及解析几何的内容，计十四个课题，十六节课。课题的编排上，基本上按现行教学大纲。

本书选编的，就教材方面说，以全国现行的通行教材为主，兼及上海市编教材、实验教材和学校自编教材，并尽可能选择教材体系中在加强“双基”方面有一定深度的课题；就教学方法方面说，力求反映寓培养能力于学生掌握知识、技能之中的不同风格。这些老师正是在用教学这把钥匙，打开着学

生们智慧的门窗。教学，就是要教学生学，教会学生学。

“梅花香自苦寒来”！这些老师的课，都凝结了自己辛勤劳动的心血。但是，即使是那些得到好评的课，也不免有它的一些缺点，况且，教学有法，并无定法。因此，这些实录对其它老师来说，也只能是起借鉴、参考的作用。

人民教育出版社教育编辑室和中学数学教材编辑室的同志们对这部材料书的选编，给予了不少的指点和策励；华东师大教育科学学院中小学教材教法研究室以及华东师大数学系的余元希、郑启明和田万海同志，在繁忙的工作中为一些实录作了评述。谨此一并致谢。

我们的选编未必恰当；我们的评述未必中肯，诚恳地期待着数学老师们和教育科学工作者的指正。

选编者

1982年12月31日

几何分册目录

角边角公理

时间：1981年11月20日(星期五)，上午第二节课

任课老师：华东师大一附中　张炽昌

班级：初二(2)班

〔上课〕

师：同学们，我们前两天讲了三角形全等的判定公理，有几个？大家回忆一下。这些判定公理如何叙述？×××。〔指定学生〕

生(1)：我们前两天学了两个判定公理：一个是“边角边公理”，还有一个是“边边边公理”。

师：请你把它们叙述出来。

生(1)：〔较为紧张〕边角边公理是：有两个三角形，两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。

师：你讲的前后重复、不完整，再叙述一遍。

生(1)：〔不够流利〕有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。

师：好，这是“边角边公理”。那么“边边边公理”呢？

生(1)：有三边对应相等的两个三角形全等。

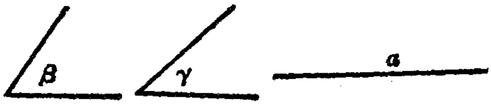
师：好。他开始时有些紧张，讲得不是最清楚。考虑问题应该仔细一些。

我们所学过的三角形全等的第一个判定公理，是两个三

角形中，两边和它们的夹角对应相等。不要忘了“对应”两个字。三角形全等的第二个判定公理呢，就是有三边对应相等的两个三角形什么啊，全等。这是我们前两节课讲的一个内容。前两节课我们还讲了：根据两边和它们的夹角，可以作出满足条件的三角形，对不对啊？讲了根据三边也可以作出满足条件的三角形，但是这三边中最长的一条边与其他两边有什么关系啊？

生(集体)：小于其它两边的和。

(以上3分钟)

师：好，今天我们请同学看这个图，考虑一个问题。〔出示小黑板；上有板图：

〕已知：一个$\angle\beta$，一个$\angle\gamma$，还有一条a边。〔板书：已知：$\angle\beta$，$\angle\gamma$，a〕现在要求作$\triangle ABC$，使得$BC=a$，$\angle B=\angle\beta$，$\angle C=\angle\gamma$，〔边讲边板书：求作$\triangle ABC$，使$BC=a$，$\angle B=\angle\beta$，$\angle C=\angle r$〕请同学想一想，我们应该先作什么啊？〔稍停〕线段$BC=a$是不是立即可以作出来呢？线段$BC=a$一作出来的话，同学看一看，三角形的哪两个顶点就可以定了啊？

生(集体)：B点和C点。

师：对，B点和C点。那么三角形一定还要有第三个顶点，是什么点啊？

生(集体)：A点。

师：根据我们以前讲的，a边所对的角应该是A角，那么A角的顶点就是三角形的什么啊？顶点A。因此我们第二步

怎么样作啊？作两个什么啊？大家想想看。

生(部分)：角，作两个角。

师：作两个角。这两个角作在 BC 边的同旁还是两旁啊？

生(部分)：两旁。

师：噢，一个角的边在 BC 上面，一个角的边在 BC 下面的话，如何交出这个 A 点来呀？

生(部分)：同旁。

师：再想一想看，到底是同旁还是两旁啊？

生(部分)：同旁。

师：对，所以我们要注意应当使 $\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$ 在 BC 的同旁。

