硕士研究生入学考试解题指南

量子力学

LIANGZI LIXUE

安徽教育出版社

硕士研究生入学考试解题指南

量　子　力　学

马　涛　　倪致祥
编
张德明　　谈欣柏

安徽教育出版社

硕士研究生入学考试解题指南
量　子　力　学
安　徽　教　育　出　版　社　出　版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行　　　　萧县印刷厂印刷
＊
开本：787×1092　1/32　印张：10.125　字数：140,000
1986年2月第1版　　1986年2月第1次印刷
印数：1——3000
统一书号：7276·359　　定价：1.70元

出版说明

我社自1980年开始每年出版当年“硕士研究生入学试题汇解”以来，深受广大读者欢迎。我们总结多年来出版这类书籍的经验，并根据广大读者的意见，认为它虽能为广大读者提供当前应考参考资料，但随着时间的推移，往往使人感到有它的局限性。为了有助于考生进一步掌握有关考试学科的重要内容，尤其是尽快增强解题能力和考试中的应变能力，我们特约请中国科学技术大学、南京大学、南京工学院、安徽大学、合肥工业大学等院校的具有辅导硕士研究生入学考试经验的教师，编写了这套《硕士研究生入学考试解题指南》供读者学习参考。

这套丛书有《高等数学》、《工程数学》、《普通物理学》、《热力学·统计物理学》、《电动力学》、《量子力学》、《物理化学》、《无机化学》、《高分子物理和化学》和《英语》，共计十种。

鉴于本丛书不是一般的复习资料，因此不拘泥于各学科的自然体系分章分节，对各学科应掌握的主要知识不是条文式的罗列，而是通过问题的提出或解题过程让读者体会和掌握应该具备的基本知识；本丛书又不是单纯的试题汇解，因此，它并非就题解题，而是帮助读者正确审题、总结解决同类问题的基本规律。特别是对那些灵活多变、技巧性强的问题，着重向读者提供解决问题时可供选择的不同思路，给出最

优解法，使读者能通过比较，受到启迪。对那些容易引起混淆和易犯错误的问题，通过解题过程向读者指明，以达到正确解题的目的。

本丛书的编写打破了学科自然体系和命题学校的界限，而以问题的性质和类型分类。例题选择既突出重点，又尽可能地覆盖本学科的主要内容。所选例题以历届研究生入学试题（包括1985年试题）为主要素材，从中找出各年和各校入学试题的共性和个性。对提出的问题，按难易程度和技巧性强弱，分别给出提示、略解或详解，并给出必要的分析。

前　　言

本书试图通过解题过程，帮助读者灵活、综合地运用量子力学的基本概念、原理和方法，以提高解题能力，掌握解题技巧。因此本书没有拘泥于通常《量子力学》教科书的体系，而是将它的基本内容融会于例题分析之中。各章基本独立，同时尽可能照顾理论体系的连贯性和完整性。

本书选编了260道例题，所选例题绝大部分是国内外历届研究生入学试题，力求结合现行《量子力学》教材的教学内容，并略有深化和推广。大多数例题分别给出了详解、略解或多种解法，少量例题仅给出答案和提示，以供读者进一步练习之用。书末附录四份自测试卷，供报考不同专业的读者选用。

编者深感水平有限，书中存在的错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　基本概念和方法

本章主要包括量子力学的基本概念、原理和方法及其应用。这部分内容在国内外历届研究生入学试卷中占有较大的比重（约占1/4），它主要考查学生是否真正理解和掌握量子力学的基本概念和方法，基础训练是否扎实。

我们希望通过一些典型例题的分析，使读者在正确运用量子力学的基本概念思考问题和理解问题，掌握处理问题的方法，加强基本训练等方面得到一定的启示和帮助。

理论要点

1．物理体系在任意时刻t的状态，由希尔伯特空间ε中的态矢量$|\psi(t)>$描述。$|\psi(t)>$随时间的变化满足

$$ih^{①}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=\hat{H}|\varphi(t)> \qquad (1—1)$$

