教学参考　　　　　　　　　　　　　王　鋒主编

理论力学习题解

（下　册）

中国人民解放軍后勤工程学院訓綀部力学教研室

一九八〇年七月

目　录

三、动 力 学

12．质点的运动微分方程

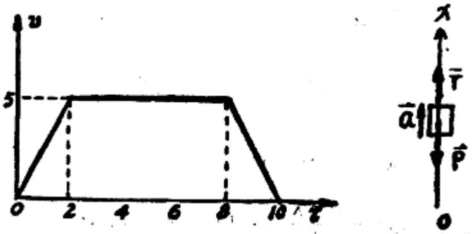
359〔204〕．电梯重480kg，上升时的速度图如图所示。求在下列三个时间间隔内，悬挂电梯的绳索的张力。

（1）由 $t=0$ s到 $t=2$ s；

（2）由 $t=2$ s到 $t=8$ s；

（3）由 $t=8$ s到 $t=10$s。

图中速度单位为m/s，时间单位为s。



题359〔204〕附图

解：将电梯视为质点，作用在其上的力有重力 P和绳的张力 T，根据已知的运动条件，绳的张力可分三个阶段求出：

（1）在第一阶段的速度方程为 $V_1=2.5t$，

对时间求导后，则得 $a_1=2.5$。

由动力学基本方程得 $T_1-P=\frac{P}{g}a_1$。

由此求出 $T_1=P\left(1+\frac{a_1}{g}\right)=480\left(1+\frac{2.5}{9.8}\right)=602(kg)$。

（2）在第二阶段，$V_2=5$，故知 $a_2=0$。

由动力学基本方程得 $T_2-P=\frac{P}{g}a_2=0$，

$\therefore\ T_2=P=480(kg)$。

（3）在第三阶段，已知速度方程为 $V_3=-2.5t+25$，

对 t 求导后得 $a_3=-2.5$。

由动力学基本方程 $T_3-P=\frac{P}{g}a_3$，

由此求出 $T_3=P\left(1+\frac{a_3}{g}\right)$

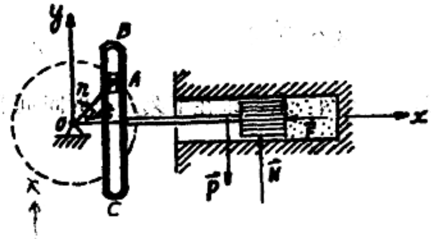
$$=480\left(1-\frac{2.5}{9.8}\right)=358(kg)。$$

360〔205〕．在曲柄滑道连杆机构中，活塞和活塞杆共重50kg。曲柄长30cm，绕O轴作匀速转动，转速为n=120r/min。求当曲柄在以下位置时，作用在活塞上的水平力。

（1）OA水平向右；

（2）OA铅垂向上。

曲柄重量不计。



题360〔205〕附图

解：（1）选取对象：滑道连杆机构。

（2）分析运动：曲柄OA以匀角速度ω转动，带动滑道连杆机构在水平方向作直线平动，故其运动情况可由滑块A的水平坐标确定，即其运动方程为

$$x_A=OA\cdot\cos\omega t,$$

其加速度为 $a_A=\frac{d^2x_A}{dt^2}=-OA\cdot\omega^2\cos\omega t$。

（3）分析力：对象上受有重力P、气缸壁对活塞的反力的合力N和作用在活塞上的水平力F（蒸气压力和气缸壁对活塞的摩擦力的合力）。因曲柄重量不计，故滑块A与滑道壁之间的作用力为零。

（4）列式求解：由动力学基本方程

$$\frac{P}{g}\mathbf{a}_A=\mathbf{P}+\mathbf{F}+\mathbf{N}。$$

在x轴上的投影方程为 $-\frac{P}{g}\cdot OA\cdot\omega^2\cos\omega t=-F$。

$\because\ n=120r/min\quad\therefore\ \omega=4\pi\ 1/s$。

$\therefore\ F=\frac{P}{g}\cdot OA(4\pi)^2\cos\omega t$。

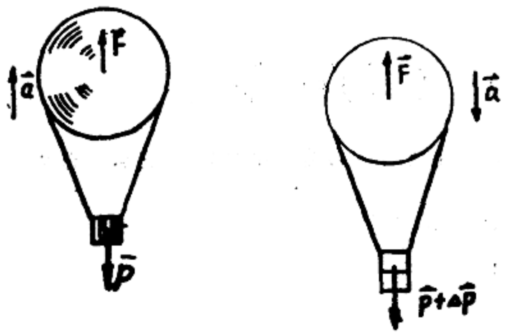
当$\omega t=0$时，$F=\frac{P}{g}\cdot OA\cdot16\pi^2=\frac{50}{9.8}\times0.3\times16\pi^2=241(kg)$。

