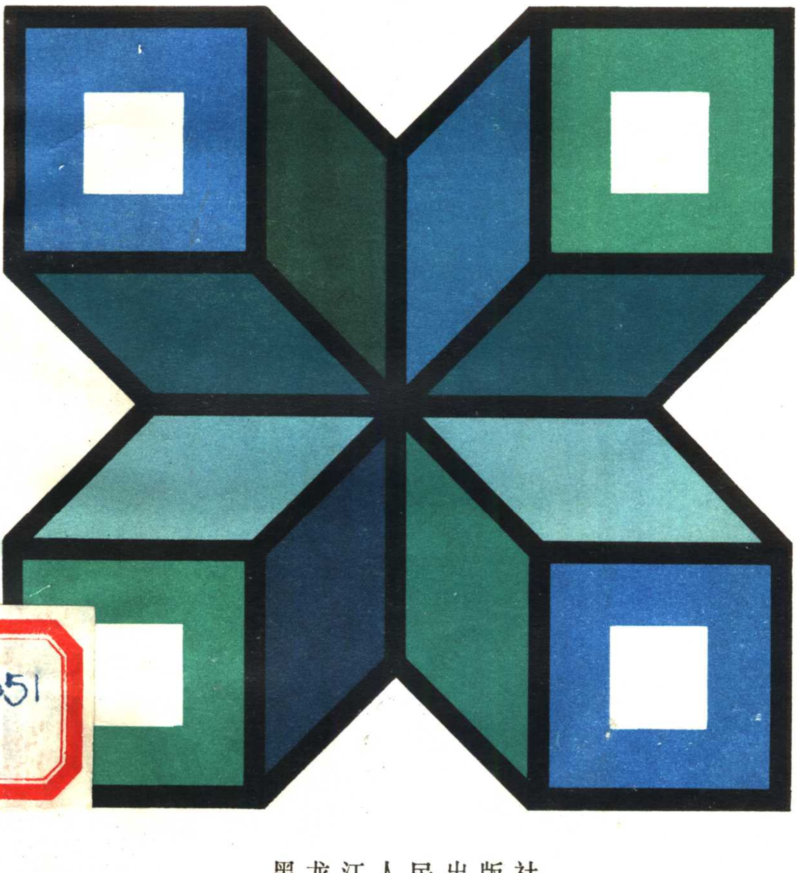
详解

中学数学公式集

第 1 集



黑龙江人民出版社

详　解
中学数学公式集
第 1 集

[日] 樫本昌彦　著
蔡沛生　洪永祥　译

黑龙江人民出版社
1981年·哈尔滨

くわしく　わかる

中学一年数学公式集

——応用と活用——

むさし書房版

责任编辑：汤　潮
校　　订：白景凯

详解中学数学公式集

第 1 集

桎本昌彦　著　　蔡沛生　洪永祥　译

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32・印张 3・字数55,800
1981年7月第1版　　1981年7月第1次印刷
印数 1—106,500

统一书号：13093・43　　　定价：0.24 元

译 者 的 话

我们翻译的《中学数学公式集》，是樫本昌彦先生按照日本最新中学教学大纲精选编著的。它包括了初中代数、几何等内容，还有概率、统计、集合和测绘方面的初步知识。全书共分三册，第一册分为九章，第二、三册各分为八章，每章若干节，每节总结若干条重要内容、定理和公式。各节之后的【应用】都是典型题目的详细解法，解法之后又用“→”号指出所使用的重要定理和公式。对于中学生巩固提高数学课程，对于准备升学考试都有一定的指导作用。可做为中学生和社会青年等自学数学的良师益友，也是一本较好的教学参考书。

本书在翻译过程中，由于时间紧迫，水平有限，错误是在所难免的，恳切希望读者指正。

译 者

1980.7.29

内 容 提 要

《中学数学公式集》共分三册，是桎本昌彦先生根据日本新教学大纲精选编著的。内容包括：1 数、式　2 函数　3 图形　4 证题方法　5 集合　6 概率与统计等。

本书，内容集中，讲解系统，便于理解记忆，对于加深理解中学数学课程，对于升学考试复习，都具有一定的指导作用，是中学生和教师，以及社会青年自学的良师益友，也是一本较好的数学教学参考书。

目 录

第一章 整数的性质

第二章 正数、负数

第三章 字母和代数式

第四章 方程式

第五章 函数关系

第六章　空间图形

第七章　满足条件的点的集合与作图

第八章　图形的计算与近似值

第九章　集　合

第一章　整数的性质

1—1　约数和倍数　(1)

