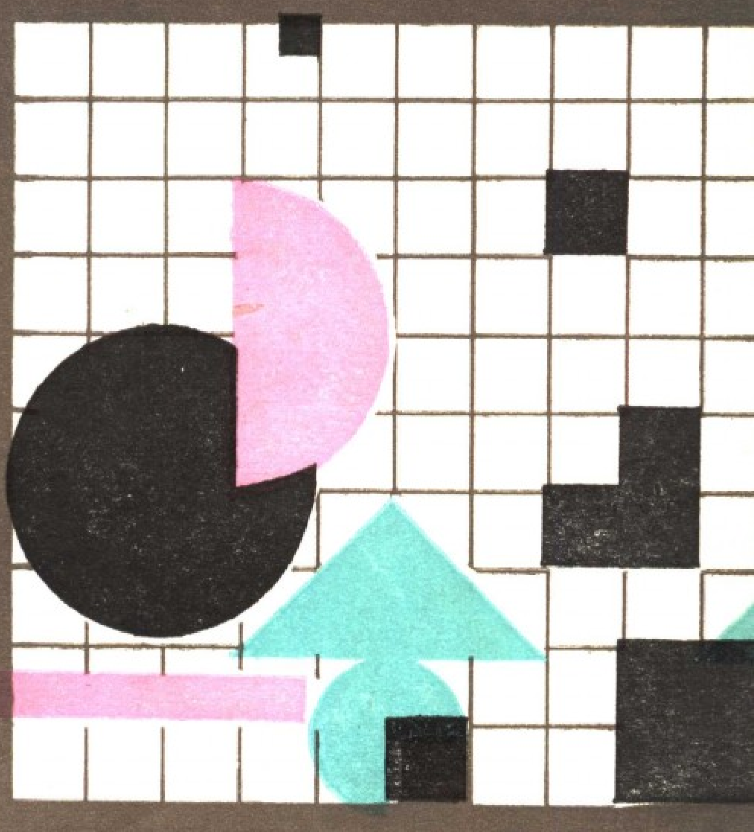
师专试用教材

初等几何研究

罗廷金 等 编

湖南教育出版社



师专试用教材

初等几何研究

主　编　罗廷金　龙际田
编　者　罗廷金　龙际田　胡跃宗
　　　　彭群钦　罗成铨　陈武枝
　　　　张业新　邱卫军　李汉瀛
　　　　肖振钢　周绍杰
主　审　徐　行

前　言

初等几何是中学数学教学的重要内容之一。为了使读者很好地驾驭中学几何教材，胜任中学几何课的教学任务，我们根据全国中小学师资工作会议的精神，编写了这本《初等几何研究》。

本书共七章，概括了中学几何内容，又作了适当的延伸，充实和提高。其特点是：

1.紧密结合中学几何教材的实际，较深刻地分析了中学几何教材的逻辑结构；

2.突出地介绍了几何公理化方法。通过几何学公理法的产生、发展和完善，明确了近代公理法的基本原理和结构，介绍了初等几何各组公理的内容和作用，了解中学几何体系的特点，与近代公理体系的联系、区别；为了扩展空间观念，还涉及到了非欧几何的基本特征。

3.从运动的观点研究了几何图形的性质，对几何变换的理论作了较详细的讨论。变换群的概念是近代几何重要概念之一，也是改革中学几何教学内容的一个方向；它对初等几何的内容和方法的研究都有指导作用。

本书对几何证题方法，几何量的计算，轨迹，作图和立体图形的性质，都作了较详细的讨论。它们都是初等几何的重要组成部分。

关于测量和制图的基本知识，是几何学的实际应用，也应是本教材的内容。但考虑到《大纲》规定的时间紧（82课时），即使安

排这些内容，也会语焉不详，难于达到目的，只好割爱。建议把制图、测量单独开设课程，让学生选修，着重实践，学就学好。

鉴于几何的逻辑原则和方法，已在《教学论》中讨论，在此不再重复。

本书可作为高师数学专业“初等几何复习与研究”课的试用教材，也可作为高师函授教材，中学数学教师参考书，还可作为小学教师自学高师数学专业的主要读物。

本书由常德师专徐行副教授主审，罗廷金副教授主编，龙际田为副主编。编写分工：罗廷金、邱卫平（第一章），龙际田（第二章），胡跃宗、李汉瀛（第三章），罗成铨（第四章），彭群钦、肖振纲（第五章），陈武枝（第六章），张业新（第七章）。还有常德师专数学科几何教研组的同志审阅了部分稿件，提出了一些宝贵的意见。