当$\omega t=\frac{\pi}{2}$时，$F=0$。

361〔206〕．气球的载荷为P，以等加速度a向上升起。问气球的载荷增加多少，方能使它以相同的加速度向下降落。

解：设气球的浮力为F。气球在F、P作用下以加速度a上升。若气球的载荷增加

Δ P，则气球在（ P+Δ P）、F作用下以加速度 a下降。



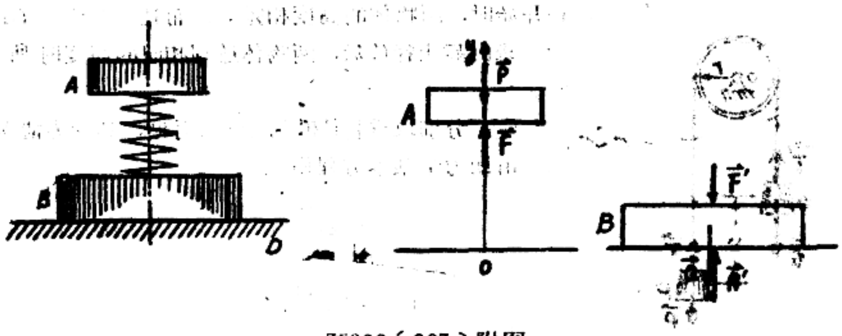
题361〔206〕附图

由动力学基本方程得方程组（沒有考虑气球质量）：

$$\left.\begin{aligned} F-P&=\frac{P}{g}a \\ P+\Delta P-F&=\frac{P+\Delta P}{g}a \end{aligned}\right\}$$

解此方程组得 $\Delta P=\dfrac{2a}{g-a}P$。

362〔207〕．重物A和B的重量分别为P＝20kg和Q＝40kg，并以弹簧互相连接。重物A沿铅垂线按规律 $y=H\cos\dfrac{2\pi}{T}t$ 作简谐运动，式中振幅H＝1cm，周期T＝0.25S。弹簧的重量不计。求支承面CD所受压力的最大值和最小值。



题362〔207〕附图

解：取物块A为对象，其上受有重力P和弹力F作用，重物A沿铅垂线按规律 $y=H\cos\dfrac{2\pi}{T}t$ 作简谐运动。

由质点运动微分方程， $\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=F-P$，

$$\therefore \quad F=P\left[1-\frac{H}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T}t\right].$$

再取物块B为对象，其上受有重力Q、弹力F′和支承面的反力 N′作用。物块B静止不动。由平衡方程得

$$N'-Q-F'=0$$

$$N'=Q+F'。$$

$$\because \quad F'=F,$$

$$\therefore \quad N'=Q+P\left[1-\frac{H}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T}t\right]$$

$$N'_{max}=Q+P\left[1+\frac{H}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]=40+20\left(1+\frac{0.01}{9.8}\cdot\frac{4\pi^2}{0.25^2}\right)$$

$$=72.8(kg);$$

$$N'_{min}=Q+P\left[1-\frac{H}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]=40+20\left(1-\frac{0.01}{9.8}\cdot\frac{4\pi^2}{0.25^2}\right)$$

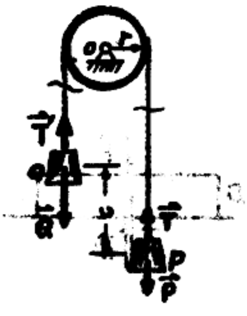
$$=47.2(kg)。$$

由此求得支承面CD所受压力的最大值和最小值分别为

$$N_{max}=N'_{max}=72.8kg;$$

$$N_{min}=N'_{min}=47.2kg。$$

363〔208〕. 两物体各重P和Q，用一绳子连接，此绳跨过一滑轮，滑轮半径为r。如在开始时，两物体的高度相差c，而且Q＞P，不计滑轮质量。求由静止释放后，两物体达到相同的高度时所需的时间。