2．物理体系的每一个可观测量A都对应着态空间ε中的一线性厄密算符$\hat{A}$，它只能取其本征值。在态$|\psi(t)>$下测得A的某一本征值a_n的几率是

$$W_n(a_n)=\sum_{i=1}^{f_n}|<\psi_n^i|\varphi>|^2 \qquad (1—2)$$

平均值是

$$\langle A\rangle=\frac{\sum\limits_n W_n\cdot a_n}{\sum\limits_n W_n} \qquad (1—3)$$

---

① h代表$\hbar$，全书同，不再另注。

其中 $\hat{A}\varphi_n^i = a_n\varphi_n^i \qquad i=1, 2, \cdots f_n$

3. 设体系处于态$|\psi>$,在对体系进行一次可观测量A的理想测量得结果a_n之后，该体系的状态变为

$$|\psi'> = \frac{p_n|\psi>}{(<\psi|p_n|\psi>)^{1/2}} \tag{1—4}$$

其中

$$p_n = \sum_{i=1}^{f_n} |\varphi_n^i><\varphi_n^i| \tag{1—5}$$

为本征值a_n所属f_n维子空间的投影算符。

4. 基本对易关系：设x_i及p_i分别为粒子的坐标和动量的分量，那么它们满足正则对易关系

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [p_i, p_j] = 0$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1—6}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

5. 对于全同粒子的体系，交换任意两个粒子不改变体系的状态。

试题分类解析

一、概念性题目

这类题目往往是针对学生在学习量子力学过程中，较难理解和掌握或易于和经典物理概念混淆的某些重要概念命题的。对于概念清楚并能自觉地用之思考问题和理解问题的考生，此类题目不难解答，但部分考生常常会觉得似是而非，甚至无从下手。

1-1 设ψ_1，ψ_2为体系的两个可能实现的状态，现作如下三种线性叠加：

(1) $\psi_A=\psi_1+e^{i\delta}\psi_2$，　　(2) $\psi_B=e^{i\delta}(\psi_1+\psi_2)$，

(3) $\psi_c=\psi_1+\psi_2$。

δ为实的常数。试问ψ_A、ψ_B、ψ_C是否表示相同的态？（补充题）

分析　首先必须明确“绝对相位”和“相对相位”的概念。我们定义，几率幅间模为1的公因子的相角为“绝对相位”，否则便是“相对相位”。例如

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2=|c_1|e^{i\theta_1}\psi_1+|c_2|e^{i\theta_2}\psi_2$$
$$=e^{i\theta_1}[|c_1|\psi_1+|c_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)}\psi_2]$$

式中$e^{i\theta_1}$是模为1的公因子，θ_1是绝对相位，而$\theta_2-\theta_1$是相对相位。若令$|\psi>=e^{i\theta_1}|\psi'>$、$\{|n>, n=1, 2, 3\cdots\}$为任意力学量$A$的本征矢，则$|<n|\psi>|^2=|<n|\psi'>|^2$，即任意力学量$A$在$\psi>$和$\psi'>$态下的几率分布相同。由此可知相因子$e^{i\theta_1}$无任何实际的物理效应。

令　$|\psi'>=|c_1||\psi_1>+|c_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)}|\psi_2>$，则

$$|<n|\psi'>|^2=|c_1|^2|<n|\psi_1>|^2+|c_2|^2|<n|\psi_2>|^2$$
$$+|c_1||c_2|[<\psi_2|n><n|\psi_1>e^{-i(\theta_2-\theta_1)}$$
$$+<\psi_1|n><n|\psi_2>e^{i(\theta_2-\theta_1)}]$$

即任意力学量A在态$|\psi'>$下的几率分布跟相对相位$(\theta_2-\theta_1)$有关。由此可知相对相位$(\theta_2-\theta_1)$是支配量子干涉效应的基本因素。