由于时间匆忙，水平有限，错误难免，恳请识者指正。

编者　1987年6月

目　录

第一章　几何学的公理方法

翻开中学几何课本，或其他逻辑结构较严谨的初等几何，将会看到：开始总是提出一些概念、定义，作为几何基础的一系列公理，推导出一串按着逻辑次序排列的定理，而每个定理是根据它前面的定义、公理、定理，经过逻辑证明后而得到的。

上述一连串按着严格逻辑原则、关系排列起来的概念（定义）、公理和定理，就形成了一门有系统的几何学．所以，我们对几何学的研究从公理方法开始．

§1.1　几何公理方法的意义

在一个理论系统中，总要选出少数不定义的概念和不证的命题作为出发点，这些不定义的概念称为初始概念．用初始概念所定义的新概念称为被定义概念．不加证明的命题．称为初始命题或公理．从公理推演出来的命题，称为定理．公理方法就是从初始概念和公理出发，定义其他一切概念和推演出其他一切定理的演绎方法．由初始概念、公理、定义、推理规则、定理所构成的演绎体系，称为公理系统．

公理方法和公理系统是属于同一系列的概念，公理系统只不过是应用公理方法的结果．公理学通常兼指公理方法和公理系统．

公理方法是在几何学的整理和研究中创造出来的科学方法之一，它在几何学的发展中产生并逐步完善．它的作用至少可以列

出如下几点：(1) 具有分析、总结数学知识的作用，凡取得了公理化结构形式的数学，由于定理和命题均已按照逻辑演绎关系串联起来，使用方便。(2) 它把一门数学的基础分析得很清楚，有利于比较各门数学的实质性异同，促使和推动新理论的创立。(3) 数学公理化方法在科学方法论上有示范作用。如本世纪40年代波兰的巴拿赫 (Banach) 曾完成了理论力学的公理化；物理学家还把相对论表述为公理化形式，等等。

公理学所研究的对象、性质和关系，称为它的“论域”。这些对象、性质和关系，由初始概念来表述。如欧氏几何，只需取“点”、“直线”、“平面”、“在…之上”、“在…之间”、“叠合”作为初始概念就够了。前三个概念所表示的三类对象和后三个概念所表示的三种关系，就是这种几何的论域。按照“一个公理系统只有一个论域”的观点，建立起来的公理学，称为实质公理学。具体地说，实质公理学的论域必须先于公理而具体给定，并且是唯一的。然后引入初始概念以表述该论域中的元素，建立公理以刻画这些元素的基本特点，借助于演绎推理来证明该论域中的真理。这种公理学是对经验知识的系统整理。与实质公理学相区别，形式公理学不预先给定任何论域，初始概念在引入公理之先是不加定义的。一个形式公理系统可有许多论域，如众所周知的布尔代数（逻辑代数）的公理系统，就是形式公理系统。它的论域在一种解释下是类（集合代数），在另一种解释下是命题（命题代数），也可解释为电路上的接点（逻辑电路）。

§1.2 欧几里得的《几何原本》

在古希腊，几何学的发展进入了一个新的时期．对几何知识的整理、概括和系统化工作势在必行，许多科学家参加了这一工作．下面，着重介绍《几何原本》的产生、内容、意义和缺点．

一、《几何原本》的产生

泰勒斯（Thales，公元前639—548年），被称为希腊几何学的鼻祖，曾总结出半圆的圆周角为直角，三角形合同定理等；德莫克利特计算过柱体和锥体的体积．

毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前580—500年）和他创立的学派，对几何概念的定义，定理的逻辑证明等几何方法，进行过探讨，他们提出了毕达哥拉斯定理（即勾股定理），但可能没有证明．他们还总结了关于三角形、平行线、多边形、圆、球等某些定理．特别还知道：三角形内角和等于二直角、黄金分割的作图、正多面体的定理等．

