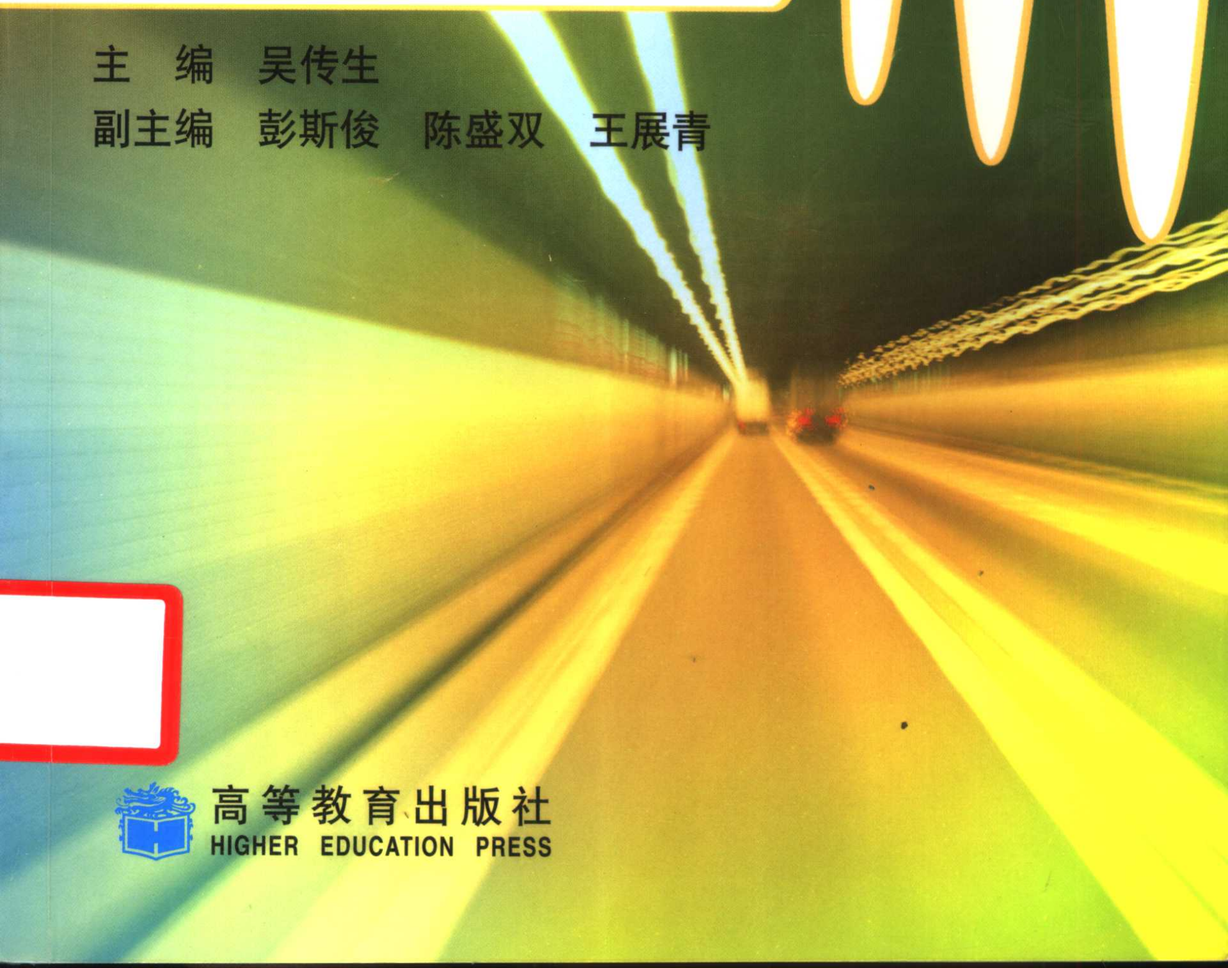
普通高等教育“十五”国家级规划教材

经济数学——概率论与数理统计

主　编　吴传生

副主编　彭斯俊　陈盛双　王展青



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

经济数学——
概率论与数理统计

主编　吴传生

副主编　彭斯俊　陈盛双　王展青

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——概率论与数理统计/吴传生主编 .—北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7-04-014377-1