题363〔208〕附图

解：分别取重物P和重物Q为对象，其受力情况如图所示。由动力学基本方程得

$$T-P=\frac{P}{g}a,$$

$$Q-T'=\frac{Q}{g}a'。$$

因绳不可伸长，故有 $a=a'$， 且$T=T'$。

解此方程组得 $a=\frac{Q-P}{Q+P}g$。

即重物P以匀加速度a上升，重物Q以匀加速度a下降。

重物Q下降的距离为 $S=\frac{1}{2}at^2$ （因初速$V_0=0$）。

当重物Q下降的距离 $S=\frac{1}{2}c$ 时，两物体就达到相同的高度。由此得

$$\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}at^2。$$

则 $t=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{c}{g}\ \frac{Q+P}{Q-P}}$。

364. 质量为$m=0.1$工程单位的点按$s=t^4-12t^3+60t$的规律作直线运动，式中s以m计，t以s计。求作用在此点上之力的大小，并问何时此力有极大或极小值？

解：直线运动方程为 $s=t^4-12t^3+60t^2$，

速度为 $V=\dot{s}=4t^3-36t^2+120t$，

加速度为 $a=\dot{V}=\ddot{s}=12t^2-72t+120=12(t^2-6t+10)$，

$\therefore\quad F=ma=0.1\times12(t^2-6t+10)=1.2(t^2-6t+10)(kg)$。

当 $\frac{da}{dt}=24(t-3)=0$ 时 $t=3$，

又 $\left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|_{t=3}=24>0$，

$\therefore\quad t=3$ 时 $a=a_{min}$。

$\therefore\quad F_{min}=1.2(t^2-6t+10)|_{t=3}$

$=1.2(9-18+10)=1.2(kg)$。

365. 一船重P，在停止前以 $s=\frac{P}{bg}v_0(1-e^{\frac{-bg}{P}t})$ 规律沿直线行驶，式中v_0为初速度，b为常数，求船所受的阻力，将其表示成速度v的函数。

解：船的直线运动方程为 $s=\frac{P}{bg}v_0(1-e^{\frac{-bg}{P}t})$，

其速度为 $v=\dot{s}=v_0e^{\frac{-bg}{P}t}$，

加速度为 $a=\dot{v}=-\frac{bg}{P}v_0e^{-\frac{bg}{P}t}$。

船在运动过程受到的力为

$$F=ma=\frac{P}{g}\left(-\frac{bg}{P}v_0e^{-\frac{bg}{P}t}\right)$$

$$= -bv_0 e^{-\frac{bg}{P}t} = -bv,$$

船在运动过程受到的力与速度方向相反，故此力为阻力。

366．质量为m的质点沿直线运动，其运动规律为$x=b\ln\left(1+\frac{v_0}{b}t\right)$，其中$v_0$为初速度，b为常数。求作用于质点上的力，将其表示成速度v的函数。

解：
$$x=b\ln\left(1+\frac{v_0}{b}t\right),$$

$$v=\dot{x}=\frac{v_0}{1+\frac{v_0}{b}t},\qquad a=\dot{v}=-\frac{\frac{v_0^2}{b}}{\left(1+\frac{v_0}{b}t\right)^2}=-\frac{v^2}{b},$$

$$\therefore\quad F=ma=-\frac{m}{b}v^2。$$

367〔209〕．汽车重P，以等速v驶过拱桥，桥面ACB为一抛物线，其尺寸如图所示。求汽车过C点时对桥的压力。

题367〔209〕附图

解：取汽车为对象，将汽车视为质点，作用在汽车上的力有重力P和桥面的反力N，汽车在桥顶C时，P与N在同一铅垂线上，取自然轴系，得出质点在C点的运动微分方程组为

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{\rho}=P-N \qquad (2)$$

（1）式表明在此瞬时汽车的切向加速度等于零。

由（2）式，求得桥面的反力　$N=P\left(1-\frac{v^2}{\rho g}\right)$。

现在来求C点处的曲率半径ρ。

由解析几何知，抛物线$\widehat{ACB}$的方程可写为

$$y=K\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\delta，其中K为待定系数。$$

当$x=0$时$y=0$，代入上式，

$$0=K\left(0-\frac{l}{2}\right)^2+\delta \qquad 则\ K=-\frac{4\delta}{l^2}。$$

$\therefore$ 抛物线方程为 $y=-\frac{4\delta}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\delta$，