柏拉图（Platon，公元前429～348年）认为知识有加以演绎整理的必要，是第一个把严密推理法则加以系统化的人，他们按逻辑次序整理了定理．这个学派的著名数学家希波克拉特（Hippokratas，公元前470～400年），写过一本叫做《几何原本》的教科书，发明了用符号代替点或直线，据说定理按其证明所需要的依据来排先后次序，是他最早实行的．

亚里斯多德（Aristoteles，公元前384～322年），概括了思维的形式和规律，系统地提出了形式逻辑的有关理论问题，奠定了逻辑学的初步基础，为几何学提供了逻辑方法．他主张任何一种严密的科学体系，是从一些不能证明的原理开始的，而不证明的原理分为两类：即公理和公设．主张几何对象要加以定义，解释它们的特性．为了定义这些对象，要对一些不定义的基本对象加以

默认。

欧几里得（Euclid，公元前330～275年），在泰勒斯、毕达哥拉斯、柏拉图等学派的工作基础上，运用了亚里斯多德提供的逻辑方法，系统地写出了光辉著作《几何原本》．它是历史上第一本比较完整的数学理论著作，它建立在定义、公设、公理等几个最初的假设上，以这些假设为基础，运用逻辑的定义和推理方法，导出后面的一切定义和定理，把历史上积累起来的几何知识，用逻辑的链子编排一个比较完整的概念和理论系统．他示范式地规定了几何证明方法，如分析法、综合法和归谬法等．《几何原本》是用公理法建立几何系统的雏型，这种方法称为古典公理法。

二、《几何原本》的内容

《几何原本》亦称《原本》，全书共分十三卷，除其中第五、七、八、九、十卷是用几何方法讲述比例和算术理论外，其余各卷纯讲几何内容。

第一卷讲述平行线、三角形、平行四边形等定理和证明；第二卷主要是毕达哥拉斯定理的应用；第三卷讨论圆的有关定理；最后三卷是立体几何。

《原本》是用不严格公理法建立的一个逻辑体系，共有124个定义，466个定理。第一卷首先提出23个定义，前七个定义和最后一个定义是：

1.点没有大小；

2.线有长度没宽度；

3.线的界是点；

4.直线是同其中各点看齐的线；

5.面只有长度和宽度；

6.面的界是线；

7.平面是与其直线看齐的面；

23. 平行直线是这样的直线，它们在同一平面上，而且往两个方向无限延长后，在两个方向上都不会相交。

他按亚里斯多德对公设和公理的区分，把公理看成是适用于一切科学的真理，而公设则只适用于几何。他接着列出了五个公设和五个公理，把它们作为一切逻辑证明的依据。五个公设是：

（1）从任意点到另一点可以作直线；

（2）直线可以无限延长；

（3）以任意点为中心，可用任意长为半径作圆；

（4）所有直角皆相等；

（5）如果两条直线与第三条直线相交，所构成的同侧内角的和小于两直角，则这两条直线在这一侧相交。

五个公理是：

（1）等于同一量的量相等；

（2）等量加等量，其和相等；

（3）等量减等量，其差相等；

（4）可叠合的量相等；

（5）全体大于部分。

三、《几何原本》的意义

欧几里得《几何原本》的出现，标志着古希腊几何发展的重要里程碑。它在世界数学史上得到很高的评价。

（一）欧几里得把前人的成就和他自己的发现，编辑成为一个有逻辑相关性的理论系统．就使得几何知识系统化这个历史要求，

终于在他的时代，以高度的智慧和技巧，相当严密地获得解决，成为近代几何学公理法的先驱。

(二)欧几里得《几何原本》，不仅是两千年来传播几何知识的最早的经典著作，而且其中陈述的几何规律，一直是天文、物理、数学和许多其他技术科学，所不可缺少的基础理论。在数学史上，它是几何逻辑结构的典范。

四、《几何原本》存在的缺点

《原本》虽是比较严密的演绎系统，然而严格地说，它仍然存在着大量的缺点。

(一)某些定义不能成为正确的数学定义。如，定义1、2、5、6等，不过是对点、线、面等几何对象的直观描述。定义 4 的意义含混不清，因而它们在以后的讨论中不起作用。

(二)有着逻辑上的缺点。欧氏以后不少数学家对此都有所研究，值得称道的是阿基米德(Archimedes 公元前287～212年)的工作，他在《球和柱体的理论》中，提出了五条公理，对欧氏几何的公理有很大的发展。

