



初中数学

总复习与测试(一)

北京教育学院西城分院 主编

中国农业机械出版社

青年自学辅导丛书

初中数学总复习与测试(一)

北京教育学院西城分院 主编

中国农业机械出版社

内 容 提 要

本书内容共分三部分,第一部分为初中代数,第二部分为平面几何,第三部分为综合练习。第一部分共有九个题组,第二部分共有七个题组,每一个题组都对基础知识作一个简明扼要的叙述,在此基础上精选了一部分例题,给出了精辟的分析和详细的解答过程,最后还附有习题答案与提示。第三部分作为自我检查之用。

本书可供青年职工、自学青年和初中毕业生使用,也可供中学教师参考。

初中数学总复习与测试(一)

北京教育学院西城分院 主编

责任编辑:张淑琴

中国农业机械出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 787×1092 1/32·印张 10·字数 218 千字

1987年2月北京第一版·1987年2月北京第一次印刷

印数 000,001—215,000·定价:1.80 元

统一书号:7216·271

前 言

为了帮助广大职工和初中毕业生系统复习中学各科课程,我们编写了这套《青年自学辅导丛书》。这套丛书是根据教育部制定的初级中学教学大纲和中等学校招生考试要求,对目前全国统编中学教材的基本内容进行系统的综合整理而编成的。为了便于大家在复习中较好地掌握、运用基础知识,提高分析问题、解决问题的能力,本着从自学青年和初中学生的实际情况出发的原则,书中精选了一定数量的例题、测试题,并附有相应的参考答案,供大家自测时使用。

这套丛书由北京教育学院西城分院组织北京市一些有教学经验的老师编写的。全套丛书包括:政治、语文、英语、数学、物理、化学等六个分册。

《数学》分为(一)和(二)两册。第(一)册分为初中代数、平面几何、综合练习三部分;第(二)册是1978~1986年全国部分省市中考数学试题解答与分析。

第(一)册同目前同类书相比,有以下特点:

1. 既突出重点,又注意了知识的覆盖面,每一个专题在重点讲解基本知识和基本技能的基础上,以题组的形式,配备了一些典型的例题和习题,便于集中解决某些重点和难点的问题,而对于一些非重点的内容则渗透于例题和习题之中,这样可以使读者用较短时间复习到更多的知识。

2. 既突出了分析方法,又注意了解题过程的规范化。对于例题,着重于分析为什么这么做,而不是只满足于知道

怎么做，在此基础上写出解答过程，这样既可以提高分析问题和解决问题的能力，又为自学创造了良好的条件。

3. 既突出了基本能力的训练，又注意了发散性思维的培
培养。对于某些例题，在重点掌握一种解法的基础上，还给
出了一题多解。这样可以做到学一道、会一类，收到举一反三、
事半功倍的效果，对培养发散性思维将有积极的意义，
也为培养创造性思维奠定基础。

4. 既突出了例、习题的目的性、顺序性、启发性、典
型性和综合性，又注意了题型的多样性。例、习题的选编除
了一般的证明题和计算题外，还编写了一些选择题、填空题
和判断题等，这样除了能够帮助青年学生更好地全面复习之
外，它的意义还在于培养青年学生思维的批判性和灵敏性。

参加本书编写的有北京教育学院西城分院傅佑珊、北京
三中陈家骏、北京八中黄光柏。由北京四中唐煜光审订。

限于编者水平，书中难免存在缺点和错误，欢迎读者批
评指正。

北京教育学院西城分院

目 录

第一部分 代 数

题组一 绝对值与算术根	1
(一) 绝对值	1
(二) 算术根	1
(三) 例题分析	1
(四) 习题	9
(五) 答案与提示	10
题组二 乘法公式与因式分解	11
(一) 乘法公式	11
(二) 因式分解	11
(三) 例题分析	12
(四) 习题	19
(五) 答案与提示	21
题组三 分式与根式	25
(一) 分式	25
(二) 根式	25
(三) 例题分析	26
(四) 习题	46
(五) 答案与提示	50
题组四 指数与对数	55
(一) 指数	55
(二) 对数	55
(三) 例题分析	56

(四) 习题	68
(五) 答案与提示	71
题组五 方程与方程组	76
(一) 方程	76
(二) 方程组	77
(三) 例题分析	77
(四) 习题	88
(五) 答案与提示	91
题组六 不等式与不等式组	98
(一) 不等式	98
(二) 不等式组	98
(三) 例题分析	98
(四) 习题	110
(五) 答案与提示	113
题组七 直角坐标系与函数	117
(一) 直角坐标系	117
(二) 函数及其图象	117
(三) 例题分析	118
(四) 习题	129
(五) 答案与提示	135
题组八 三角函数与解三角形	138
(一) 三角函数	138
(二) 解三角形	138
(三) 例题分析	140
(四) 习题	149
(五) 答案与提示	151
题组九 列方程(组)解应用题	153
(一) 列方程(组)解应用题的步骤	153
(二) 列方程(组)解应用题的关键	154
(三) 例题分析	154