【1】　商和余数　24能被3整除，其商是8，余数是0。19不能被3整除，其商是6，余数是1。象这样，当整数除以整数时，有能整除和不能整除的两种情况。

上面的两个例子可以做如下表示。

$$24=3\times8+0\qquad19=3\times6+1$$

同样，当a除以b，商是c而余数为d时，就可以用下式表示。

$$a=b\times c+d\qquad(0\leqq d<b)$$

【2】　约数和倍数　有a、b两个整数，当a能被b整除而商为c时，即，$a=b\times c$时，就把b叫做a的约数，把a叫做b的倍数。比如，15能被3整除，所以3是15的约数，15是3的倍数。

这里重要的是：因为任何整数都能被1整除，所以1是所有整数的约数。又因为任何整数乘以0其结果都是0，所以0是所有整数的倍数。

$$a=1\times a\qquad0=b\times0$$

【应用】 1　整数a除以8，商是6余数是7。求a是多少？

解法　$a=8\times6+7=55$　→【1】

2　某个整数除以6出现了余数，其余数可能是几？

解法　因为该余数是大于零而小于除数的整数，所以它只能是1、2、3、4、5之中的某一个数。　→【1】

3　写出12的所有约数。再写出100以内的所有的12的倍数。

解法　因为$12=1\times12$、$12=2\times6$、$12=3\times4$，所以12的约数是1、2、3、4、6、12。

又因，$0=12\times0$、$12=12\times1$、$24=12\times2$、$36=12\times3$、$48=12\times4$、$60=12\times5$、$72=12\times6$、$84=12\times7$、$96=12\times8$，所以100以内的所有的12的倍数是0、12、24、36、48、60、72、84、96。　→【2】

4　在三位整数中，6的倍数有多少个？

解法　三位数的整数是从100到999。

因为$100=6\times16+4$、$999=6\times166+3$，所以，假设6的倍数为$6\times x$，x就只能是$16<x\leqq166$。因而，$166-16=150$

150个　→【1】【2】

5　在三位整数中，求出8的最小倍数和最大倍数。

解法　$100=8\times12+4$　因而104能被8整除。

又，$1000=8\times125$　因而992能被8整除。

最小的三位整数倍是104，最大的三位整数倍是992。

→【1】【2】

1—2 约数和倍数 （2）

【3】 倍数的判断方法

① 2的倍数 只要末位数字是2的倍数，该数就是2的倍数。

例 38、70……8、0是2的倍数。

② 3的倍数 只要各个数位上数字之和是3的倍数，该数就是3的倍数。

例 471……$4+7+1=12$

12是3的倍数。

③ 4的倍数 只要最后两位数是4的倍数，该数就是4的倍数。

例 3228……28是4的倍数。

④ 5的倍数 只要末位数字是5的倍数，该数就是5的倍数。

例 370、1985……0、5是5的倍数。

⑤ 9的倍数 只要各个数位上数字之和是9的倍数，该数就是9的倍数。

例 873……$8+7+3=18$

18是9的倍数。

⑥ 11的倍数 只要偶数位上数字之和与奇数位上数字之和相减之差是0或者是11的倍数，该数就是11的倍数。

例 1056……$1+5=6$，$0+6=6$ $6-6=0$

869……$8+9=17$ $17-6=11$

⑦ 25的倍数 只要最后两位数是25的倍数，该数就是25的倍数。

例 175、100……75、0是25的倍数。

【应用】 下列数中，哪些是4的倍数，哪些是12的倍数？

84、683、2251、500、1032、236、187

解法 84、500、1032、236是4的倍数。从4的倍数中再选出3的倍数，就是12的倍数。因而，84、1032是12的倍数。

→【3】中的②③

1—3 质因数分解 （1）

【1】 **质数** 6有1、2、3和6四个约数。而2只有1和2两个约数。3也只有1和3两个约数。象2和3这样，只有两个约数的数叫做质数。

【2】 **质因数分解** 把一个整数表示为若干个质数之积的形式，叫做对该数进行质因数分解，被分解成的质数叫做质因数。

【3】 **乘方和指数** 我们往往把7×7写成7^2,把7×7×7写成7^3。又把7^2读作7的二次方（平方），把7^3读作7的三次方。像7^2、7^3、7^4……这样，把表示若干个7相乘的运算叫做乘方，并用小字写在7的右上角表示7的相乘个数。

