

SHUXUEZONGHETIDENEIRONGYUFANGFA



数学综合题的内容与方法

数学综合题的内容与方法

孙连书 项昭义 蔡云涛编著

河南人民出版社

数学综合题的内容与方法

孙连书 项昭义 蔡云海编著

责任编辑 温 光

河南人民出版社出版

河南省焦作市印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 15.875印张 306千字

1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷

印数：1——8,300册

统一书号7105·276 定价1.15元

序

数学综合题是由数学中各学科或某一学科多方面的知识综合而成的。解综合题要应用各方面的知识和技能。通过解综合题可以把中学学过的代数、几何、三角、解析几何等各部分数学知识和各种数学方法融汇贯通，起到复习和提高的作用；同时能培养综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力。

本书作者根据多年教学经验，在积累大量数学综合题资料的基础上，写成此书。笔者荣幸地学习了本书的原稿，感到这本书的最大特点是对解题思路的分析和具体解法的阐述详尽而具有启发性，这对于广大高中学生，特别是自修青年学习解数学综合题，是一定会有很大的帮助的。

翟连林

1981年8月于北京

前 言

究竟什么是数学综合题？学习与研究它有什么意义？数学综合题都包括哪些内容和主要类型？怎样解答数学综合题？我们写这本书的目的，就是想回答这些问题的。当然，这仅仅是一次尝试和初探。

我们认为，对于数学综合题，可不必过多地研究它的类型，因为类型只是问题的不同表达形式，而研究和学习解答数学综合题的方法，才是问题的实质。因此，本书的重点是第三章“怎样解答数学综合题”。

解答数学问题的方法虽然没有固定的模式，但在熟练掌握“双基”的基础上，总还是可以发现和掌握某些解题规律的。在第三章里，我们列举了各种类型的综合题，并且每个题都写了“思考方法”或“解法要点”。我们试图通过这两个环节，使读者能获得一些解答数学综合题的方法和技能方面的规律性的东西。

在编写过程中，承蒙河南师大数学系副主任黄懋德副教授和郑州大学数学系方程教研室主任杨振德副教授热情指导；本书写成后，又承蒙北京广播电视大学翟连林讲师认真反复修改、提出很多指导性的宝贵意见，并热情为本书写序。在此，我们一并表示感谢。

由于我们的水平所限，不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

孙连书 项昭义 蔡云涛

一九八一年九月于郑州

目 录

第一章 数学综合题的内容.....	(1)
第一节 什么叫数学综合题.....	(1)
第二节 数学综合题的类型.....	(7)
第二章 数学综合题的意义.....	(10)
第三章 怎样解答数学综合题.....	(12)
第一节 代数综合题.....	(12)
第二节 几何综合题.....	(98)
第三节 三角综合题.....	(217)
第四节 代数与几何综合题.....	(280)
第五节 代数与三角综合题.....	(318)
第六节 几何与三角综合题.....	(385)
第七节 代数、几何与三角综合题.....	(422)
练习题.....	(476)

第一章 数学综合题的内容

第一节 什么叫数学综合题

在中学数学中,我们把综合运用各科基础知识(也可以是一科或二科的基础知识)和基本技能来解的数学题目叫做数学综合题。综合题涉及的面比较广,运用的知识比较多,它的内容可以包括数学各科(代数、几何、三角等)的基础知识和基本技能(也可以是一科的),如果把一个数学综合题拆开来,也无非是几个相关的简单的数学题目。通过下面的例题,我们来分析数学综合题所包含的基础知识和基本技能。

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的两边 a 、 b 的量数是方程 $5x^2 - 28x + 35 = 0$ 的两个根,其夹角 C 的平分线的长为2,求 $\triangle ABC$ 的面积 S 及其外接圆半径 R 。

这是一个关于代数、几何和三角的综合题,如果把它拆开来,它是由下面四个相关的小题组成的:

- (1) 求二次方程的两个根;
- (2) 求夹角 C 的 $\frac{1}{2}$ 的正弦;
- (3) 求三角形的面积 S ;
- (4) 求外接圆的半径 R 。

通过下面的解题过程，可以看出解这个综合题所运用的基础知识和基本技能。

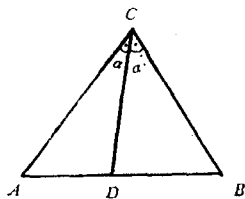


图 1

〔解〕 $\because a, b$ 是方程 $5x^2 - 28x + 35 = 0$ 的两个根，则由韦达定理知

$$\begin{cases} a+b=\frac{28}{5}, \\ ab=7. \end{cases}$$

设 $\angle C = 2\alpha$ ，所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} ab \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} ab \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= ab \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