Ⅰ.经... Ⅱ.吴... Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 049092 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 胡乃冏 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 郝 林
版式设计 王艳红 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	18.25	印　　次	2004 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	340 000	定　　价	19.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。在保持传统教材优点的基础上，本书注意将概率论和数理统计的知识和经济学及其他相关知识适当结合，注意适当渗透现代概率统计的概念、思想和方法，并对体系进行了适当的调整和优化。本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，突出概率论与数理统计的基本思想和应用背景，强调直观性与准确性，具有很强的可读性。本书的表述大多从具体问题入手，由浅入深，由易及难，循序渐进，脉络清晰。本书的主要内容及教学处理意见如下(读者在学习的过程中不断回过头来看一看下面的内容，相信对你会有所裨益)：

第一章介绍概率论的一些基本概念。把随机试验的概念拓展为可以是重复进行的，也可以是不可重复进行的，这样使后面讨论的问题的逻辑基础更牢固；对概率、条件概率的概念，尤其是对全概率公式和贝叶斯公式的引出采用了一种更自然、更简明、并且易于掌握和应用的方法。

第二章讨论一维随机变量及其分布。随机变量概念的引入是概率论的一个转折，它使概率论的研究由个别随机事件的研究扩大为由随机变量所表征的一类随机现象的研究。本章先介绍随机变量及其分布函数的概念，再分别讨论离散型随机变量的分布律和连续型随机变量的概率密度，对几种重要的离散型随机变量分布律和连续型随机变量的概率密度读者应该牢牢记住。本章最后讨论一维随机变量的函数的分布。第二章以及之后的第三章的讨论都尽可能做到简明扼要。

第三章将一维随机变量的概念加以扩充，讨论多维随机变量及其分布，重点讨论二维离散型随机变量和二维连续型随机变量的联合分布律和联合概率密度函数以及边缘分布律和边缘概率密度函数及其性质，对条件分布也作了简要的介绍；将随机事件的独立性概念加以扩充，讨论了随机变量的独立性；将一维随机变量的函数的分布的讨论推广到几种简单情形的多维随机变量的函数的分布。学习这一章时，很多计算都涉及二重积分和含参变量的积分，正确地确定积分变量的变化范围，确定积分的上下限是十分重要的。

第四章介绍随机变量的一些数字特征，以数学期望为核心展开讨论，介绍了数学期望、方差、协方差、相关系数的概念及其实际意义；为以后讨论的需要，介绍了矩及协方差矩阵的概念；作为随机变量及其数字特征的一个综合应用，介绍

了二维及 n 维正态分布。由于在理论和应用上的重要性,这一章叙述详尽,说理透彻,例题及习题丰富,便于学生掌握。

第五章讨论大数定律和中心极限定理,对它们产生的数学背景和应用背景作了较为详细的介绍。这一章是概率论的重要内容,也是数理统计的理论基础。读者应重点掌握将一些实际的概率计算问题转化成满足一定条件的一系列随机变量的和落在某一范围内的概率计算模型,再利用中心极限定理作近似计算。

第六章介绍数理统计的一些基本概念,起承前启后的作用。对样本、统计量及一些常见的统计量及作用作了简明的介绍;对统计学的三大分布:χ^2 分布,t 分布,F 分布作了较为系统的介绍,希望读者掌握它们的定义、记住概率密度函数图形的轮廓及能使用分位点表求出分位点;有关正态总体的样本均值和样本方差的分布的定理及其应用十分重要,应该牢固掌握。

第七章介绍参数估计,包括点估计和区间估计。对点估计应主要掌握矩估计法及极大似然估计法的思想、原理与方法以及评选估计量的标准;对区间估计应主要掌握置信区间的概念,求置信区间的方法,重点掌握正态总体的均值和方差的区间估计。

第八章介绍假设检验。先介绍基于小概率事件原理和概率反证法的假设检验的基本思想和方法,以此为基础,介绍正态总体和非正态总体参数的假设检验,再讨论假设检验的两类错误,最后介绍非参数的假设检验,这样脉络十分清晰。应重点掌握假设检验的基本思想和方法以及正态总体参数的假设检验。