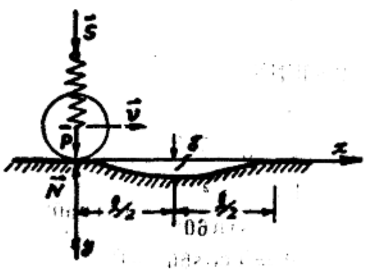
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{8\delta}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right),\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}}=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8\delta}{l^2}。$$

由曲率公式 $k_C=\frac{1}{\rho}=\left|\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\right|=\frac{8\delta}{l^2}$。

$$\therefore\quad N=P\left(1-\frac{8\delta}{l^2}\frac{v^2}{g}\right)=P\left(1-\frac{8\delta}{gl^2}v^2\right)。$$

汽车对桥面的压力 N′ 与 N大小相等方向相反。

368. 车轮重P，沿水平路面作匀速运动。路面上有一凹坑，其形状由方程 $y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{l}x\right)$确定。路面和车轮均看成刚体。车箱通过弹簧还给车轮以压力s。当车子经过凹坑时，求路面给车轮的最大和最小反力。



题368附图

解：取车轮为对象，其上受有重力P、压力 S和路面的反力 N，

由y轴方向的质点运动微分方程，$S+P-N=\frac{P}{g}\ddot{y}$，

$$N=S+P-\frac{P}{g}\ddot{y}\qquad\qquad (A)$$

又质点运动轨迹为 $y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{l}x\right)$

而 $x=vt$

$\therefore$ 质点在y轴方向的运动方程为 $y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{l}vt\right)$，

其加速度为 $\ddot{y}=\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2}\cos\frac{2\pi v}{l}t$

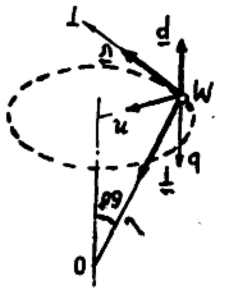
$$\ddot{y}_{max}=\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2},\qquad \ddot{y}_{min}=-\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2},$$

当 $\ddot{y}_{max}=\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2}$，代入（A），

$$\therefore \qquad N_{min}=S+P-\frac{P}{g}\cdot\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2}=S+P\left(1-\frac{2\pi^2v^2\delta}{gl^2}\right);$$

当 $\ddot{y}_{min}=-\dfrac{2\pi^2v^2\delta}{l^2}$时，代入（A），

$$\therefore \qquad N_{max}=S+P-\frac{P}{g}\left(-\frac{2\pi^2v^2\delta}{l^2}\right)=S+P\left(1+\frac{2\pi^2v^2\delta}{gl^2}\right)。$$



题369附图

369．重物M重1kg，系于30cm长的细线上，线的另端系于固定点O。重物在水平面内作圆周运动，成一锥摆形状，且细线与铅垂线成60°角。求重物的速度和线的张力。

解：取质点M为对象，其上受有重力 **P** 和张力 **T**，其动力学基本方程为

$$\frac{P}{g}\mathbf{a}=\mathbf{P}+\mathbf{T}$$

向自然轴M-τnb投影：

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{l\sin 60^\circ}=T\sin 60^\circ \qquad (2)$$

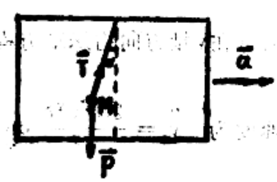
$$0=T\cos 60^\circ-P \qquad (3)$$

由（3）： $T=2P=2kg$；

由（2） $v=\sqrt{\dfrac{Tgl\sin^2 60^\circ}{P}}=\sqrt{\dfrac{2Pgl}{P}\sin^2 60^\circ}=\sqrt{2gl}\sin 60^\circ$

$$=\sqrt{2\times 980\times 30}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=210cm/s。$$

370．机车以等加速度沿直线轨道行驶。车厢内一单摆与铅垂线交角$\alpha=5°$，并且与车厢呈相对平衡。求机车的加速度。



题370附图

解：（1）对象：小球M。

（2）分析运动：设机车的加速度为a，小球相对于机车静止，故小车相对于地面的加速度为 **a**。

（3）分析力：质点M受有重力 **P**、张力 **T**。

（4）列式求解：由动力学基本方程

$$\frac{P}{g}\mathbf{a}=\mathbf{P}+\mathbf{T}$$

其投影方程为

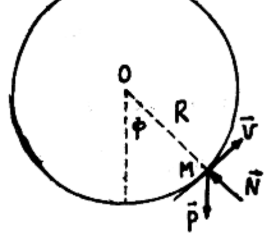
$$\frac{P}{g}a = T\sin\alpha \qquad (1)$$

$$0 = T\cos\alpha - P \qquad (2)$$

由（2）$T=\dfrac{P}{\cos\alpha}$ 代入（1）

$$\therefore \quad a=\frac{g}{P}\cdot\frac{P}{\cos\alpha}\sin\alpha = g\,tg5^\circ = 9.8\times0.0875 = 0.858\,m/s^2。$$