解　由以上分析，容易看出ψ_B中δ是绝对相位，ψ_B与ψ_C描述体系同一个态，ψ_A中的δ是相对相位，ψ_A与ψ_B（或ψ_C）描述的不是同一个态。

1-2　若粒子所处的定态波函数$\psi(x)$为已知，试写出计算下列几率的公式：

(1) 粒子的z分量坐标值出现在$z_1\to z_2$范围内的几率；

（2）粒子的动量分量p_y出现在$p_1 \to p_2$范围内的几率；

（3）粒子的z坐标值在$z_1 \to z_2$范围内，同时动量p_y值在$p_1 \to p_2$范围内的几率。（1980年，复旦大学）

解 （1）粒子z分量坐标值出现在$z_1 \to z_2$范围内的几率为

$$W(z_1 \to z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{z_1}^{z_2} dz |\psi(\mathbf{x})|^2$$

（2）粒子的动量分量p_y出现在$p_1 \to p_2$范围内的几率为

$$W(p_1 \to p_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{p_1}^{p_2} dp_y c^*(\mathbf{p}) c(\mathbf{p})$$

$$= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{p_1}^{p_2} dp_y \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(\mathbf{x}) e^{-ip_y y/h} \right|^2$$

（3）由（1）、（2）容易得到粒子的坐标值z在$z_1 \to z_2$范围内，同时动量p_y值在$p_1 \to p_2$范围的几率为

$$W(z_1 \to z_2,\ p_1 \to p_2)$$

$$= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{p_1}^{p_2} dp_y \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(\mathbf{x}) e^{-ip_y y/h} \right|^2$$

1-3　设 $\hat{p}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}$，$\hat{p}_r^+ = ?$　$[r, \hat{p}_r] = ?$　$\hat{p}_r$可以作为量子力学的径向动量算符吗？（1982年，北京大学）

分析　由理论要点2，量子体系的力学量由线性厄密算符表示，由经典的力学量构造量子力学的力学量算符必须满足厄密性要求①。

解　$\hat{p}_r^+ = \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}\right)^+ = \hat{\mathbf{p}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)^+ = \hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \neq \hat{p}_r$

---

① 由经典力学量构造量子力学的力学量，若仅满足厄密性要求，则其形式并不唯一，正确与否要由实验来验证。

$$[r, \hat{p}_r]=[r, \frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}] = \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot[\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}]=i\hbar$$

由上述分析可知$\hat{p}_r=\frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}$不能作为量子力学中的 径向动量算符。量子力学中的径向动量算符的正确形式为

$$\hat{p}_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}+\hat{\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{1}$$

读者不难将(1)式改写为另一种明显的形式

$$\hat{p}_r=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) \tag{2}$$

1-4 算符 $\hat{K}=\frac{1}{2m}(|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}+\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|)$在态$|\psi\rangle$下的平均值是什么？怎样理解$\hat{K}$的意义？其中$\hat{\mathbf{p}}$是动量算符，$|\mathbf{r}\rangle$是坐标算符的本征矢。（1982年，同济大学）

分析 解决此题的关键是从力学量在任意态下的平均值入手并注意力学量算符的厄密性。

解

$$\langle\psi|\hat{K}|\psi\rangle=\frac{1}{2m}(\langle\psi|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle)$$

上式插入 $\int d\mathbf{r}'\,|\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|=1$ 得到

$$\langle\psi|\hat{K}|\psi\rangle=\frac{1}{2m}\int(\langle\psi|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|\psi\rangle + \langle\psi|\mathbf{r}'\rangle\langle\mathbf{r}'|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle)d\mathbf{r}'$$

利用

$$\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}'\rangle=-i\hbar\nabla_r\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

所以

$$\langle\psi|\hat{K}|\psi\rangle=\frac{-i\hbar}{2m}[\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})-\psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})]\equiv\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

即 $\langle\psi|\hat{\mathbf{K}}|\psi\rangle=\mathbf{j}(\mathbf{r})$为几率流密度矢量。而$\langle\psi|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle$