第九章介绍线性回归分析与方差分析。回归分析是研究自变量为非随机变量、因变量为随机变量时两者之间的相关关系的统计分析方法。我们应该明了研究这种关系的近似转换的思想,重点掌握对一元线性回归模型所要讨论的几个问题的步骤、方法及作用;方差分析是用偏差平方和度量数据的变异的一种分析方法,本书主要讨论单因素和双因素方差分析,读者应很好地掌握单因素和双因素方差分析的基本思想和技巧,尤其是要掌握记录着单因素分析和双因素方差分析的全部结果的相应的方差分析表。

本书的习题按节配置,遵循循序渐进的原则,除了充分注意基本概念、基本方法和理论,还适当配置了一些富于启发性的应用性习题。除第五章外,每章后配置总习题,这些题目有许多选自历年研究生入学考试的考题,供学完一章后复习、总结、提高之用。

本书结构严谨,逻辑清晰,叙述清楚,说明到位,文字流畅,例题丰富,注重应用,习题量较大,便于自学。它可以用作高等学校经济类、管理类专业的学生教材。由于工科类和经济管理类专业对概率论和数理统计课程的基本要求大致相同,所以本书也可供工科学生作为教材或参考书。

本书由吴传生主编。参加编写的有吴传生、彭斯俊、陈盛双、王展青。全书

由吴传生负责统稿定稿。童恒庆、曾祥金二位教授审阅了全书。

本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材;高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助,尤其是徐刚、李艳馥、胡乃冏、董达英等同志在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血,为了保证本书的质量,董达英同志做了很多卓有成效的工作;武汉理工大学教务处、理学院、数学系、统计学系对本书的出版也给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间也比较仓促,教材中一定存在不妥之处,希望专家、同行、读者提出批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编者

2004.2

目　　录

第一章 随机事件的概率

自然现象和社会现象各种各样.有一类现象,称之为**确定性现象**,其特点是在一定的条件下必然发生.例如,一枚硬币向上抛后必然下落;在市场经济条件下,某商品供过于求,其价格必不会上涨,等等.另一类现象称之为**不确定现象**,其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,且在试验和观察之前,不能预知确切的结果.例如,向上抛掷一枚硬币,其落地后可能是正面朝上,也可能是反面朝上;下周的股市可能会上涨也可能会下跌;病人的病虽已是客观事实,但确诊之前,在医生看来病人究竟得的是什么病有多种可能.因此,这里的"不确定性"有两方面的含义,一是客观结果的不确定性,一是主观猜测或判断的不确定性.

从另一角度看,不确定现象又可分为两类:一类是所谓**个别现象**,它是指原则上不能在相同条件下重复试验或观察的不确定现象,如某人于某月某日出生;某一天是晴天还是雨天,等等.一类是所谓**随机现象**,它是指可以进行大量重复试验或观察、且其结果呈现出某种规律性的不确定现象.例如,在相同条件下,多次抛掷一枚均匀硬币,得到正面朝上的次数与抛掷的总次数之比随着次数的增多会越来越接近于0.5.下面的表1-1列出了历史上一些科学家在抛掷硬币试验中得到的相关数据:

表 1-1

试验者	n	n_H	$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

表1-1中 n 表示抛掷硬币的次数,n_H 表示出现正面的次数,$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$ 表示出现正面的次数占抛掷总次数的比例.

从表1-1中可以看到,随着试验次数的增加,$f_n(H)$的值将逐渐稳定于

0.5. 随机现象的这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有规律性称为**统计规律性**. 这种规律性的存在使得利用数学工具研究随机现象成为可能. 概率论和数理统计研究的主要问题就是随机现象的统计规律性.

本章介绍概率论的一些基本概念:事件、概率、条件概率及独立性等. 这些概念将贯穿全书,为进一步研究作准备.

第一节 随机事件

一、随机试验与样本空间

在研究自然现象和社会现象时,常常需要做各种试验. 在这里,把各种科学试验以及对某一事物的某一特征的观察都认为是一种试验. 下面是一些试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H,反面 T 出现的情况;

E_2:将一枚硬币连抛两次,观察正面 H,反面 T 出现的情况;

E_3:将一枚硬币连抛两次,观察正面 H 出现的次数;

E_4:在某一批产品中任选一件,检验其是否合格;

E_5:记录某大超市一天内进入的顾客人数;

E_6:在一大批电视机中任意抽取一台,测试其寿命;

E_7:观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

显然,以上的试验都具有如下的特点:

(1) 试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(2) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地,我们把具有上述两个特点的试验称为**随机试验**,或简称**试验**,用英文大写字母 E 表示.