(四) 习题	163
(五) 答案与提示	164

第二部分 平面几何

题组一 平行与垂直	166
(一) 证明两直线平行的主要依据和方法	166
(二) 证明两直线垂直的主要依据和方法	166
(三) 例题分析	167
(四) 习题	181
(五) 答案与提示	183
题组二 相等与不等	191
(一) 证明两线段(或角)相等的主要依据和方法	191
(二) 证明两线段(或角)不等的主要依据和方法	192
(三) 例题分析	193
(四) 习题	218
(五) 答案与提示	221
题组三 和差与倍半	228
(一) 证明线段(或角)的和、差、倍、半关系的 主要依据和方法	228
(二) 例题分析	228
(三) 习题	236
(四) 答案与提示	237
题组四 比例与相似	240
(一) 证明线段成比例的主要依据和方法	240
(二) 证明三角形相似的主要依据和方法	240
(三) 例题分析	241
(四) 习题	250
(五) 答案与提示	252
题组五 共圆与共线	258

(一) 证明四点共圆的主要依据和方法	258
(二) 证明三点共线的主要依据和方法	259
(三) 例题分析	259
(四) 习题	265
(五) 答案与提示	267
题组六 面积与计算	272
(一) 证明面积问题的主要依据和方法	272
(二) 关于几何计算	273
(三) 例题分析	273
(四) 习题	284
(五) 答案与提示	287
题组七 轨迹与作图	289
(一) 基本作图	289
(二) 基本轨迹定理	290
(三) 例题分析	290
(四) 习题	296
(五) 答案与提示	296

第三部分 综合练习

综合练习一	298
(一) 试题	298
(二) 答案与提示	301
综合练习二	304
(一) 试题	304
(二) 答案与提示	307

第一部分 代 数

题组一 绝对值与算术根

(一) 绝对值

1. 实数 a 的绝对值规定为:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

2. $|a|$ 的几何意义是: 在数轴上表示这个实数 a 的点离开原点的距离.

(二) 算术根

1. 正数 a 的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根; 零的 n 次方根也叫做零的算术根.

2. 记号 $\sqrt[n]{a}$ ($a \geq 0$, $n \geq 2$ 的整数) 只表示 a 的 n 次算术根.

3. 当 n 为偶数时:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(三) 例题分析

例1 计算:

(1) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$;

$$(2) \sqrt{(1-\sqrt{2})^2},$$

$$(3) |3a-\sqrt{(2a)^2}|, \text{ 其中 } a \leq 0.$$

分析: 因为绝对值和算术根都是非负的, 因此首先要判断 $|a|$ 与 $\sqrt{a^2}$ 中的 a 是负值还是非负值.

$$\text{解: (1)} \because \sqrt{2}-\sqrt{3} < 0,$$

$$\therefore |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\ = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$(2) \because 1-\sqrt{2} < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = -(1-\sqrt{2}) \\ = \sqrt{2}-1.$$

$$(3) \because a \leq 0, \therefore 2a \leq 0.$$

$$\therefore |3a-\sqrt{(2a)^2}| = |3a-(-2a)| \\ = |5a| = -5a.$$

例2 实 a, b, c 在数轴上的对应点如图1-1-1所示, 试化简: $\sqrt{a^2} - |a+b| + |c-a| + \sqrt{(b+c)^2}$.

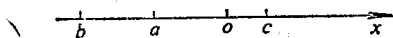


图 1-1-1

$$\text{解: } \because a < 0, \therefore \sqrt{a^2} = -a.$$

$$\because a < 0, b < 0, \therefore a+b < 0,$$

$$|a+b| = -(a+b).$$

$$\because c > 0, a < 0, \therefore c-a > 0, |c-a| = c-a.$$

$$\because b < 0, c > 0, \text{ 且 } |b| > |c|,$$

$$\therefore b+c < 0, \sqrt{(b+c)^2} = -(b+c).$$

$$\therefore \text{原式} = (-a) - [-(a+b)] + (c-a) + [-(b+c)] \\ = -a.$$

例3 已知 x 是整数, 且 $6.5 < |x| < 10$

(1) 求 x , 并在数轴上表示出来;

(2) 指出(1)中哪些是偶数、奇数、自然数、质数、合数.

