

孤立子

郭柏灵 著
苏凤秋



辽宁教育出版社

数学传播丛书

孤 立 子

中国数学会数学传播委员会审定

郭柏灵 苏凤秋 著

图书在版编目 (CIP) 数据

孤立子/郭柏灵, 苏凤秋著. —沈阳: 辽宁教育出版社, 1998. 8

(数学传播丛书)

ISBN 7-5382-4031-4

I. 孤… II. ①郭… ②苏… III. 孤立子—普及读物 IV. 0572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 13286 号

辽宁教育出版社出版

(沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001)

沈阳七二一二工厂印刷 辽宁省新华书店发行

开本: 787×1092 毫米 1/32 字数: 200 千字 印张: 10¹/₂ 插页: 2

印数: 1—1 000 册

1998 年 8 月第 1 版

1998 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 杨 力 潭  责任校对: 李 笑
封面设计: 沈 放

定价: 13.50 元

内 容 简 介

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分，在流体力学、等离子体物理、经典场论、量子论等领域有着广泛的应用，随着近代物理学和数学的深入研究，在最近 20 多年中，它得到了迅速的发展。

本书对孤立子的若干最基本概念，如物理背景、反散射方法、Hirota 方法、Bäcklund 变换、对称性、Painlevé 性质、孤立子的相互作用等作了尽可能通俗的、简单明了的介绍，并列举了它的一些应用。

本书适合于高校中的师生，对数学、物理爱好者，以及有关研究人员学习参考。

Abstract

The soliton theory is an important branch of applied mathematics and mathematical physics. It has important applications in fluid mechanics; nonlinear optics, classical and quantum field theories etc. In recent more 20 years, It obtains very quickly development along with the deep investigations of modern physics and mathematics.

This book gives simple and easy reviews of some basic ideas, such as physical backgrounds, inverse scattering method, Hirota method, Symmetry, Bäcklund transformations, Painlevé properties, the interactions between solitons. Several applications are sketched.

The book has been written mainly for the teacher and students, and researcher who interested in mathematics and physics.

序 言

随着近代物理学和数学的发展，早在 1834 年由英国科学家 Russell 发现的孤立波现象近二十多年来引起人们极大的关注，对这一现象的兴趣与日俱增。这是因为，一方面孤立子具有非常独特的性质，它们在相互作用中保持稳定的波形，这种具有粒子和波的许多性能的孤立子，在自然界中有一定的普遍性，至今从数值计算、理论分析和物理实验等方面都已证实，许多学科领域，如流体力学，等离子体物理，非线性光学，凝聚态物理，超导物理，经典场论和量子场论等存在着孤立子以及与孤立子理论密切相关的重要问题。利用孤立子理论已经成功地解释了许多物理上长期用经典理论未能得到解答的现象，在应用上，如利用孤立波来改进信号传输系统，提高其传输率等也已取得了可喜的进展。另一方面，随着孤立子物理问题的深入研究，孤立子的数学理论也应运而生，并已初步形成比较完整的理论体系。例如：把求解非线性偏微分方程精确地化为求解若干个线性方程的散射反演法，即一定程度上的非线性问题的傅立叶方法；Bäcklund 变

换和 Daboux 变换等一系列求非线性偏微分方程特解的方法，用李群和微分流形建立起来的结构延拓法等，它们和经典分析，泛函分析，李群，李代数，无穷维代数，微分几何（有限维和无穷维），代数几何，拓扑学，动力系统和计算数学等数学分支的研究紧密相关，相互促进。

近十年来，孤立子理论得到了国际上数学界和物理学界的充分关注，研究工作十分活跃，范围日趋广泛，每年都有相关的国际学术会议，已出版了一些专著，此外还有各种会议录和论文集，而在各种杂志上发表的论文，其数量是非常大的。编写这本书的主要目的是想对孤立子的基本问题和它的数学物理方法作一比较通俗的简要的介绍。除了有关孤立子问题的最基本的知识和概念外，也介绍了一些令人感兴趣的方面和问题。限于篇幅，我们对孤立子的问题虽然不能作深入的阐述，但我们仍然希望本书有助于读者从浩瀚的著作文献中，理出一些虽然比较粗糙但却足够清晰的线索，从而当读者对某一方面的问题发生兴趣时，就可在阅读有关文献的基础上开展研究工作。由于有关孤立子的理论问题涉及的知识面十分广泛，且限于作者的水平，在比较深入浅出的介绍中，难免存在不妥或错误之处，敬请读者提出宝贵的意见。