$=|\psi(\mathbf{r})|^2=\rho(\mathbf{r})$为几率密度。由于算符 $\hat{\mathbf{U}}=\dfrac{\mathbf{p}}{m}$和$(\mathbf{r}><\mathbf{r})$不对易，因此$\hat{K}$算符是由几率密度和粒子的速度构成的符合厄密性要求的几率流密度算符。

1-5 $\hat{A}$、$\hat{B}$的本征值分别为a_n、b_n，在任一态中，先测量力学量A得a_n，再测力学量B得b_n的几率为$P(a_n, b_n)$；而先测力学量B得b_n，再测力学量A得a_n的几率为$P(b_n, a_n)$。问$P(a_n, b_n)=P(b_n, a_n)$的条件如何？试证之。（1982年，同济大学）

解 我们假定$\hat{A}$、$\hat{B}$本征值皆不简并，由公式（1—2）和（1—4）得，在态$|\psi>$中对A的一次理想测量结果为a_n的几率为

$$P(a_n)=|<a_n|\psi>|^2$$

测量后体系的状态由$|\psi>$变为

$$|\psi'>=|a_n>$$

紧接着在态$|a_n>$下测量力学量B得b_n的几率为

$$|<b_n|a_n>|^2$$

所以按顺序$A\to B$测量得结果a_n、b_n的几率为

$$P(a_n、b_n)=|<a_n|\psi>|^2\cdot|<b_n|a_n>|^2 \qquad (1)$$

同理，在相反的顺序下测得结果b_n、a_n的几率为

$$P(b_n、a_n)=|<b_n|\psi>|^2\cdot|<a_n|b_n>|^2 \qquad (2)$$

若 $P(a_n, b_n)=P(b_n, a_n)$，而$|<a_n|b_n>|^2\neq 0$，比较上两式有

$$|<a_n|\psi>|^2=|<b_n|\psi>|^2$$

对任意的态$|\psi>$都成立，则$|a_n>$与$|b_n>$最多差一常数相因子，即$\hat{A}$、$\hat{B}$对易为$P(a_n, b_n)=P(b_n, a_n)$的条件。

1-6 为什么说如果取轨道角动量$L=lh$，则空间量子化

与测不准关系矛盾？而当取 $L=\sqrt{l(l+1)}h$，则空间量子化不违背测不准关系？对于后者给予定量说明，讨论测不准关系式中何时等号成立，何时等号不成立。（1982年，江苏师范学院）

解 由测不准关系，得

$$\triangle L_x \triangle L_y \geqslant \frac{h}{2}|<L_z>|$$

取 L^2、L_z 的共同本征态，在此态下，平均值

$$<L_x>=<L_y>=0、<L_x^2>=<L_y^2>、<L_z^2>=m^2h^2$$

所以

$$\triangle L_x \triangle L_y=<L_x^2> =\frac{1}{2}<L^2-L_z^2>$$

即 $<L^2>-<L_z^2>\geqslant h^2|m|$

若取 $L=lh$，则上式变为

$$l^2h^2-m^2h^2\geqslant h^2|m|$$

当 $|m|=l$ 时，与测不准关系矛盾。如果取 $L=\sqrt{l(l+1)}h$，便有

$$l(l+1)h^2-m^2h^2\geqslant |m|h$$

对 m 的任何可能取值都成立。虽然，当 $m=\pm l$ 时，式中等号成立；$m\neq\pm l$ 时，等号不成立。

1-7 请判断下列算符：

$$\mathbf{r}、\hat{\mathbf{p}}、\hat{\mathbf{L}}=\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{p}}、\hat{\mathbf{L}}^2、\hat{\mathbf{L}}_z$$

$$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\in x^3$$

哪些是奇宇称算符？哪些是偶宇称算符？哪些既不是奇宇称算符，又不是偶宇称算符？ （补充题）

答 $\mathbf{r}$、$\hat{\mathbf{p}}$ 是奇宇称算符，$\hat{\mathbf{L}}$、$\hat{\mathbf{L}}^2$、$\hat{L}_z$ 是偶宇称算符，