这种表示7的相乘个数的数就叫做指数。

例 把120进行质因数分解，用乘方的形式来表示就是：

$$120 = 2\times2\times2\times3\times5 = 2^3\times3\times5$$

2^3←指数

【应用】 1 下列数中哪些是质数？

33、35、37、39、41、43、45、47、49

解法 37、41、43、47 →【1】

2 把72进行质因数分解，并用乘方的形式表示出来。

解法 $72 = 2\times2\times2\times3\times3$

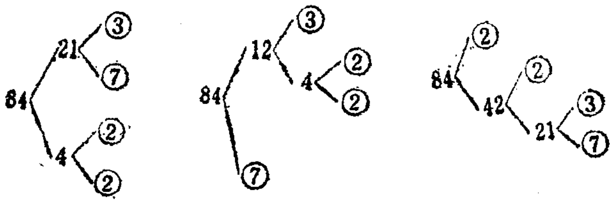
$= 2^3\times3^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

→【2】【3】

1—4 质因数分解 (2)

【4】 质因数分解的一致性 把某整数进行质因数分解时，无论按怎样的顺序进行，其结果都一样。我们把它称做质因数分解的一致性。



【5】 质因数分解和约数的个数 把28进行质因数分解就变成 $28=2^2\times7$。2^2 的约数是 1、2、2^2 三个，7 的约数是 1、7 两个。因而 28 的约数的个数是 $3\times2=6$(个)。约数如下表所示。

	1	2	2^2
1	1	2	4
7	7	14	28

一般来说，当把整数 a 进行质因数分解，变成 $a=b^n\times c^m$ 时，a 的约数的个数就是 $(n+1)(m+1)$ 个。

【应用】 1 把 36 的所有约数求出来。

解法 $36=2^2\times3^2$

结果如右表所示

	1	2	2^2
1	1	2	4
3	3	6	12
3^2	9	18	36

2 648 的约数是多少个？

解法 $648=2^3\times3^4$

因而 648 的约数是 $(3+1)\times(4+1)=20$(个) →【5】

1—5 公约数和公倍数 (1)

【1】 **公约数** 两个以上的整数的共同约数就叫做它们的公约数。下面我们把 24 和 32 的约数分别全部列出来看一下。

24 的约数是 1、2、3、4、6、8、12、24。

32 的约数是 1、2、4、8、16、32。

上面的情况使我们看到，在 24 与 32 的约数中，相同的约数有 1、2、4、8，它们就是 24 与 32 的公约数。

【2】 **公倍数** 两个以上的整数的共同倍数，就叫做它们的公倍数。下面我们列出 4 的倍数与 6 的倍数来看一下。

4 的倍数：0、4、8、12、16、24、28……。

6 的倍数：0、6、12、18、24、30、36……。

在 4 的倍数与 6 的倍数中相同的是 0、12、24……，它们就是 4 与 6 的公倍数。

【3】 **最大公约数和最小公倍数**

① 在公约数中，最大的就叫做最大公约数。因为最大公约数的英文写法是 Greatest Common Measure，所以往往缩写成 G. C. M。

② 在公倍数中，除零以外的最小的公倍数就叫做最小公倍数。因为最小公倍数的英文写法是 Least Common Multiple，所以往往缩写成 L. C. M。

【应用】 **1** 求出 24 和 36 的所有公约数。

解法 1、2、3、4、6、12 →**【1】**

2 在 6 和 9 的公倍数中，找出比 50 小的所有公倍数。

解法 0、18、36。 →**【2】**

1—6 公约数和公倍数 (2)

【4】 **最大公约数(G. C. M)的求法** 在各个数的共同质因数中，把次数最少的提取出来，进行连乘，所得乘积即为最大公约数。

$$
\begin{array}{rl}
 & 36 = 2\times2\times3\times3 \\
 & 60 = 2\times2\quad\times3\times5 \\
\hline
\text{最大公约数}\cdots\cdots & 2\times2\quad\times3 = 12
\end{array}
$$

在这种情况下，也可以采取把各个数进行质因数分解的办法，象右式那样来提取因数。

$$
\begin{array}{r|rr}
② & 36 & 60 \\
\hline
② & 18 & 30 \\
\hline
③ & 9 & 15 \\
\hline
 & 3 & 5
\end{array}
$$

【5】 **最小公倍数(L. C. M)的求法** 在各个数的共同质因数中，把次数最多的都提取出来，再把各个数单独具有的质因数也提取出来，进行连乘，所得乘积即为最小公倍数。

$$
\begin{array}{rl}
 & 24 = 2\times2\times2\times3 \\
 & 36 = 2\times2\quad\times3\times3 \\
\hline
\text{最小公倍数}\cdots\cdots & 2\times2\times2\times3\times3 = 72
\end{array}
$$

在这种情况下，通过右式的办法，也可以得到其所有因数。

$$
\begin{array}{r|rr}
② & 24 & 36 \\
\hline
② & 12 & 18 \\
\hline
③ & 6 & 9 \\
\hline
 & ② & ③
\end{array}
$$