(三)公理不足，只好依靠直观，或引入潜在假设。如，对“顺序”的概念没有给出明白的解释，但常借这个概念来论述问题；又如，《原本》里运用了直线或圆周的连续性，但没有对“连续”给以明确的解释；还有对“运动”的概念也没有明确的规定，而在讨论中默认地使用了它。

(四)某些公理的措词或提法也不够明确。如，公理5：“全体大于部分”，如果不把它的含义给以明确的规定，就可能引起误解。

综上所述，《原本》里所以没有提出严格的公理，这是由他的时代所决定的。这是他不能不依靠直观或使用潜在假设的原因所

在．同时，它提供了几何学的最初公理法的雏型，也为后来数学家展示了一些重要的逻辑基础．随着社会经济、文化技术和其他科学的发展，公理方法便逐步地完善起来．

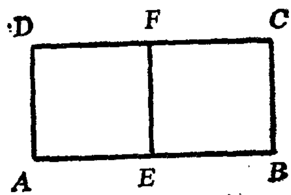
§1.3　非欧几何的发现

一、公设V的试证

在研究《原本》的古代学者，早就注意到了《原本》的缺点。他们为了消除这些缺点，一方面对公理系统中的公理进行增加或改换，另一方面是对第V公设的试证．

在所有这些对第V公设试证的学者中，萨开里（Gerolamo Saccheri，1667～1733 年）和兰伯特（J. H. Lambert，1728—1777年）是值得注意的，

萨开里用反证法来证明第V公设，如图1.3—1，已知四边形



图（1.3—1）

$ABCD$，$\angle A=\angle B=d$（d表示直角），$AD=BC$，EF是中点线。

他首先证明了EF同时垂直于AB和CD，以及$\angle C=\angle D$（以EF为轴，左边四边形可以翻折落到右边的四边形上）．

其次，他提出三个假设：$\angle D=d$，$\angle D>d$和$\angle D<d$

如果$\angle D=d$，则存在矩形，于是第V公设成立．因此，只需

要否定钝角和锐角假设，就证明了第V公设．他用完全正确的推理，把钝角假设引向矛盾；但是，他从锐角假设出发，企图引出矛盾时，获得一系列的命题，其中没有一个是与第V公设以前的命题相矛盾，只在推出第33个命题时，由于他引用了一个错误的结论，才否定了锐角假设．这个证明当然是无效的．

萨开里所获得的这些新命题，实际上就是非欧几何的部分内容．

兰伯特的证法与萨开里的讨论非常接近，他从锐角假设出发，也获得了一系列推论．如，“三角形内角和小于二直角”等，实际上也是非欧几何的部分内容．

对第V公设的研究，经历了2000年漫长的时间，走过了一条曲折的道路．但是，通过对它的种种试证，逐步认清了它在《原本》中的特殊地位，明确了它与一些命题的等价关系，获得了一系列非欧几何的内容，使公理方法的研究又向前推进了一步，同时为非欧几何的出现创造了必要的条件．

二、非欧几何的发现

综上所述，新几何也象其他学科一样，有它产生的特定过程，19世纪初，新几何已经达到瓜熟蒂落的时候．这一时期，下述几位数学家的工作是很出色的．

高斯（Gauss，1777～1855年）早在15岁时（1792）就开始考虑公设V，直到39岁（1816）还没有放弃证明第V公设的尝试．他的工作对新几何来说，虽然已经走得很远，然而，他没有公开发表过这方面的著作．

约·波里埃（Johann Blyai，1802～1860年），在21岁时也发现了新几何，并在1832年出版了他的著作，以短短24页的篇幅，

用附录的形式，列入他父亲伏·波里埃的作品《尝试》里。

最后，必须提到罗巴切夫斯基（Лобачевский，1792～1856年）的工作。他的工作与成就标志着自然科学，特别是数学史上划时代的里程碑。

罗氏解决这个难题的思考方法与众不同，他在《原本》的基础上，只否定了公设V及其等价命题，而代之以公设“在平面上通过已知直线外的一点，可以引出至少两条直线都与已知直线不相交”（罗氏平行公理L），由此建立新的几何系统，并在1826年2月宣读了关于《几何原理的扼要阐释、附有平行线定理的一个严格证明》。因此数学史上就确定1826年为新几何的诞生年。这种新几何称为“罗巴切夫斯基几何学”或称“波里埃—罗巴切夫斯基几何学”，高斯称它为“非欧几里德几何学”。