〔评述：让学生懂得为什么在 BC 边上作两个角使构成一个三角形时，必须使这两个角都在 BC 边的同旁的道理。〕

师：试试看，哪个同学口头叙述一下它的作法？×××，〔指定学生〕第一先作什么？

生(2)：作 $BC=a$。

师：作线段 $BC=a$，第二步？

生(2)：在——

师：在什么？刚才大家对两旁、同旁已经争论过了。

生(2)：在 BC 的同旁，以 B 为顶点——

师：作什么啊？

生(2)：作 $\angle B$ 和 $\angle C$。

师：作 $\angle B$ 和 $\angle C$，分别等于什么啊？

生(2)：$\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$。

师：$\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$，我们应该如何正确叙述角的作法？

生（部分）：作 $\angle DBC$。

师：作 $\angle DBC$，等于什么啊？

生（2）：等于 $\angle\beta$。

师：再作什么啊？

生（2）：作 $\angle ECB$。

师：作 $\angle ECB$，等于什么啊？

生（2）：等于 $\angle\gamma$。

师：$\angle\gamma$，这是第二步，那么作了以后怎么样啊？

生（2）：相交于——

师：哪两条线相交啊？

生（2）：BD 和 CE 相交于 A 点。

师：对，BD 和 CE 相交于 A 点，然后再怎么样啊？

生（2）：连结。

师：要连结吗？已经交出 A 点来了。

生（2）：所以 $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形。

师：〔指（板图 1）〕他作法，讲得不大清楚。××，〔指定学生〕再从头给大家讲一遍。

生（3）：第一，作线段 BC，使 $BC=a$。

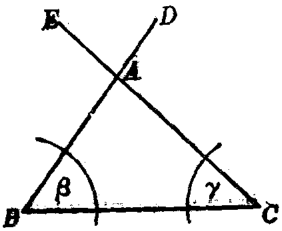


图 1

师：第二？

生（3）：第二，在 BC 的同旁，以 B 为圆心——

师：作一个角等于已知角，只要用一句话来表达。

生（3）：噢，作 $\angle DBC=\angle\beta$。

师：好了，然后呢？

生(3)：然后再作$\angle ECB=\angle\gamma$，BD和CE相交于A点，$\triangle ABC$就是所求作的三角形。

师：好。作图题的作法虽然我们现在不要求同学写，但是同学们要试试看，以后我们要写作法的时候就容易了。大家看，书上每一步都写了。〔学生看教科书〕

(以上5分钟)

〔评述：先培养学生有条理地一步一步叙述作法过程，再要求认真看书上的作法，并让他们自己学着书写。〕

师：好，假如我们请同学在硬纸板上作一个三角形，也是满足这一个条件$\angle\beta$、$\angle\gamma$及其夹边a的话，那么我们把它从硬纸板上剪下来的话，移到这个$\triangle ABC$上面去，我们可以观察到，这两个三角形能够完全重合吗？

生(集体)：能够的。

师：能够完全重合的三角形我们称为什么三角形啊？

生(集体)：全等三角形。

师：对！所以我们由此可以观察到这样一个结论：如果两角和它们的夹边对应相等的话，那么这两个三角形就怎么啊？

生(集体)：全等。

师：这一个就是我们今天要讲的"角边角公理"。〔板书：角边角公理(ASA)〕好，请同学们把书翻开来，翻到书上的80页。〔学生翻书〕请同学们读一遍，在80页末了两行，预备——

读。

生(集体)：〔齐声朗读〕“角边角公理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）”。

(以上2分钟)

师：今天我们讲的是第三个判定公理。这个判定公理呢，就是两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等。另外我们再回忆一下，在第一节课讲的时候，我们讲两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。两边必需要夹角，这是第一节课所强调的，对吗？今天我们讲第三个判定公理是两角夹边，是不是也必需要强调夹边？〔学生议论〕想一想看，到底是不是需要强调的？就是说假如不是两角夹边，而是两角及其一对边，能不能判定两个三角形全等？〔生(有的)答：不能。〕同学们想一想看，倒底能不能？