再仔细分析一下,我们发现试验 $E_1,\cdots,E_6$ 还具有如下的特点:

(3) 可以在相同的条件下重复进行.

但是试验 E_7 却不具有特点(3),这是因为除非时间倒转,否则我们都不可能对它进行重复试验. 以后我们把不满足条件(3)的随机试验称为**不可重复的随机试验**,而把同时满足条件(1),(2),(3)的随机试验称为**可重复的随机试验**. 可重复的随机试验已经得到广泛深入的研究,有成熟的理论和方法. 但是,在现代经济管理和决策分析中,不可重复的随机试验的研究也引起了人们的关注. 不

过，本书中除了个别地方外，所讨论的大都是可重复的随机试验．因此，在不引起混淆的情况下，以后把可重复的随机试验也简称为随机试验或试验．

对于任一个随机试验 E，由于它必须满足条件(1)，因此，试验的所有可能结果组成的集合是已知的．我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω．Ω 中的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**．样本点一般用 ω 表示，于是可记 $\Omega=\{\omega\}$．

前面提到的试验 $E_1,\cdots,E_7$ 所对应的样本空间 $\Omega_1,\cdots,\Omega_7$ 为：

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2\}$；

$\Omega_4=\{$合格，不合格$\}$；

$\Omega_5=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$；

$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_7=\{$雨天，非雨天$\}$．

应该注意的是，试验 E_2 和 E_3 的过程都是将一枚硬币连抛两次，但由于试验的目的不一样，所以样本空间 Ω_2 和 Ω_3 截然不同，这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间．

二、随机事件

进行随机试验时，人们常关心的往往是满足某种条件的样本点所组成的集合．例如，若规定电视机的寿命超过 10000 小时时为合格品，则在试验 E_6 中我们关心的是电视机的寿命是否大于 10000 小时，满足这一条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t\mid t>10000\}$．我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件．

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**．（严格来说，事件应该是 Ω 中满足一定条件的子集合组成的集合类中的元素，对它的讨论已超出了我们的知识范围，有兴趣的话，可参考其他教材）．事件是概率论中最基本的概念，今后用英文大写字母 $A,B,\cdots$ 表示事件．设 A 是一个事件，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega\in A$ 时，称**事件 A 在该次试验中发生**．例如，在 E_6 中，若测试出电视机的寿命 $t=11000$ 小时，则事件“电视机为合格品”$=A=\{t\mid t>10000\}$ 在该次试验中发生；同样，若测试出电视机的寿命 $t=6000$ 小时，则在该次试验中事件 A 没有发生．

显然，要判定一个事件是否在一次试验中发生，只有当该次试验有了结果以后才能知道．

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.例如,试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$,试验 E_3 有三个基本事件 $\{0\},\{1\},\{2\}$.

样本空间 Ω 有两个特殊子集,一个是 Ω 本身,由于它包含了试验的所有可能的结果,所以在每次试验中它总是发生,称为**必然事件**;另一个子集是空集 $\varnothing$,它不包含任何样本点,因此在每次试验中都不发生,称之为**不可能事件**.

三、事件间的关系与运算

在一个样本空间中,可以有许多随机事件,我们希望通过对简单事件的了解掌握较复杂的事件.为此,需要研究事件间的关系与运算.

事件是一个集合,因此事件间的关系和运算应该按照集合之间的关系和运算来规定.

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 $A,B,C,A_k(k=1,2,3,\cdots)$ 是 Ω 的子集.注意到在某次试验中事件 A 发生 $\Leftrightarrow$ 该次试验的结果 $\omega\in A$(这里符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"),由此出发,可以讨论事件间的关系与运算.

(1) 若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 是事件 B 的**子事件**,其含义是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.图 1－1 给出了这种包含关系的一个几何表示.

例如,在 E_6 中,记

$$A=\{\text{电视机寿命不超过 8000 小时}\},$$
$$B=\{\text{电视机的寿命不超过 10000 小时}\},$$

则 $A\subset B$.

(2) 事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**.显然事件 $A\cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生或者事件 B 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与 B 至少有一个发生.图 1－2 给出了这种运算的一个几何表示.