几何学上的另一重要成果是黎曼（B. Riemann，1826～1866年）得到的。1854年，黎曼在他的著作《关于几何基础里的假设》中，展开几何学的全新的分析原则，达到了与欧氏系统、罗氏系统都不相同的几何系统。在黎氏系统里，“过已知直线外一点，不能引任何直线与已知直线平行”，从而“三角形内角和大于二直角”。从逻辑基础来看，黎曼几何对欧氏公理系统来说，要比罗氏公理系统有更大的变动。

§1.4 几何近代公理方法

《原本》是用公理法建立几何体系的雏型，罗氏几何体系是用公理法建立几何的重要成果。但是，公理法达到完善的地步，是19世纪末由德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862～1943年）最后完成的。这种公理法称为近代公理法。

一、近代公理方法的形成

公理方法的发展和完成，是与对《原本》逻辑上的欠缺的补充与改进工作分不开的。阿基米德是最早发现《原本》的公理不足的少数学者之一，他提出的五条公理中，有一条就是现在的连续公理之一的阿基米德公理；几何评论家萨开里、兰伯特、勒让德等，都曾对欧氏的定义、公理、公设作过不少改进的尝试。

在研究几何公理中，第一个取得重大成就的是德国数学家巴士（Pasch，1843～1930年），他的《新几何学讲义》，比较完善地提出了欧氏几何的公理系统。巴士认为，几何基本命题应从实验得来，而几何体系的展开，应按逻辑推理的途径进行；他提出的十二个公理，后来被希尔伯特适当改造，列为他的公理系统中的前两组公理。

1899年，希尔伯特发表了著名的《几何学基础》，他首先提出欧氏几何学的原始元素和原始关系，由这些初始概念，成功地建立了欧氏几何学的公理系统，并按照不同的作用把它们分为五组（见下节）。他用这五组公理推出欧氏的定理，因而使欧氏几何的逻辑结构成为一个非常完善而严谨的科学体系。

二、近代公理方法的原理和结构

近代几何公理系统不只一种，其中最重要且广为流行的一种是希尔伯特提出的。他不但提出了一个完备的几何公理系统，完善地整理了欧氏几何学；而且，使罗氏几何学获得了牢固的基础和更明确的意义；同时还提出了公理系统的三项基本要求以及证明它们的普遍原则。

希氏近代公理方法的基本原理是：

（一）把三组叫做“点”、“直线”、“平面”的对象的集合（即点集、直线集、平面集）统称为“基本元素”，只要求它们是存在的，而不给它们下定义或描述.

（二）确定或指出基本元素间存在着的基本关系。如，“结合”关系、“顺序”关系、“合同”关系等等.并依次用通常的词语“在…上”或“…通过…”、“在…之间”或“…介于…之间”、“…合同于…”等来表述.

（三）恰当地拟订足以确定基本元素所需满足基本关系的最少要求，即公理.如，“对任两个不同的点，就有一条直线与它们衔接着”等.至于这些基本元素具有哪些形态、性质或含义，都由所列举的公理和关系来间接规定或制约.如，“直线上若有两点在平面上，则这条直线就在这平面上”.这条公理就规定着直线和平面在空间形式上的特征；即表述线的“直”与面的“平”.

（四）凡与基本元素、基本关系有逻辑联系的几何命题，都由公理来确定或推导出来，决不准许依靠直观.

根据上述基本原理，就得到几何空间的广义的或近代的概念.

（五）“几何空间”是对象间的关系满足指定的公理系统要求的对象集合，即一切符合公理系统规定的要求的对象集合，构成一个几何空间.而由这个公理系统导出的全部理论体系，就叫这个空间里的几何学.

这里的所谓“对象”，可以是任何种类的事物.其间的基本关系，可以是任何与它们相应的具体含义，使得它可以适用于所有必要和可能的情形.欧氏空间的基本元素，可以是点、直线、平面；也可以取为二实数组（或三实数组，甚至n个实数组）.当然，点也可取为矢量，从而得到矢量空间等.与此同时，几何空间在