$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\in x^3$ 既不是偶宇称算符，也不是奇宇称算符。

1-8　试用动量算符$\hat{\mathbf{p}}$表示有限大空间平移算符$\hat{U}_D(a)$，空间平移算符的定义是$\hat{U}_D(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r})=\psi(\mathbf{r}-\mathbf{a})$，并证明$\hat{U}_D(\mathbf{a})$是幺正算符。　（补充题）

答案　$\hat{U}_D(\mathbf{a})=e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}/\hbar}$

1-9　试用角动量算符$\hat{\mathbf{L}}$表示有限大空间转动算符$\hat{U}_R(\theta\mathbf{n})$，空间转动算符的定义是$\hat{U}_R(\theta\mathbf{n})\psi(\mathbf{r})=\psi(R^{-1}\mathbf{r})$,并证明$\hat{U}_R(\theta\mathbf{n})$是幺正算符。　（补充题）

答案　$\hat{U}_R(\theta\mathbf{n})=e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}/\hbar}$

1-10　若一物理体系的哈密顿量在空间平移下不变，则此体系的动量$\hat{\mathbf{p}}$是个守恒量；若其哈密顿量在空间转动下不变，则其角动量$\hat{\mathbf{L}}$是个守恒量。　（补充题）

解　（略）

1-11　设幺正算符$\hat{U}$可以写成$\hat{U}=1+i\varepsilon\hat{F}$的形式，$\varepsilon$是个无穷小量，试证$\hat{F}$一定是厄密算符。（1982年，华东师范大学）

解　（略）

1-12　设ψ_1和ψ_2是某一系统的两个波函数，C_1和C_2是常数。现在构成以下的波函数：

$$\psi_a=C_1\psi_1+C_2\psi_2^2;$$
$$\psi_b=C_1^2\psi_1+C_2\psi_2;$$
$$\psi_c=e^{C_1\psi_1+C_2\psi_2}$$

以上这些函数是不是该系统的波函数？为什么？

（1985年，湖南大学）

提示　系统的波函数应满足叠加原理和方程（1—1）。

1-13　设ψ_A为力学量A的本征态，B为另一力学量。

(1) $[\hat{A}, \hat{B}]=0$ 时，在ψ_A态测B有无确定值？为什么？

(2) $[\hat{A}, \hat{B}]\neq 0$ 时，在ψ_A态测B有无确定值？为什么？

（1982年，东北师范大学）

提示 (1) 注意简并情况，(2) 利用测不准关系考虑 $\langle\psi_A|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi_A\rangle=0$ 的特例。

1-14 设$\hat{A}$、$\hat{B}$是两个不对易的可观测量。那么，一般来说，测量结果的几率将依赖测量实行的先后次序。对这一论断，请给予量子力学的严格表述。（补充题）

解 （略）

1-15 现已知$[r, p_r]=i\hbar$，$p_r^2=-\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$，求$p_r$。其中$r$是粒子到原点的距离，$p_r$为一算符。

（1982年，北京师范大学）

答案 $p_r=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$

1-16 证明投影算符$p_\phi=|\psi\rangle\langle\psi|$是一个可观测量，$|\psi\rangle$是任意的归一化态矢量。（1982年，北京工业大学）

解 （略）

1-17 电子在均匀电场$\mathbf{E}=(0,0,\varepsilon)$中运动，$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}-e\varepsilon z$。试判断下列各量中哪些是守恒量：$\hat{P}_x$、$\hat{P}_y$、$\hat{P}_z$、$\hat{\mathbf{P}}^2$、$\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$、$\hat{\mathbf{S}}^2$、$\hat{S}_z$。（1982年，南开大学）

提示 考虑体系的哈密顿量和各力学量的对易关系。

1-1～1-17题是关于量子力学中较难理解或容易弄错的基本概念性问题，我们选解了6例，其余的例题请读者自己思考。