〔翻过小黑板，上有板书和板图：

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中

$\angle B=\angle B'$　$\angle C=\angle C'$　$AB=A'B'$

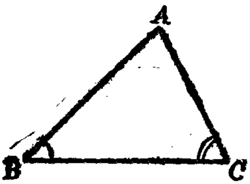


图 2

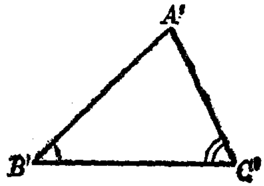


图 3

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$

(书上81页)〕

这两个三角形中，$\angle B$和$\angle B'$相等，$\angle C$和$\angle C'$相等，但

现在不是夹边，而是另一个角〔指$\angle C$〕的对边对应相等的话，我们能不能证明这两个三角形全等啊？仔细想一想看。

生(集体)：能。

师：能不能把两角一对边的问题，转化为刚才讲的角边角公理去解决？能不能啊？

生(集体)：能。

师：为什么能？根据是什么啊？〔学生议论〕好，你讲讲看。〔指定学生〕

生(4)：这是三角形的角角边公理。

师：现在我们还不知道这个命题是否一定成立，因此不能称公理；如果经证明是正确的则称为定理。能不能证明这两个三角形全等？〔生(有的)：能。〕能的话，为什么？

生(4)：根据三角形的内角和定理。

师：对了，根据三角形的内角和是180°。180°是一个等量吗？

生(部分)：是的。

师：是一个等量。好，然后怎么样呢？怎么样转化为刚才讲的两角夹边的问题呢？还用什么关系可以转化为两角夹边的问题呢？她〔指生(4)〕说能的，那么我们现在就来求证这两个三角形全等。××，〔指定学生〕你讲讲看。

生(5)：等量减等量其差相等。

师：另外的等量是什么啊？

生(5)：$\angle B$和$\angle C$。

师：是$\angle B$，$\angle C$的和。还有呢？

生(5)：$\angle B'$和$\angle C'$。

师：是$\angle B'$和$\angle C'$的和，那么等量减等量，差怎么啊？

生（部分）：相等。

师：好。这样同学就看出来了，可以证明$\angle A$等于什么啊？

生（部分）：等于$\angle A'$。

师：所以，两角一对边，对应相等的话，这两个三角形也可以判定它怎么样啊？

生（部分）：全等。

师：好，我们回忆一下什么叫定理？×××。〔指定学生〕

生(6)：用推理的方法证明是正确的命题叫定理。

师：对吗？那么我们看，这一个定理就是由哪一个判定公理推导出来的啊？

生（集体）：由角边角公理推导出来的。

师：这也就是我们今天要讲的什么啊？

生（部分）：角角边定理。

师：角角边定理，〔板书：角角边定理（"*AAS*"）〕简写成什么啊？

生（集体）："*AAS*"。

师：好，这就是书上81页写出的结论。刚才角角边定理证明的过程，由我启发同学一起进行思维，把它证出来的，是吗？书写步骤我们可以看书上81页。在证明过程中我们主要用到什么啊？三角形内角和等于180°，然后利用$\angle B$跟$\angle B'$是等量，$\angle C$跟$\angle C'$是什么啊，是等量，这两个角是分别对应相等的，是已知条件，然后利用等量减等量，差相等，再判定两个三角形全等。

为了使同学加深记忆，我们一起把这一个定理再读一遍，就是从"根据角边角公理可以推得"——预备——读。

生(集体)：〔齐声朗读〕"根据角边角公理可以推得角角边定理：有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等(可以简写成"角角边"或"AAS")。"

〔评述：把"角边角公理"与"角角边定理"的关系讲得清清楚楚。〕

师：我们现在已学了三个判定公理和一个判定定理。下面根据这些公理或定理来解决一些问题，请同学们看这样一个题目。

(以上7分钟)