371．飞机以速度$v=1000km/h$作铅垂俯冲。其后，驾驶员将飞机自底点拉起，在铅垂平面内绕半径为$R=1500m$的大圆弧飞行。驾驶员体重65kg，问驾驶员对座位的最大压力是多少？



题371附图

解：（1）对象：飞行员M，视为质点。

（2）分析运动：在铅垂面内以速度

$$v=\frac{1000Km}{h}=\frac{10000}{36}m/s \text{ 作圆周运动。}$$

（3）分析力：质点M受有重力 **P**和座位的反力 **N**（其作用线通过圆心O）

（4）列式求解：由动力学基本方程$m\,\mathbf{a}=\mathbf{P}+\mathbf{N}$

向主法线方向投影：$\dfrac{P}{g}\dfrac{v^2}{R}=N-P\cos\phi,$

$$N=P\cos\phi+\frac{P}{g}\frac{v^3}{R}=P\left(\cos\phi+\frac{v^3}{Rg}\right)$$

当 $\phi=0$ 时 $N=N_{max}$

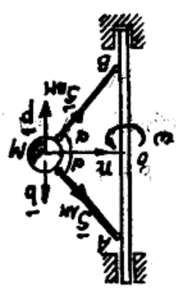
$$\therefore \quad N_{max}=P\left(1+\frac{v^2}{Rg}\right)$$

$$=65\left[1+\frac{10000^2}{36^2\times1500\times9.8}\right]$$

$$=65(1+5.25)=406.25(kg)。$$

$\therefore$ 驾驶员对座位的最大压力为

$$N'_{max}=N_{max}=406.25kg。$$



题372〔210〕附图

372〔210〕．重P的球M，为两根各长l的杆所支持，此物系以不变的角速度ω绕铅垂轴AB转动。如AB＝2a，两杆的各端均铰接，并且杆重忽略不计，求杆的内力。

解：取球M为对象，其上受有重力 **P**、杆AM、BM的拉力 $\mathbf{S}_{AM}$和 $\mathbf{S}_{BM}$，球M以OM为半径作匀速圆周运动。取

自然轴系，质点M在自然轴系上的运动微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{P}{g}\dfrac{dv}{dt}=0 & (1)\\ \dfrac{P}{g}\dfrac{v^2}{R}=(S_{AM}+S_{BM})\cos\alpha & (2)\\ 0=(S_{AM}-S_{BM})\sin\alpha-P & (3)\end{cases}$$

式中 $\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2=l\omega^2\cos\alpha$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{l}$。

代入（2）式得 $S_{AM}+S_{BM}=\dfrac{P}{g}l\omega^2$ （4）

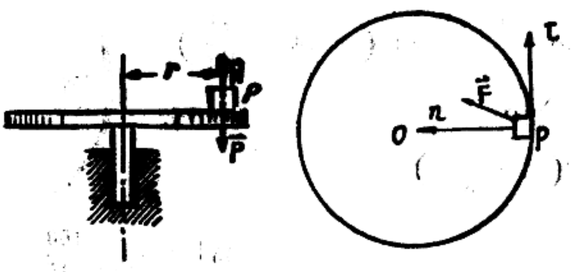
由（3）式 $S_{AM}-S_{BM}=\dfrac{Pl}{a}$ （5）

由（4），（5）式解得

$$S_{AM}=\frac{Pl}{2ag}(\omega^2a+g);$$

$$S_{BM}=\frac{Pl}{2ag}(\omega^2a-g)。$$

373〔211〕．一重P的物体放在匀速转动的水平转台上，其与转轴的距离为r。如物体与转台表面的摩擦系数为f，求物体不致因转台旋转而滑出的最大速度。



题373〔211〕附图

解：取物块P为对象，其上受有重力P、反力N和转台对物块P的摩擦力F，物块P随圆台作匀速圆周运动。取自然轴系，由动力学基本方程 $\dfrac{P}{g}\mathbf{a}=\mathbf{F}+\mathbf{P}+\mathbf{N}$

