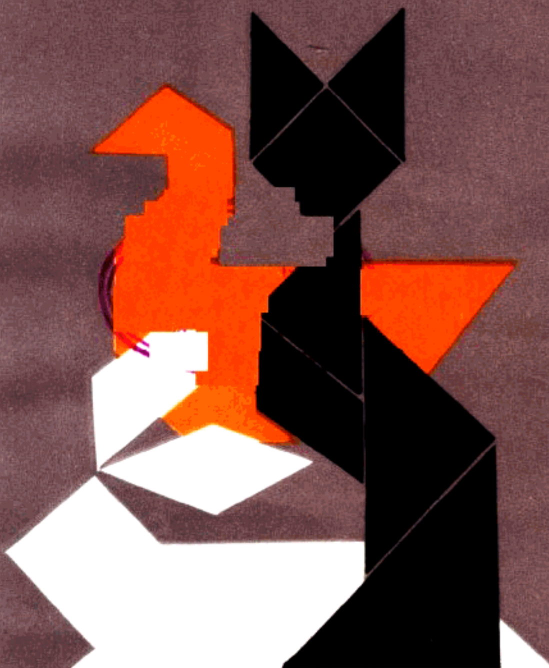
七巧板游戏



QI QIAO BAN YOU XI

浙江人民出版社

目　录

七巧板游戏简介

七巧板游戏的特点和规则

七巧板是一种拼图游戏，它是用七块板，以各种不同的拼凑法来拼搭成千变万化的形象图案。

一块正方形的板按下图那样分割成七块，就成了七巧板。右图用这七块板可以拼搭成几何图形，如三角形、平行四边形、不规则的多角形等；也可以拼成各种具体的人物形象，如正在跑步的人、跳舞的人、钓鱼的人、坐着的人等；或者是动物，如猫、狗、猪、马等；或者是桥、房子、宝塔等。

七巧板，顾名思义，就是在拼凑时非要有点巧思不可，有时候还有点碰巧，你正在想拼这个图形时却又拼出了另一个图形。

拼七巧板的规则是：拼一个图形必须将七块板都用上，而且在拼凑时，七块板都必须平面放置，不能将板竖起来，

也不能将一块板迭在另一块板上。

七巧板的用途，作为一种游戏，可以一个人玩，也可以二、三个人一起玩。此外，设计师用它作设计商标的鸽形，教师可以用它来作形体认识的训练，甚至心理学家可以用它来搞心理测验。

用七巧板拼出来的图形，在中国古代介绍七巧板的书中都有名称，如“篮子”、“百合花”、“桥”等等。在欧洲的书里，这些图形没有名字。在本书中对图形也不标名字，但是读者可以自己给这些图形命名，这样就通过游戏来丰富自己的想象能力。

七巧板游戏的历史

七巧板是谁发明？在什么时候发明，已经无从查考了。

十九世纪，中国出版了一本《七巧图谱》，该书的序言中说：“七巧”这个词最早出现在周朝（公元前740—330年），当时有这样一种风俗，在七月初七夜，姑娘们用线穿针，看谁先穿过去，这个风俗就叫做“乞巧”，也称“七巧”，因此“七巧”一词最初是用来预测运气。

现在能看到的最早介绍七巧图形的书是《七巧图合璧》，此书著于清朝嘉庆年间（公元1796—1820年），该书的七巧图谱分两部分，第一部分是图谜，第二部分是解法。图谜通常有题名，即使是最抽象的图形，如正方形，也有特别的名称。书中选用的图形是人物、动物、植物、建筑物和用具，一类一类的图形归类编排，比如，将荷花、荷叶、莲蓬就安排在一起，不同的形象组合在一起含意就更深一层了。

以后又陆续出版了好几本七巧图形的书，但大部分是照

搬1813年出版的《七巧图合璧》，1820年出版了一本《七巧诸编合璧》，图形就更为准确清晰，题名和解释也都有所发展。

到了十九世纪初，七巧板和不倒翁，押宝等游戏一起传到欧洲。七巧板游戏在欧美各国流传之快是惊人的。1805年欧洲出了第一本七巧板图形的书，书名为《中国儿童新七巧图》，1918年，美、德、意、奥等各国都相继有七巧板的书出版。他们出版的这类书大都还是中国七巧图谱的翻版，如美国出版的《流行的中国游戏》就是完全照搬中国的《七巧图合璧》。在此期间，西方有关七巧板的文章也开始发表，1817年有一位名叫W·威廉的教师写了一篇数学论文，列举了一些用拼七巧板的方法来求解的几何题。到十九世纪下半叶，七巧板在德国、法国大为流行，他们做成放在盒子里出售，并附有印了图形的说明书。