解: (1) 如图 1-1-2,

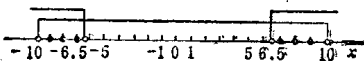


图 1-1-2

$$x = \pm 7, \pm 8, \pm 9.$$

(2) ± 8 是偶数; $\pm 7, \pm 9$ 是奇数; 7、8、9 是自然数; 7 是质数; 8、9 是合数.

说明:

在学习负数以后, 奇数、偶数的概念扩大为: 奇数是 $2k+1$ 或 $2k-1$; 偶数是 $2k$ (k 为整数).

例4 实数 x 取何值时, 式子 $\frac{|x+\sqrt{2}|}{x+\sqrt{2}}$ 的值

(1) 等于 1;

(2) 等于 -1;

(3) 不定.

解: (1) 令 $\frac{|x+\sqrt{2}|}{x+\sqrt{2}} = 1,$

$$\therefore |x+\sqrt{2}| = x+\sqrt{2}, \therefore x+\sqrt{2} > 0.$$

$\therefore x > -\sqrt{2}$ 时, 分式的值等于 1.

(2) 令 $\frac{|x+\sqrt{2}|}{x+\sqrt{2}} = -1.$

$$\because |x + \sqrt{2}| = -(x + \sqrt{2}), \therefore x + \sqrt{2} < 0.$$

$\therefore x < -\sqrt{2}$ 时, 分式的值等于 -1 .

(3) 当 $x = -\sqrt{2}$ 时, 分子、分母的值为零, 所以分式的值不定.

例5 化简下列各式:

$$(1) \sqrt{1 - \sin^2 170^\circ};$$

$$(2) \sqrt{1 - 2 \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ};$$

$$(3) \sqrt{(\lg 5)^2 - 2 \lg 5 + 1} - \lg 4 + \lg 20;$$

$$(4) \sqrt{10^{2 \lg(\lg x)} - 10^{\lg(\lg x) + \lg 2} + 1}.$$

分析: 为了化简各式, 应把根号下的式子恒等地变形为完全平方式.

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 原式} &= \sqrt{\cos^2 170^\circ} = |\cos 170^\circ| \\ &= -\cos 170^\circ = -(-\cos 10^\circ). \\ &= \cos 10^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \sqrt{\sin^2 35^\circ - 2 \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ + \cos^2 35^\circ} \\ &= \sqrt{(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)^2}. \end{aligned}$$

$$\because \cos 35^\circ > \sin 35^\circ,$$

$$\therefore \text{原式} = \cos 35^\circ - \sin 35^\circ.$$

$$(3) \text{ 原式} = \sqrt{(1 - \lg 5)^2} - \lg 4 + \lg 20.$$

$$\because 1 - \lg 5 = \lg 10 - \lg 5 > 0,$$

$$\therefore \text{原式} = 1 - \lg 5 + \lg \frac{20}{4} = 1.$$

$$\begin{aligned} (4) \because 10^{2 \lg(\lg x)} &= 10^{\lg(\lg x)^2} = (\lg x)^2, \\ 10^{\lg(\lg x) + \lg 2} &= 10^{\lg(2 \lg x)} = 2 \lg x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{原式} &= \sqrt{(\lg x)^2 - 2\lg x + 1} \\
 &= \sqrt{(\lg x - 1)^2} = |\lg x - 1| \\
 &= \begin{cases} \lg x - 1 & (x \geq 10), \\ 1 - \lg x & (0 < x < 10). \end{cases}
 \end{aligned}$$

例6 已知 $\frac{|16-m^2|+4(m-2n)^2}{\sqrt{m+4}}=0$, 求 m, n .

分析: 因为分式值为零, 必须分母不为零, 分子为零. 两个非负数之和为零, 必须此二数为零.

解: $\because |16-m^2|+4(m-2n)^2=0$,

$$\therefore \begin{cases} 16-m^2=0, \\ m-2n=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm 4, \\ n=\frac{m}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m=4, \\ n=2. \end{cases} \quad \begin{cases} m=-4 \\ n=-2 \end{cases}$$

例7 若 x 是实数, 不解方程, 判断下列方程是否有解.

$$|x+4|+\sqrt[4]{(x-6)^4}+(x^2-10x+25)=0.$$

解: 原方程变为

$$|x+4|+|x-6|+(x-5)^2=0.$$

$$\because |x+4| \geq 0, |x-6| \geq 0, (x-5)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x+4=0, \\ x-6=0, \\ x-5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4, \\ x=6, \\ x=5. \end{cases}$$

$\therefore$ 没有公共解,

$\therefore$ 原方程无解.

例8 当 $1 < x < 2$ 时, 求 $\frac{\sqrt[4]{(x-2)^6}}{x-2} + \frac{|x-1|}{x-1}$ 的值.