其投影方程为

$$\begin{cases}\dfrac{P}{g}\dfrac{dv}{dt}=F_\tau & \\ \dfrac{P}{g}\dfrac{v^2}{r}=F_n & (2)\\ 0=N-P & (3)\end{cases}$$

因圆台匀角速转动，$\frac{dv}{dt}=0$，由（1）式得$F_\tau=0$。此时$F=F_n$，即摩擦力沿主法线方向，此摩擦力就是维持物块随圆台作匀速圆周运动的向心力。

由（3），$N=P$，

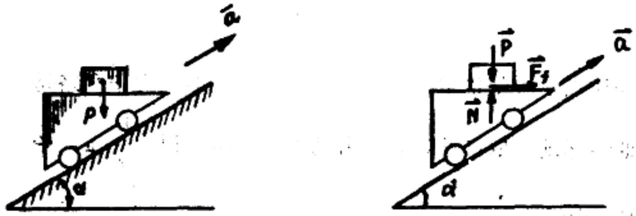
由摩擦定律，最大静摩擦力为 $F_{max}=fN=fP$。

由（2）式，$v=\sqrt{\frac{grF_n}{P}}=\sqrt{\frac{grF}{P}}$。

当 $F=F_{max}=fP$时 $v=v_{max}$。

$$\therefore\quad v_{max}=\sqrt{\frac{grfP}{P}}=\sqrt{fgr}。$$

374．一小车以等加速度 a 沿与水平面夹角为α的斜面向上运动，在小车的平顶上放一重为P的物块，随车一同运动。问物块与小车间的摩擦系数 f 最小应为若干。



题374附图

解：（1）对象：物块P。

（2）分析运动：小车以加速度 a沿斜面向上运动，通过摩擦力 F_f 带动物块P一起以加速度 a 运动。设需要的最小摩擦力为（$F_f)_{min}$

（3）分析力：物块受有重力 P、反力 N和摩擦力（$F_f)_{min}$

（4）列式求解：由动力学基本方程 $\frac{P}{g}\mathbf{a}=\mathbf{P}+\mathbf{N}+(\mathbf{F}_f)_{min}$

其投影方程为

$$Ff_{min}=\frac{P}{g}a\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

$$N-P=\frac{P}{g}a\cdot\sin\alpha \qquad (2)$$

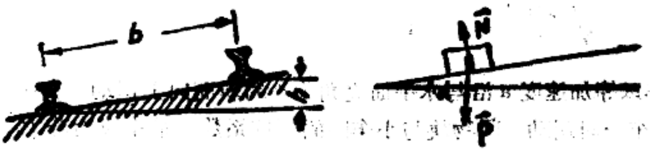
由（2），$N=P\left(1+\frac{a}{g}\sin\alpha\right)$

$$\therefore\quad Ff_{min}=f_{min}\cdot N=f_{min}\cdot P\left(1+\frac{a}{g}\sin\alpha\right) \qquad (3)$$

由（1），（3）：　$f_{min}\cdot P\left(1+\frac{a}{g}\sin\alpha\right)=\frac{P}{g}a\cdot\cos\alpha$

$$\therefore\quad f_{min}=\frac{a\cos\alpha}{g+a\sin\alpha}。$$

375〔212〕．为了使列车对铁轨的压力垂直于路基，在铁道弯曲部分外轨要比内轨稍为提高。试就以下的数据求外轨高于内轨的高度h。轨道的曲率半径为$\rho=300$m，列车的速度为$v=12$m/s，内外轨道间的距离为$b=1.6$m。



题375〔212〕附图

解：将列车视为质点（质量集中在质心上），其上受有重力P和路基的反力N，质心以曲率半径ρ作平面曲线运动。取自然轴系，由动力学基本方程 $\frac{P}{g}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N}$。