拼七巧板是一种智力游戏，据说流放中的拿破仑也是七巧板游戏的爱好者。在一本题为《七巧板的第八本书》上，曾提到中国清朝的李鸿章借用七巧板证明了数千年前的毕达哥拉斯定理。十九世纪末二十世纪初出现了两个七巧板谜，他们的名字叫山姆·洛埃德和亨利·杜登，洛埃德创造了很多新图形刊登在威廉的《新数学图形》一书上，杜登在他办的一本杂志上开辟了“七巧板”专栏，他们两人把中国传入的七巧板游戏大大发展了。近年来西方出版的七巧板书，大都直接或间接取材于洛埃德和杜登所创造的材料。

1918年由美国纽约古德里杰公司出版的《时髦的中国之谜》一书前言中，引用《机巧的中国之谜》一首诗，我们从这首诗中可以看到国外对中国七巧板的推崇和评介。

别了，骨牌和骰子！别了，
我从前最喜欢的“狐狸和鹅”棋！
早在我学会读书写字之前，
在那上面我安静地消磨了许多时日。

如今是这些方块和三角，科学的标记，
谁也不知道象征什么，这些象征性的形体；
你说不出是什么，也说不出不是什么，
象是福萨里*的梦境，宣告了对语言的蔑视。

无论是诗人或画家，尽管让他们自由发挥，
给他们奇思幻想的权利，
但他们竭尽心力，也还是毫无希望，
胜过这奇妙的七巧形体。

美人以她纤巧的玉指，
一块一块摆弄不息；
而后撅起嘴巴转向图纸，
半嗔半恼地发现辛苦全是白费。

几何学家精明睿智，
摆每一块都根据法则和推理；
但他明智的选择常常失误，
只好以皱眉来显示超人的智力。

就是说，在精神疲敝消沉的时刻，

只有在七巧板中才能找到舒适；
七巧板不知不觉地吸引了我们，
在忧郁之中只有它能使你欢愉！

译注 1：Hanry Fuseli 瑞士画家（1741—1825）以画莎士比亚戏剧中充满梦幻景象的场面著名。

七巧板的数学趣味

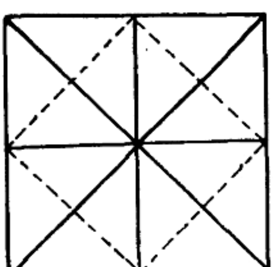
凸形七巧图：

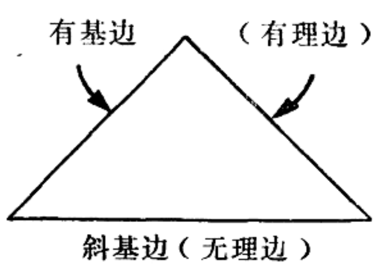
七巧板的一个有趣性质是它具有所谓凸性。如果在一个图形之中取任意两点，在这两点连线上所有的点都含于这个图形之中，那末、图形称为凸的。比方说满月就是凸形，而新月就不是凸形。

一九四二年浙江大学王福春、萧昌起（译音）发现七巧板能拼成的凸形不多于13个。这13个图形参见“美国数学月报”第49卷（“American Mathematical monthly” vol 49)

这个问题他们是这样证明的：

把几何问题化为代数问题。一整套七巧板虽然可以划分为16个小等腰直角三角形，（我们姑且称这种小三角形为“基三角形”），并称基三角形的二条短边为有理边，有理边指长度为有理数的边，一条长边为无理边。





当16个基三角形组成一个凸多边形时，基三角形的直基边（即有理边）总是与直基边相拼，斜基(即无理边)也总是与斜基边相拼。因而这个由基三角形拼合而成的凸多边的每一条边都是由同类型的基三角形边组成的：或者全由基三角形的直基边组成，或者由基三角形的斜基边组成。

如果我们把由基三角形的直基边构成的多边形的边称之为直边（有理边），仿此把由基三角形斜边构成的多边形的边称之为斜边（无理边），那末，在这样的多边形中，夹角为直角的两条邻边总是同类的，亦即，要末都是直边，要末都是斜边；而夹角为锐角 45°或钝角135°的两条邻边必然是不同类的，亦即一条是直边，另一条是斜边。