【6】 **最大公约数与公约数的关系**

公约数是最大公约数的约数。

【7】 **最小公倍数与公倍数的关系**

公倍数是最小公倍数的倍数。

【应用】 1　求 36 与 90 的最大公约数和最小公倍数。

解法　$36 = 2^2 \times 3^2$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

最大公约数是 2×3^2，即 18，

最小公倍数是 $2^2 \times 3^2 \times 5$，即 180。

2　有一张长 130cm、宽 90cm 的长方形纸。现在要把这张纸剪成若干个同样大小的正方形。若使所剪裁的正方形尽可能地大些，正方形的一边应该是多少厘米(cm)？这样的正方形能剪裁出多少个？

解法　因为 130 与 90 的最大公约数是 10，$13 \times 9 = 117$，因而，可剪裁出一边是 10cm 的正方形 117 个。

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 130 & 90 \\ \hline 2 & 26 & 18 \\ \hline & 13 & 9 \end{array}$$

→【4】

3　求 48、72、120 的全部公约数。

解法　$48 = 2^4 \times 3$、$72 = 2^3 \times 3^2$、$120 = 2^3 \times 3 \times 5$，因而，48、72、120 的最大公约数是 $2^3 \times 3 = 24$

因为公约数是最大公约数的约数，所以求出 24 的约数也就是它们的全部公约数。即：1、2、3、4、6、8、12、24。 →【6】

4　求一个最接近 400 的数，条件是这个数被 12、18、24 除时，余数都是 3。

解法　从比 12、18、24 的公倍数还大 3 的数中，找出最接近于 400 的那个数。

它们的最小公倍数是 $2^3 \times 3^2 = 72$。在 72 的倍数中，接近 400 的数有 360 与 432 两个，在这两个数上分别加上 3，把 363 与 435 两个数相比较，435 更接近于 400。因而所求的数是 435。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 18 & 24 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 12 \\ \hline 3 & 3 & 9 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

→【5】【7】

第二章　正数、负数

2—1　正数、负数　(1)

【1】　**正数与负数**　比零大的数叫做**正数**，用“+”号来表示。比零小的数叫做**负数**，用“-”号来表示。

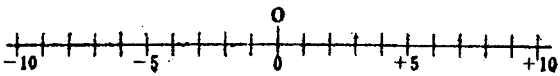
+8 是表示比 0 大 8 的数，读做正 8。

-8 是表示比 0 小 8 的数，读做负 8。

【2】　**正、负数的应用**　在我们周围的事物中，有很多象温度、时间、高度等具有相反意义的量。对于这些具有相反意义的量，如果一方用正数表示，另一方就要用负数来表示。

例　如果 500 元的盈利用 +500 元来表示，那么 500 元的亏损就可以用 -500 元来表示。

【3】　**数轴**　可以使正数、负数与直线上的点相对应。使正数、0 与负数如下图那样对应的直线就叫做**数轴**。直线上的基准点 0 叫做**原点**。



【应用】　1　把下面的数用“+”、“-”号表示出来。

(A)　比 0 小 6 的数　　(B) 比 0 大 8.5 的数。

解法　(A) -6　　(B) +8.5　　→【1】

2　说明从学校向北 -5 公里的地方是什么意思?

解法　是从学校向南 5 公里的地方。　　→【2】

2—2 正数、负数 (2)

【4】 数的大小 如果把数在数轴上表示出来的话，其数就可以全部按大小的顺序排列起来，越往右的数越大。数轴的右方叫做**正的方向**，数轴的左方叫做**负的方向**。

负数＜0＜正数

【5】 正号、负号 表示正数的“+”号叫做正号，表示负数的“-”号叫做负号。

【6】 绝对值 在数轴上，表示+8和-8的点与原点的距离都一样，这就是说+8和-8的绝对值都是8。一般地把在数轴上表示数a的点与原点的距离叫做a的**绝对值**，用$|a|$来表示。所谓数的绝对值，可以认为就是去掉了符号的数。

【7】 绝对值与数的大小 正数大于0，其绝对值越大该数越大。负数小于0，其绝对值越大该数越小。

【应用】 1 从小到大依次排列下列各数。

$$-2、0.8、-\frac{2}{3}、0、1.8、-0.5$$

解法 $-2, -\frac{2}{3}, -0.5, 0, 0.8, 1.8$ →【4】

2 回答下列问题。

(*A*) 当$|x|=8$时，求x的值。

(*B*) 求$|x|<3$的x值。

解法 (*A*) -8、$+8$ (*B*) -2、-1、0、$+1$、$+2$。 →【6】