又 $\angle C$ 的平分线 $CD=2$ ，则

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC} \\ &= \frac{1}{2} b \cdot CD \sin \alpha + \frac{1}{2} a \cdot CD \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot CD (a+b) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 (a+b) \sin \alpha \\ &= (a+b) \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\therefore ab \sin \alpha \cos \alpha = (a+b) \sin \alpha.$$

而 α 为锐角，则 $\sin \alpha \neq 0$ 。上式两边同除以 $\sin \alpha$ ，得

$$ab \cos \alpha = a+b.$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{a+b}{ab} = \frac{\frac{28}{5}}{7} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{又 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = (a+b) \sin \alpha = \frac{28}{5} \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{9}{25}.$$

由余弦定理, 得

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha \\ &= (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos 2\alpha) \\ &= \left(\frac{28}{5}\right)^2 - 2 \times 7 \times 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{336}{25}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } c = \frac{4}{5} \sqrt{21}.$$

$$\text{又 } c = 2R \cdot \sin C = 2R \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\therefore R = \frac{c}{2 \sin 2\alpha} = \frac{c}{2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\frac{4}{5} \sqrt{21}}{2 \times 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}} = \frac{5}{12} \sqrt{21}.$$

这个综合题运用了下面的一些基础知识和基本技能: 韦达定理、角平分线的概念、三角形二边与夹角的正弦面积公式、正弦的二倍角公式、三角形内角的概念、同角三角函数

的基本性质、余弦定理和正弦定理等。

例 2 已知关于 x 的二次方程

$$(\sin \theta + 1)(x^2 - x) = (\sin \theta - 1)(x - 2)$$

的根是实根，且两根的绝对值相等，符号相反，取其中 x 的正值。

求 $\log_2 x^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}$ 的值。

观察此题，这是一个关于代数和三角的综合题，如果把它拆开来，它是由下面三个相关的小题目组成的：

(1) 求关于 x 的二次方程的正根；

(2) 求无穷等比数列前 $n+1$ 项的和 $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ ；

(3) 求对数的值。

通过下面的解题过程，可以看出解这个综合题所运用的基础知识和基本技能。

〔解〕 将原方程化为关于 x 的标准二次方程

$$(\sin \theta + 1)x^2 - 2\sin \theta \cdot x + 2(\sin \theta - 1) = 0.$$

因已知二次方程有两个不相等的实根，所以方程中二次项的系数不等于 0，即 $\sin \theta + 1 \neq 0$ ；又因为两个根是绝对值相等而符号相反的实数，所以方程中一次项的系数等于 0，即 $\sin \theta = 0$ 。因此原二次方程又可以化为：

$$x^2 - 2 = 0.$$

它的根是 $x = \pm \sqrt{2}$ ，正根 $x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ 。

$$\text{设 } S = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

在这个等比数列中,

首项 $a_1=1$, 公比 $q=\frac{1}{2}$, 末项 $a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$,

$$\begin{aligned}\therefore S &= \frac{a_1 - a_{n+1}q}{1-q} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

将方程的正实根 $x=2^{\frac{1}{2}}$ 与等比数列前 $n+1$ 项的和分别代入对数式中, 得

$$\begin{aligned}\log_2 x^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}} \\ &= \log_2 2^{\frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \log_2 2 \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

这个综合题运用了下面一些基础知识和基本技能:

方程变形、根与系数的关系、解不完全二次方程、分数指数概念、等比数列前 $n+1$ 项求和公式、对数运算法则和基本性质等。

例 3 已知 $(x^{\lg x} + 1)^n$ 展开式最后三项的系数和是方程

$3^{y^2} \cdot 9^{-10y} \cdot 81^{-11} = 1$ 的正数解, 而它的中项是方程 $3\sqrt{\frac{z}{2}} =$

$100 + \sqrt{2z}$ 的解, 求 x .

这是一个关于代数的综合题. 如果把它拆开来, 它是由下面五个相关的简单数学题组成的:

- (1) 解关于 y 的指数方程;
- (2) 求二项式的项数 n ;
- (3) 解关于 z 的无理方程;
- (4) 求二项展开式的中项;
- (5) 解关于 x 的对数方程.