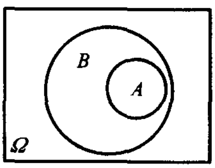


图 1－1

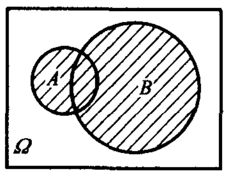


图 1－2

例如,在 E_2 中,记

$$A=\{\text{两次都出现正面}\}=\{HH\},$$
$$B=\{\text{两次出现反面}\}=\{TT\},$$

则 $A\cup B=\{$两次出现同一面$\}=\{HH,TT\}$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

(3) 事件 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**积事件**.显然,事件 $A\cap B$ 发生$\Leftrightarrow$事件 A 与事件 B 同时发生.积事件 $A\cap B$ 可简记为 AB.图1-3给出了这种运算的一个几何表示.

例如,某输油管长 100 km,事件 $A=\{$前 50 km 油管正常工作$\}$,事件 $B=\{$后 50 km 油管正常工作$\}$,那么 $A\cap B=\{$整个输油管正常工作$\}$.

一般地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的**差事件**.它表示的是“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一新的事件,因此事件 $A-B$ 发生$\Leftrightarrow$事件 A 发生而事件 B 不发生.图 1-4 给出了这种运算的一个几何表示.

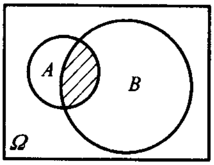


图 1-3

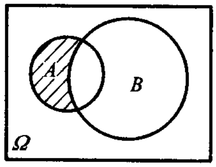


图 1-4

例如,在 E_2 中,若记 $A=\{HH,TT\}$,$B=\{HH,HT\}$,则 $A-B=\{TT\}$.

(5) 若 $A\cap B=\varnothing$,则事件 A 与事件 B 是**互不相容**的,或**互斥**的.显然 $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow$事件 A 和事件 B 不能同时发生.图 1-5 给出了这种关系的一个几何表示.

例如,对任一个随机试验 E,它的基本事件都是两两互不相容的.

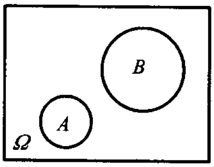


图 1-5

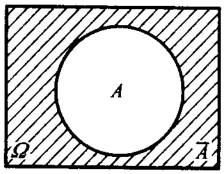


图 1-6

(6) 事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**,记作 $\bar{A}$,即 $\bar{A}=\Omega-A$.事件 $\bar{A}$ 发生$\Leftrightarrow$事件 A 不发生.由于 $A\cap\bar{A}=\varnothing$,$A\cup\bar{A}=\Omega$,因此在每次试验

中，事件 A，$\bar{A}$ 中必有一个且仅有一个发生．又 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件，所以称事件 A 与 $\bar{A}$ 互逆．图 1－6 给出了这种关系的一个几何表示．

例如，若事件 A 表示"某公司今年年底结算将不亏损"，则事件 $\bar{A}$ 表示"某公司今年年底结算将亏损"．

按差事件和对立事件的定义，显然有 $A-B=A\bar{B}$．

与集合论中集合的运算一样，事件之间的运算满足下述运算规律：

(i) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(ii)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(iii) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(iv) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$．

这些运算规律可以推广到任意多个事件上去．

例 1 设 A，B，C 是随机事件，则事件

"A 与 B 发生，C 不发生"可以表示成 $AB\bar{C}$；

"A，B，C 至少有两个发生"可以表示成 $AB\cup AC\cup BC$；

"A，B，C 恰好发生两个"可以表示成 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$；

"A，B，C 中有不多于一个事件发生"可以表示成 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$．

例 2 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1，2，3 组成(图 1－7)，每个水源都足以供应城市的用水，设事件

$$A_i=\{第\ i\ 号管道正常工作\}(i=1,2,3),$$

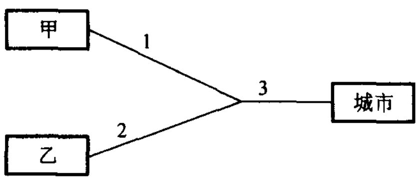


图 1－7

于是，"城市能正常供水"这一事件可表示为$(A_1\cup A_2)\cap A_3$，"城市断水"这一事件可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A_3}=(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\cup\overline{A_3}.$$