其投影方程为

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{\rho}=N\sin\alpha \qquad (2)$$

$$0=N\cos\alpha-P \qquad (3)$$

由（3）式，　$N=\frac{P}{\cos\alpha}$。代入（2）得

$$\frac{v^2}{g\rho}=\mathrm{tg}\alpha。$$

$\because$　α很小，　$\therefore$　$\mathrm{tg}\alpha\approx\sin\alpha=\frac{h}{b}$。

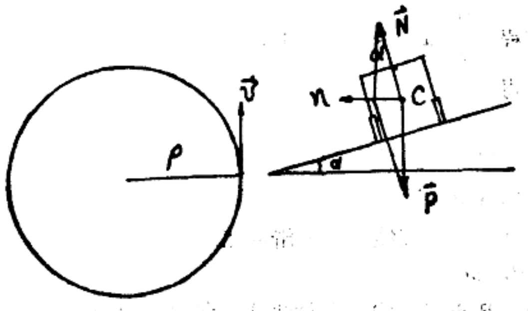
此时　$\frac{v^2}{g\rho}=\frac{h}{b}$，

$$\therefore\quad h=\frac{bv^2}{g\rho}=\frac{1.6\times12^2}{9.8\times300}=0.0784(\mathrm{m})=7.84(\mathrm{cm})。$$

376．汽车以等速度v沿曲率半径为ρ的圆弧路面拐弯。欲使两轮的垂直压力相等，问路面的斜角α应为多少度？

解：取汽车为对象，其上受有重力P和斜面对车轮的反力N_1、N_2。当两轮的垂直反力相

等时，其合力 N垂直于斜面，且通过质心C，因此作用在汽车上的力可视为作用在质心C的重力 P和反力 N。



题376附图

由动力学基本方程 $\frac{P}{g}\,\mathbf{a}=\mathbf{P}+\mathbf{N}$

分别向主法线和付法线方向投影：

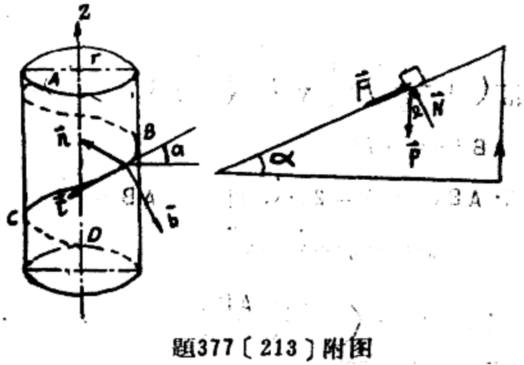
$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{\rho}=N\sin\alpha$$

$$0=N\cos\alpha-P$$

解此方程组得 $\frac{P}{g}\frac{v^2}{\rho}=P\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\therefore\quad \alpha=\mathrm{arctg}\,\frac{v^2}{\rho g}。$$

377〔213〕．质点重P，在半径为 r的圆柱面上沿螺旋线的槽滑动，运动的切向加速度为



题377〔213〕附图

$$a_\tau=g\sin\alpha,$$

其中 α 为螺旋线的切线与水平面的交角。求由于质点的运动使柱面绕其几何轴转动的力矩M。

解：取质点M为对象，其上受有重力 P、螺线槽对质点的法向反力 N和切向反力 F，质点沿螺线槽运动，其切向加速度已知为$a_\tau = g\sin\alpha$。取自然轴系。

由动力学基本方程 $\frac{P}{g}a = P + F + N$。

向 τ 轴和 b 轴投影，得

$$\frac{P}{g}\cdot g\sin\alpha = P\sin\alpha - F \qquad (1)$$

$$0 = P\cos\alpha - N \qquad (2)$$

由（1）式得 $F = 0$， 即螺线槽为光滑约束。

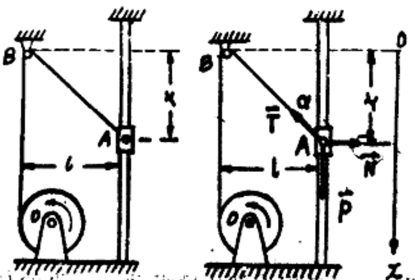
由（2）式得 $N = P\cos\alpha$。

由作用与反作用定律，质点对螺线槽在付法线方向的压力为

$$N' = N = P\cos\alpha。$$

$$\therefore \quad M_z = M_z(\overline{N'}) = rN'\sin\alpha = rP\cos\alpha\sin\alpha = \frac{Pr}{2}\sin 2\alpha。$$

378. 套管A重P，因受绳子牵引沿铅垂直杆向上滑动。绳子另一端绕过离杆距离为l的滑车B而缠在鼓轮上。当鼓轮转动时，其边缘上各点的速度的大小为v_0。求绳子拉力和距离 x 之间的关系。