通过下面的解题过程, 可以看出解这个代数综合题所运用的基础知识和基本技能.

$$[\text{解}] \quad \because 3^{y^2} \cdot 9^{-10y} \cdot 81^{-11} = 1,$$

$$\text{则 } 3^{y^2} \cdot 3^{-20y} \cdot 3^{-44} = 1,$$

$$\Rightarrow 3^{y^2-20y-44} = 1,$$

$$\text{因而 } y^2 - 20y - 44 = 0.$$

$$\text{解得 } y = 22 \text{ 或 } y = -2 \text{ (舍去负根)}.$$

$$\therefore y = 22 \text{ 为最后三项的系数和.}$$

$$\text{又, 依题意有 } C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 22,$$

$$\text{即 } 1 + n + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 22$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 42 = 0,$$

$$\text{解得 } n = 6 \text{ 或 } n = -7 \text{ (舍去负根)}.$$

$$\therefore \text{二项式的指数 } n = 6.$$

$$\text{又由 } 3\sqrt{\frac{z}{2}}=100+\sqrt{2z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2z}=100 \Rightarrow 2z=40,000,$$

$$\therefore z=20,000.$$

又由通项公式, 从 $(x^{\lg x}+1)^6$ 得

$$T_4=C_6^3(x^{\lg x})^3=20,000,$$

$$\text{即 } \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{3 \lg x}=20,000$$

$$\Rightarrow x^{3 \lg x}=1000.$$

取对数, 得 $3 \lg x \cdot \lg x=3$, 即 $\lg^2 x=1$

$$\Rightarrow \lg x=\pm 1.$$

$$\therefore x=10, \text{ 或 } x=0.1.$$

这个综合题运用了下面的一些基础知识和基本技能:

指数的概念、幂的运算法则、解指数方程、二项式定理、组合公式、解一元二次方程、解无理方程、通项公式、常用对数和对数运算法则、解对数方程等。

第二节 数学综合题的类型

数学综合题一般分为两类, 一类是数学各科本身的综合题, 另一类是数学两个学科或两个以上学科的综合题。

初等数学各科本身的综合题, 包括关于代数的综合题、关于三角的综合题和关于几何的综合题。这类综合题对本学

科的知识能起到综合概括和沟通的作用。

初等数学两个学科或两个以上学科的综合题，包括下面四种情况：

1. 关于代数与几何的综合题。这种综合题常常是通过下列几种形式出现的：

- (1) 要用代数方程或方程组来解的几何题；
- (2) 几何元素是代数方程的根的证明题；
- (3) 三角形的边与角或多面体的棱与有关线段间的等差数列和等比数列问题；
- (4) 用二次三项式或不等式进行计算或证明的几何题；
- (5) 有关面积、体积、周长用代数方法进行计算或证明的问题；

(6) 有关线段、角、面积、体积、周长的极值问题等。

2. 关于代数与三角的综合题，常常是通过下列形式出现的：

- (1) 系数是三角函数的二次方程问题；
- (2) 有关三角函数的不等式问题；
- (3) 有关对数、指数的三角函数与反三角函数的问题；
- (4) 有关三角函数的等差、等比问题；
- (5) 有关三角函数的极值问题等。

3. 关于几何与三角的综合题，这种综合题常常有以下形式出现：

- (1) 有关用三角知识解几何题的问题；
- (2) 利用三角函数来表达的线段及面积问题；
- (3) 有关测量和解三角形的问题等。

4. 关于代数、几何与三角的综合题。这种综合题大多涉

及代数方程、多边形与圆、正弦定理和余弦定理、三角函数的恒等变换、三角方程、等差数列、等比数列、极值等基础知识。

值得注意的是综合题不一定都表现在题目的形式上，而很多时候是体现在解题的过程中。由于有些题目有多种解法，所以综合题的所谓类型也不是一成不变的。

第二章 数学综合题的意义

学习和研究数学综合题有什么意义？我们认为有下面几点：

1. 学习和研究数学综合题能广泛地复习和巩固数学各科的基础知识。我们知道，要想学好数学，必须要深刻地理解和牢固地掌握基础知识，通过解答综合题，经常复习基础知识，就能起到巩固的作用。

2. 学习和研究数学综合题，能综合运用各科知识，提高解题能力。综合题的特点，就是它所具备的知识内容和解题方法，不单纯是一个概念、一个公式、一个法则、一种方法的运用，而是必须经过一定的恒等变形过程，联系较多的各科基础知识和不同方法的运用。

3. 学习和研究数学综合题，能有效地发展逻辑思维和提高了分析能力。综合题涉及的面比较广，内容比较复杂，必须深思熟虑地把所要求解的或求证的结论与已知条件联系起来，找出其间相互制约的关系，从而明确什么途径可走，其根据是什么。因此必须积极思维，集中全力寻求一切可用的各科基础知识。并以辩证的观点进行逻辑分析，从而使逻辑思维能力和全面分析问题的能力得到进一步的发展和提高，也就是能起到培养和发展智力的作用。

4. 学习和研究数学综合题，能培养积极钻研的精神和克