解: $\because 1 < x < 2$,

$$\therefore x-1 > 0, \quad x-2 < 0.$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} \\ &= -1 + 1 = 0.\end{aligned}$$

例9 x 取何值时, 下列各式成立:

$$(1) |3x-2| = 2-3x;$$

$$(2) \left| \frac{x-5}{2-x} \right| = \frac{x-5}{2-x};$$

$$(3) |(x-1)(x-0.5)| = |x-1| \cdot |x-0.5|;$$

$$(4) |(x-3)+(x-8)| = |x-3| + |x-8|;$$

$$(5) \sqrt{1-\sin^2 x} = -\cos x \quad (0^\circ \leq x \leq 180^\circ).$$

$$\text{解: (1) } \because |3x-2| = -(3x-2),$$

$$\therefore 3x-2 \leq 0, \quad x \leq \frac{2}{3}.$$

$$(2) \because \left| \frac{x-5}{2-x} \right| = \frac{x-5}{2-x},$$

$$\therefore \frac{x-5}{2-x} \geq 0,$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ 2-x > 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-5 \leq 0, \\ 2-x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore 2 < x \leq 5.$$

(3) x 为任意实数时, 等式都成立.

(4) $(x-3)$ 与 $(x-8)$ 必须同号或同为零, 或一个为零.

$$\therefore (x-3)(x-8) \geq 0,$$

解得 $x \leq 3$ 或 $x \geq 8$.

$$(5) \because \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = -\cos x,$$

$$\therefore \cos x \leq 0,$$

$$\therefore 90^\circ \leq x \leq 180^\circ.$$

例10 已知线段PQ的两个端点分别为P(p, 2)和Q(-8, q), 且 $|PQ| = 2\sqrt{8p-2q}$. 求p, q的值.

$$\text{解: } \because |PQ| = \sqrt{(p+8)^2 + (2-q)^2},$$

$$\therefore 2\sqrt{8p-2q} = \sqrt{(p+8)^2 + (2-q)^2},$$

两边平方, 并整理得

$$(p-8)^2 + (q+2)^2 = 0,$$

$$\therefore p = 8, \quad q = -2.$$

例11 选择题 (本书所有的选择题给出的(A)、(B)、(C)、(D)四个答案中, 只有一个是正确的, 将正确答案的题号填在圆括号()内.)

若实数x满足 $|1-x| = 1+|x|$, 则 $\sqrt{(x-1)^2}$ 等于
(A) $x-1$; (B) $1-x$; (C) 1; (D) -1. 答()

$$\text{解: } \because |1-x| = 1+|x|,$$

$$\therefore 1-2x+x^2 = 1+2|x|+x^2,$$

$$|x| = -x,$$

$$\therefore x \leq 0.$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2} = -(x-1) = 1-x.$$

因此本题答案是 (B).

说明:

解答选择题的常用方法有: 直接法和筛选法. 直接法就是由已知条件, 通过正确的推理、计算, 作出判断 (本例是直接法); 筛选法是将不合适的答案逐个排除, 最后剩下的一个就是正确答案, 或者在逐个检验时, 发现某个答案正确, 那么, 其它答案都不正确, 这是因为原题中已交代清楚只有

一个答案是正确的。

例12 选择题：

当 x 是实数时，指出下面哪一组两个函数相同。

(A) $y_1 = |x|$ 和 $y_2 = (\sqrt{x})^2$;

(B) $y_1 = |-x|$ 和 $y_2 = \sqrt{-x^2}$;

(C) $y_1 = |x|$ 和 $y_2 = \sqrt{x^2}$;

(D) $y_1 = |-x|$ 和 $y_2 = -\sqrt{x^2}$. 答()

分析：两个函数，当且只当具有以下三个条件时，才是相同的函数。

(1) 自变量 x 的取值范围相同；

(2) 函数 y 取值范围相同；

(3) 对应规律相同。

解：在(A)组里， $|x|$ 中的 x 为一切实数，而 $(\sqrt{x})^2$ 中 $x \geq 0$ ，由于自变量 x 取值的范围不同，所以这两个函数不相同。

在(B)组里， $|-x|$ 中的 x 为一切实数，而 $\sqrt{-x^2}$ 中 x 的值只能取 0，由于自变量 x 的取值范围不同，所以这两个函数不相同。

在(C)组里，对于一切实数 x ， $|x| = \sqrt{x^2}$ 总成立，所以本题的答案是 (C)。

说明：本题所使用的方法是筛选法。

例13 选择题：

如果 $|x - \log_a y| = x + \log_a y$ ($a > 0, a \neq 1, y > 0, x$ 是实数)，那么 x 与 y 的取值是 (A) $x = 0$ ；(B) $y = 1$ ；

(C) $x = 0$ 且 $y = 1$ ；(D) $\frac{(y-1)}{x} = 0$. 答()