题378附图

解：取套筒A为对象，其上受有重力 P、张力 T和反力 N，其运动微分方程为

$$P - T\cos\alpha = \frac{P}{g}\ddot{x},$$

$$T = \frac{P}{\cos\alpha}\left(1 - \frac{\ddot{x}}{g}\right) = \frac{P}{g}\sqrt{1 + \left(\frac{l}{x}\right)^2}\,(g - \ddot{x})。 \qquad (A)$$

下面求$\ddot{x}$： ∵ $\overline{AB}^2 = x^2 + l^2$

两边对 t 求导， $2\cdot\overline{AB}(-v_0) = 2x\cdot\dot{x}$， 即 $-v_0\overline{AB} = x\dot{x}$

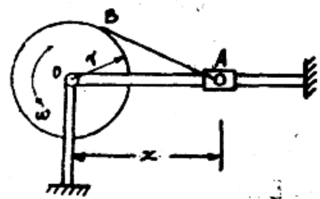
两边再对 t 求导， $(-v_0)(-v_0) = \dot{x}^2 + x\ddot{x}$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{v_0^2 - \dot{x}^2}{x} = \frac{v_0^2 - \left(\dfrac{-v_0\cdot\overline{AB}}{x}\right)^2}{x}$$

$$= \frac{v_0^2(x^2 - \overline{AB}^2)}{x^3} = \frac{-l^2v_0^2}{x^3} \qquad (B)$$

以（B）代入（A）：　$T=\frac{P}{g}\sqrt{1+\left(\frac{l}{x}\right)^2}\left(g+\frac{l^2v_0^2}{x^3}\right)$。

379. 滑块重P，因绳子的牵引沿水平导轨滑动，绳子的另一端缠在半径为r的鼓轮上，鼓轮以等角速ω转动。不计导轨摩擦，求绳子的拉力T和距离x之间的关系。



解：取套筒A为对象，其上受有重力P、张力T和反力N。

由牛顿第二定律

$$T\cos\phi=\frac{P}{g}a_A,\quad \therefore T=\frac{P}{g}\frac{a_A}{\cos\phi}$$

下面来求套筒的加速度a_A。

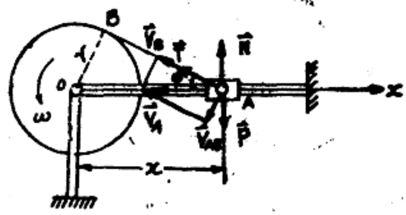
取绳子AB为对象作平面运动，$v_B=r\omega$。

取B点为基点，　$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{BA}$

由速度平行四边形得

$$v_A=\frac{v_B}{\cos\phi}=\frac{r\omega}{\cos\phi},$$

$$v_{AB}=v_B\operatorname{tg}\phi,\quad \omega_{AB}=\frac{v_{AB}}{AB}=\omega\operatorname{tg}^2\phi。$$



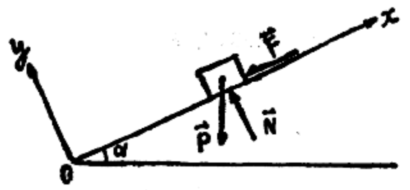
题379附图

$$a_A=\frac{dv_A}{dt}=\frac{r\omega\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}=\frac{r\omega\sin\varphi}{\cos^2\phi}\omega_{AB}=r\omega^2\frac{\sin^3\phi}{\cos^4\phi}$$

$$\therefore\quad T=\frac{P}{g}\frac{a_A}{\cos\phi}=\frac{P}{g}\frac{r\omega^2\sin^3\phi}{\cos^5\phi}=\frac{P}{g}\frac{r\omega^2\cdot\left(\frac{r}{x}\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{x}\right)^5}$$

$$=\frac{P}{g}\frac{r^4\omega^2x^2}{(x^2-r^2)^{5/2}}。$$

380〔214〕. 质点M沿斜面上升，斜面与水平面成α＝30°角，在开始时质点的速度等于15m／S，质点与斜面之间的动摩擦系数f'＝0.1。问此质点在停止前，走了多少路程？经过多少时间？



题380附图

解：取质点M为对象，其上受有重力P、反力N和摩擦力F作用，质点沿斜面作直线运动。在质点运动的起始位置O作坐标系oxy，运动的初始条件为　$x_0=0$　$\dot{x}_0=15m/s$。

由动力学基本方程　$\frac{P}{g}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{P}$