我把图先画出来，然后把已知写出来，把求证写出来，最后请同学跟我一起考虑怎么样证明。

〔板书、板图：

已知：AC 和 BD 相交于 E，$BA \perp AC$ $DC \perp AC$ 且 $BA = DC$

求证：$BE = DE$〕

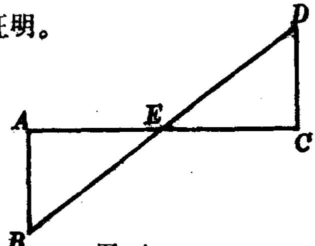


图 4

好，这题我们看一看噢，AC 和 BD 相交于 E，这个交点是 E；另外呢有什么关系，同学看一看，$BA \perp AC$，还有呢，$DC \perp AC$，而且还知道 $BA = DC$，要求证什么啊？BE 为什么等于 DE？〔在求证"$BE = DE$"的等号上画上：？号〕大家动脑筋先想一想噢。好，大家把这个题目看了图形再读一遍。预备——读。

生(集体)：〔齐声朗读〕“已知：AC 和 BD 相交于 E，$BA \perp AC$，$DC \perp AC$，且 $BA=DC$；求证：$BE=DE$”。

师：好，我们现在要求证这两条线段相等。我们说这两条线段是哪两个三角形上的边啊？根据已知条件，能不能判断这两个三角形全等啊？假如这两个三角形全等的话，那么我们说全等三角形的这两条对应边，就应当怎么样啊？

生(集体)：相等。

师：好，我们请×××讲讲看，〔指定学生〕你讲，我来写。

生(7)：证明：$\because AC$ 和 BD 相交于 E(已知)，$\therefore \angle AEB=\angle CED$(对顶角相等)。$\because BA \perp AC, DC \perp AC$(已知)，$\therefore \angle BAE=\angle DCE=90°$。在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CED$ 中，$\angle AEB=\angle CED$(已证)，$\angle BAE=\angle DCE$(已证)，$BA=DC$(已知)，$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CED (AAS)$。$\therefore BE=DE$，(全等三角形的对应边相等。)

师：〔边复述边板书：

证明：$\because AC$ 和 BD 相交于 E(已知)

$\therefore \angle AEB=\angle CED$(对顶角相等)

$\because BA \perp AC, DC \perp AC$(已知)

$\therefore \angle BAE=\angle DCE$

在$\triangle AEB$ 和$\triangle CED$ 中 $\begin{cases} \angle AEB=\angle CED & \text{(已证)} \\ \angle BAE=\angle DCE & \text{(已证)} \\ BA=DC & \text{(已知)} \end{cases}$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CED \quad (AAS)$

$\therefore \quad BE=DE$(全等三角形的对应边相等)〕

好。同学们看一看，她证明的过程和叙述的角与边的对应关系、字母都写得确切吗？对不对啊？

生(集体)：对的。

师：好，她已经掌握了我们今天学的知识，一个判定公理，一个判定定理。她选用了角角边定理，把这两条线段相等现在证明好了。那么同学再想一想，这个题目还有其它证法没有？〔学生议论：角边角。〕噢，同学们已轻轻地在讲角边角，对吗？噢，还可以用什么公理啊？

生(部分)：角边角公理。

师：那么用角边角公理的话，我们将如何叙述呢？这就又要培养同学口头叙述能力了。我黑板上就不写了，试试看好吗？

角边角公理，就是说利用两角一夹边对应相等关系去证，就是要想办法证明$\angle B$等于什么？

生(部分)：$\angle D$。

师：那么$\angle D$能不能等于$\angle B$呢？从已知条件出发，$BA \perp AC$，$DC \perp AC$，且AB和CD被BD所截，它们是内错角。假如BA和DC这两条线怎么样啊？

生(部分)：平行。

师：平行的话，那么内错角就可以怎么啊？

生(部分)：相等。

师：相等。好，×××，〔指定学生〕请你叙述一下看。

生(8)：证明。

师：证明，我黑板上就不写了。

生(8)：$\because BA \perp AC$，$DC \perp AC$，$\therefore BA \parallel DC$。两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线平行。$\therefore \angle ABE = \angle CDE$。