假设某多边形有 n 个角，其中 p 个锐角、q 个直角，r 个钝角，即：

$$p+q+r=n \qquad (1)$$

根据凸多边形的性质：n 边形的所有角之和等于$(n-2)\times180°$，我们得到如下公式：

$$p\times45°+q\times90°+r\times135°=(n-2)\times180° \qquad (2)$$

从（1）式和（2）式消去 r，得到：

$$2p+q=8-n$$

由于 p 和 q 是大于或者等于零，从而推出这种多边形最多只能有 8 条边，特别对于 p、q、r 和 n，就有这样的最小数的可能值，即是：

8 边形　8 个钝角；

7 边形　6 个钝角　1 个直角；

6 边形　4 个钝角　2 个直角，

　　　或 5 个钝角　1 个锐角；

5 边形　2 个钝角　3 个直角

或 3 个钝角，1 个直角，1 个锐角；

4 边形　四角直角长方形或 2 个钝角、2 个锐角（平行四边形，或梯形），或 1 个钝角，2 个直角，1 个锐角。

3 边形　1 个直角 2 个锐角（三角形）。

虽然，这样的每一个多边形都可以画在长方形($PQRS$)之中，使得多边形($ABCDEFGH$)的直边落在这个长方形的边上。（见13页上图）

如果我们假设长方形的边 PQ 和 PS 分别等于基三角形之边的 x 和 y 倍，那末长方形的面积就是等于基三角形的 $2\times y$ 倍。如果这凸多边形的斜边(HA、BC、DB 和 FG)分别等于基三角形斜边长度的 a、b、c、d 倍、(a、b、c 或 d 都有可能等于零)。那末三角形 PAH、BQC、DRE 和 FSG 的面积分别等于 a^2、b^2、c^2 和 d^2 个基三角形的面积。由于凸多边形的面积是 16 个基三角形的面积，于是推出，在 $a+b\leqslant x$，$c+d\leqslant x$，$a+d\leqslant y$，$b+c\leqslant y$ 的条件下，有着

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2xy-16。$$

现在通过解这个具有附加条件的方程，原先的问题就可完全解决了。选取 x 和 y 可能值的分布，他们证得，恰好16个基三角形能组成20个凸多边形，其中的13个凸多边形系由七巧板拼成。

格点七巧图：

按我们的理解，格点乃是指在 xy 座标平面上取整数值的所有的点，形象地说，它在空中看起来好象一个苹果圈。因而，格点七巧图就是这样的一种七巧图，它的七块板中的每一顶点都与格点重合。每个格点七巧图只要加上若干个基

三角形就能成为凸多边形。为把格点七巧图变成一个凸多边形所需要的最小的基三角形的个数，我们将称之为这个七巧图的格点凸性数，与之相对应的凸多边形则称之为这个七巧图的凸壳。

例如：凸形七巧图它的凸性数为零，本身就是它的凸壳，反之，从一个由17个基三角形组成的凸多边形中取掉一个基三角形，由此而构成的图形可能是七巧图形，以这样的方式，我们就得到了格点凸性数为零为1的所有格点七巧图；即凸形七巧图和1—凸形七巧图。

为了找出所有的1—凸形七巧图，我们可以采用前一节找凸形七巧图的方法，只要先以十七个基形代替十六个基形就成了。更一般地说，我们可以通过以n代替16，找出所有的n—凸形七巧图。类似于16个基三角形组成的凸多边形的计算方法，可以证明，由17个基三角形组成的凸多边形是9个。这样1—凸多边形的个数就可从每一多边形中以各种可能的不同方法取去一个基三角形来求得。1—凸形七巧图的个数远比凸形七巧图的要多得多。

所有的1—凸形七巧图共133个。2—凸形七巧图的数目就多得多，（由18个基三角形组成的凸多边形就有17种）3—凸形七巧图的数目比2—凸形七巧图的多，4—凸形七巧图又比3—凸形七巧图又多得多。以此类推，格点凸性数越大，图形就越散。为了避免这种没有特别意思的七巧图，我们再增加一个条件：连通性。一个七巧图称为连通的是指：对于七巧图中的任何两点，可由以这两点为端点，且完全含于此七巧图中的曲线弧连接。

在连通七巧图的情况的（格点）凸性数的数是有限的

吗？直觉的回答，是肯定的。下面让我们对这个问题作进一步的探讨。

我们把基本三角形的边简称之为基边，把一列相连的基边称之为路径。连通七巧图总具有一条边界线，这就是说七巧板中每一块都位于由七巧图的16个基本三角形的基边所组成的封闭路径之内。

很有可能，七巧图的界线恰好与它的凸壳的边界线重合，如果不是这样，那么此边界线就由两种路径所组成：一种与凸壳的边界线重合，另一种只有它的两端点落在这条边界线上。在后一种与廓形不完全重合的情况下，凸壳的两条相连的基边不会形成互为45°或90°的角，否则就有更小的凸壳存在。它只能形成135°的角。因而这条路径要不是一条直线，就是夹角为135°角的两条直线。两种情况之中无论那一种，路径总是在两端点之间取最短的基边连线，这意味着，构成廓线的基边数与构成相应七巧图的边界线的基边数相同或者前者比后者更少。