作 者

1993 年 3 月 9 日



作者简介

郭柏灵,男,1936年生人,1958年毕业于复旦大学数学系,毕业后留校任教。1963年由上海调入北京应用物理和计算数学研究所工作至今。1980年以来,从事非线性发展方程及其孤立子解、数值解的研究,在国内外重要杂志上发表论文一百多篇,并有《孤立子》、《粘性消去法和差分格式的粘性》、《非线性演化方程》等专著,现为北京应用物理与计算数学研究所研究员、应用数学博士导师、中国数学会理事。



作者简介

苏凤秋,女,1964年生人,1985年毕业于陕西师范大学数学系,毕业后即到广西大学数学系任教。1988年考取北京应用物理与计算数学研究所硕士研究生,硕士毕业论文题目为《具导数非线性Schrödinger方程的整理解》(用散射反演法证明),1991年考取北京应用数学与计算数学研究所应用数学博士研究生,曾为该所硕士研究生开设“孤立子”课程,并对散射反演法及其在偏微分方程理论中的应用作了深入的研究。

目 录

序言

第一章 孤立子的历史回顾	1
§ 1 罗素的发现	1
§ 2 KdV 方程	2
§ 3 KdV 方程的孤立子解	4
§ 4 克鲁斯卡尔的发现	9
第二章 孤立子的重要特征及其相互作用	12
§ 1 孤立子及其重要特征	12
§ 2 孤立子的相互作用及 $t \rightarrow \infty$ 的渐近性质	15
第三章 孤立子的物理背景	23
§ 1 非线性 Schrödinger 方程及其孤立子解	23
§ 2 等离子体中的孤立子	28
§ 3 凝聚态物理学中的孤立子	40
第四章 孤立波的存在性和稳定性	49
§ 1 KdV 方程孤立子的稳定性	50
§ 2 多维孤立子的存在性	56
§ 3 多维孤立子的稳定性和坍塌	76
§ 4 孤立波的轨道稳定性	83

第五章 散射反演方法	93
§ 1 正散射问题	94
§ 2 反散射问题	109
§ 3 KdV 方程初值问题的解	116
§ 4 AKNS 方程	132
§ 5 AKNS 方程特征值问题的正散射 与反散射问题	140
§ 6 用反散射方法求 AKNS 方程 的解	154
§ 7 高阶散射反演问题	160
第六章 Hirota 方法	172
§ 1 引言	172
§ 2 D 算子的某些性质	175
§ 3 双线性偏微分方程的解	179
§ 4 在 Sine-Gordon, MKdV 等方程 中的应用	181
§ 5 双线性形式的 Bäcklund 变换	191
第七章 Bäcklund 变换和无穷守恒律	195
§ 1 由来和定义	195
§ 2 一类非线性进化方程的 Bäcklund 变换	201
§ 3 KdV 方程的 B 变换可换性	210
§ 4 Benjamin-Ono 方程的 Bäcklund 变换	213
§ 5 KdV 方程的无穷个守恒律	220
§ 6 AKNS 方程的无穷多个守恒律	223

第八章 对称及其应用	229
§ 1 对称	229
§ 2 对称与守恒量	235
§ 3 Bäcklund 变换和对称	239
§ 4 对称和孤立子解	248
§ 5 对称与李代数结构	259
第九章 无穷小变换和 Painlevé 性质	264
§ 1 古典无穷小变换	265
§ 2 无穷小算子的李代数结构	285
§ 3 非经典的无穷小变换	289
§ 4 求相似解的一种直接方法	294
§ 5 某些偏微分方程的 Painlevé 性质	309
参考文献	320