将这个原理应用到所有的廓线上，这种廓线在一起组成了七巧图形的边界，它并包含与凸壳的边界相重合者。构成这个凸壳的边界个数，与构成七巧图形边界的基边数相同或是更少一些。然而，七巧图形的边界线，最多由18条基边构成，这是因为七块板算在一起总共只有30条基边，其中至少有两倍于 6 条的基边不属于边界（因为要服从连通性这个条件）。结论：连通格点七巧图的凸壳的境界线最多由十八条基边构成。现在的问题是：有18条基边的凸多边形最大面积该是多少？（虽然构成边界线的基边数小，面积也越小）。

让我们看前面提到的长方形 $PQRS$，其中已画出一个七

巧图的凸壳形，而这个七巧图有18条基边构成它的边界。a、b、c、d 依然是具有斜基边（无理边）的长度。因为直角边（有理边）与长方形的边界线重合，长方形的周长是：$2(x+y)=18+(a+b+c+d)$。此外，由于这个凸多边形的面积等于 $2xy-(a^2+b^2+c^2+d^2)$，如果斜基边（无理边）的数目是给定的（即若 $a+b+c+d$ 是已知数）那末当 a、b、c 和 d 的值越接越近时，则 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 就越小，当 x 和 y 之差越小时，则 x、y 的值就越大。

对于斜基边数目不相同的各种七巧图形，其面积都可以简单地计算出来。结果表明面积随着斜基边（无理边）的数目之增加而增大。

因而，当 $a+b+c+d=18$，$x=y=9$，$a=b=4$，以及 $c=d=5$ 时，其面积达到最大。这最大面积是：

$2\times81-16-16-25-25=80$个基三角形。

使其达到下确界，我们利用这样的事实：七巧图形的边界构成了最多由10条斜基边。凸壳可能有比七巧图的斜基边更多的斜基边。但如果那样，每多增加一条斜边就会减少两条直边，基边的总数减少，因而面积也就相应要减少了。

于是我们得到72个基三角形的构成的凸多边形，实现最大面积，（其边界为10条基边）。这意味着连通格点七巧图最多只能是56—凸七巧图形。但实际达到这个极限无疑是不可能的。但是41—凸七巧图已经被鹿特丹的两个大学生发现了，（见13页下图）。

可分七巧图：

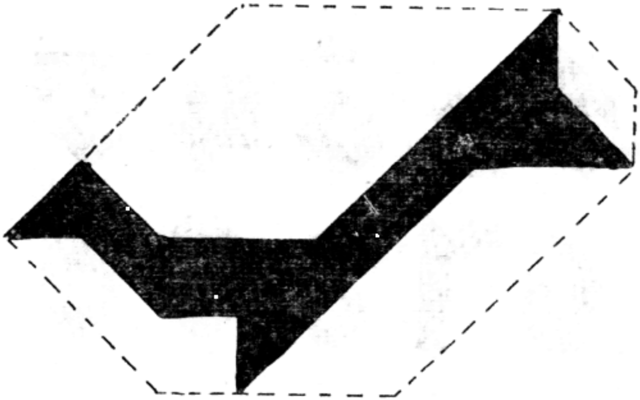
连通七巧图的个数是颇为庞大的。为对这么多的数目有个印象，我们考虑能满足较强条件的其中一部分，也就是，

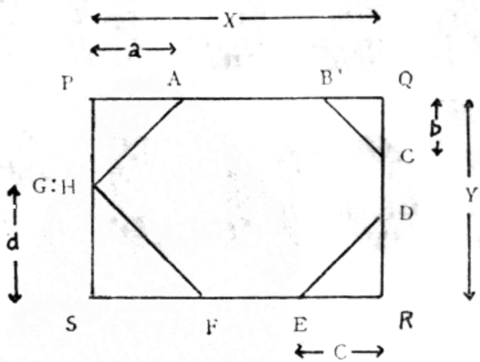
它能分为形状等同的两部分的七巧图形，可分连通七巧图形。

可分七巧图是由两个完全相同的部分合起来构成的。这样的孪生图形共有65个(其中的29个绘在83页上)。

由于等同的两部分七巧图形可以有种种不同的结合方式联在一起，因而可分连通格点七巧图就有上千个。

读者们也许会愿意解决别的类似的问题：比方说，可分连通格点七巧图的最大格点凸性数是多少？




X
a
P
A
B'
Q
b
C
Y
G:H
D
d
S
F
E
R
C


12345
67890
ABCDE
FGHJK


LMNOP
QRST
UVW
XYZ