Contents

Introduction

Chapter 1 The historical background	1
§ 1 Russell's discovery	1
§ 2 KdV equation	2
§ 3 The soliton solution of KdV equation	4
§ 4 Kruskal's discovery	9
Chapter 2 The important characters of the soliton and their interactions	12
§ 1 The solitons and their important characters	12
§ 2 The interactions between the solitons and the asymptotic behavior as $t \rightarrow \infty$	15
Chapter 3 The physical background of solitons	23
§ 1 Nonlinear Schrödinger equation and its soliton solution	23
§ 2 The soliton in plasma	28
§ 3 The soliton in condense matter	

physics	40
Chapter 4 The existence and stability of the	
solitary waves	49
§ 1 The stability of the solitons for KdV equation	50
§ 2 The existence of the solitons in multidimensions	56
§ 3 The stability and collapse for the solitons in multidimensions	76
§ 4 The orbital stability for solitary waves	83
Chapter 5 The inverse scattering method	93
§ 1 Scattering problem	94
§ 2 Inverse Scattering problem	109
§ 3 Solutions of the initial value problem for KdV equation	116
§ 4 AKNS equation	132
§ 5 The scattering problem and inverse scattering problem for AKNS equations	140
§ 6 Solving the AKNS equation by inverse scattering method	154
§ 7 The inverse scattering problem with higher order	160
Chapter 6 Hirota method	172
§ 1 Introduction	172

§ 2	Some properties of D operator	175
§ 3	The solution for the partial differential equations with bilinear form	179
§ 4	The applications in Sine—Gordon, MKdV equations	181
§ 5	Bäcklund transformation with bilinear form	191
Chapter 7 Bäcklund transformation and infinite many conservative laws		
		195
§ 1	Origin and definition	195
§ 2	The Bäcklund transformation for one class of nonlinear evolution equation	201
§ 3	The commutations of Bäcklund transformation for KdV equation	210
§ 4	Bäcklund transformation for Benjamin—Ono equation	213
§ 5	Infinite many conservative laws for KdV equation	220
§ 6	Infinite many conservative laws for AKNS equation	223
Chapter 8 Symmetry and its applications		
		229
§ 1	Symmetries	229
§ 2	Symmetry and conservative	

	quantities	235
§ 3	Bäcklund transformation and symmetry	239
§ 4	Symmetry and soliton solution	248
§ 5	Symmetry and the structure of Lie algebra	259
Chapter 9 Infinitesimal transformation and Painlevé properties		
§ 1	Classical infinitesimal transformation	265
§ 2	The structure of Lie algebra for infinitesimal operator	285
§ 3	Nonclassical infinitesimal transformation	289
§ 4	A direct method to solving the similar solutions	294
§ 5	Painlevé properties for some partial differential equations	309
	References	320

第一章 孤立子的历史回顾

§ 1 罗素的发现

1834 年，英国科学家司各特·罗素 (Scott. Russell) 偶然观察到一种奇妙的水波。1844 年，他在《英国科学促进协会第十四届会议报告》上发表的《论波动》一文中，对此现象作了生动的描述：“我观察过一次船的运动，这条船被两匹马拉着沿狭窄的河道迅速前进着，突然，船停了下来，而被船所推动的大堆水却并不停止，它们积聚在船头周围激烈地扰动着，然后水波突然呈现出一个滚圆而平滑，轮廓分明的巨大孤立波峰，它以很快的速度向前滚动着，急速地离开了船头。在行进中它的形状和速度并没有明显的改变。我骑在马上紧跟着观察，它以每小时八九英里的速度滚滚向前，并保持长约 30 英尺，高约 1—1.5 英尺的原始形状。渐渐地它的高度下降了，当我跟踪 1—2 英里后，它终于消失在逶迤的河道之中。”这就是罗素观察到的奇特现象，进而他认为这种孤立的波动是流体运动的一

个稳定解，并称之为“孤立波”。罗素当时未能成功地证明并使物理学家们信服他的论断，从而埋怨数学家未能从已知的流体运动方程揭示出这一结果。在此之后，有关孤立波的问题在当时的许多物理学家中引起了广泛的争论。

§ 2 KdV 方程

1895 年，柯特维格 (Korteweg) 和德佛累斯 (de Vries) 的论文提出了一个数学模型方程，他们的用意之一就是为司各特·罗素所观察到的现象提供解释。方程的原始形式如下：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\} \quad (2.1)$$

其中， x 是沿一维河道的变量， t 是时间， $\eta(x, t)$ 是高于平衡水平面的波峰高度， l 为水深， g 是重力加速度， α 是与液体均匀运动有关的常数， σ 是由

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 \frac{Tl}{\rho g} \quad (2.2)$$

定义的常数， T 是毛细现象的表面张力， ρ 为液体密度。

方程 (2.1) 就是通常所说的柯特维格—德佛累斯方程，简称 KdV 方程。

作为一个模型方程，从被发现起，KdV 方