平面几何习题类型和解法

高考复习参考丛书

高考复习参考丛书

平面几何习题类型和解法

苏继昌　王志亭　孙金铭

甘肃人民出版社

[redacted]

苏继昌　王志亭　孙金铭

甘肃人民出版社出版

（兰州庆阳路230号）

甘肃省新华书店发行　　兰州新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张6.875　字数100,000

1980年3月第1版　　1980年3月第1次印刷

印数：1——120,300

书号：13096·51　　定价：0.48元

出版说明

《高考复习参考丛书》是为了帮助参加高考的青年复习时参考用的，也可作为在校高中学生课外阅读和社会青年自学的参考读物。

这套丛书，主要是根据教育部新编中学各学科教学大纲（征求意见稿）的要求，并参考近两年来全国高考复习大纲和全国高考试题而编写的，将按高中各学科分政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语等几个方面分册陆续编辑、出版。在编写体例上，有的本子以解题为主；有的本子则以讲述基础知识为主，附有部分题解。

我们编辑、出版这类读物还没有经验，缺点和错误在所难免，希望广大读者提出指正意见，以便不断修改，使其日臻完善。

前　　言

本书以中学数学教学大纲（草案）中所列的平面几何内容为依据，综合了现行中学课程的内容，按习题类型（证明题、计算题、作图题）加以介绍，可供高中学生、知识青年和中学教师参考。

根据我们的教学体会，本书选编了比较典型的例题179个，作了详细的证明或解答；并在每类例题的前面，概述了此类习题的一般解法；对技巧性较强和相互有关联的例题，书中在“注意”里给予了分析；每部分后面都附有习题，共计173个，供读者自己练习。我们试图通过这种方式，介绍证（解）题的一般步骤和方法，以帮助读者巩固平面几何的基本概念，进一步提高分析习题的能力和解题技巧。

由于我们的思想和业务水平有限，特别是本书的编写方法，还是一种尝试。书中的缺点错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

编　者

1979年9月

目　录

第一部分　证 明 题

几何命题都是由“题设”（已知）和“结论”（求证）两部分构成的．证明几何题，就是根据题设，应用公理、定义、已证的定理，按逻辑推理来判断结论的正确性．这种推理过程叫做证明．

证明的方法，分直接证法和间接证法两种．

直接证法就是直接由题设出发进行证明，得到所求的结论．本书大多数例题，采用直接证法．

间接证法又分为反证法和同一法．反证法就是证明原命题的逆否命题成立．具体地说，就是假定原命题的结论不真，依此通过逻辑推理，引出矛盾，从而证明原命题的结论正确．如果原命题结论的反面只有一种情况，那只须把这一种情况驳倒，就达到了证明的目的，这种较单纯的反证法，叫做归谬法；如果原命题结论的反面不止一种情况，就得把每种情况都驳倒，才能确定原命题结论的正确，这种较繁的反证法，叫做穷举法．

同一法就是在一定条件下证明原命题的逆命题成立．具体证法，请参看题11的“注意”．能用同一法证明的命题，也可用反证法证明，但能用反证法证明的，不一定能用同一法．

不论直接证法，还是间接证法，证明过程都是逻辑推理的过程．推理的方法，分演绎法和归纳法．

演绎法就是用已知的普遍结论来推断某个个别的结论的正确性，即由一般到特殊的推理方法．归纳法就是用某些个别的结论来推断普遍的结论，即由特殊到一般的推理方法．几何命题的证明，基本上都采用演绎法．

我们证明题时，需要思考、探索证明的途径．思索的方法，也就是思维的方法，按思路的顺逆可分为综合法和分析法．综合法就是由题设出发，逐步引导到结论；分析法就是由结论出发，逐步倒推到题设．

在证题过程中，往往是综合法和分析法结合运用，以探索证题的途径，然后，按综合法采用演绎推理的形式记述证明过程。

几何证题没有统一的“证题术”可循，也没有什么“绝招”．作为学习方法，有两点值得提出：

（1）提高解题能力的根本途径，是既要深刻理解和牢固掌握基本的概念、定理和公式，还要钻研和熟悉证明这些定理和公式的方法（包括辅助线的引法）．也就是说，不仅要记住结论，还要掌握推证结论的方法，在某种意义上，方法比结论更重要．因为这些基本定理和公式的推证方法，既有教材的系统性、科学性的问题，又为我们提供了最基本最重要的证题法．舍此去寻求“证题术”是舍本求末．因此，我们在许多问题上尽可能地运用或联系了课本中基本定理的证明方法．

（2）对命题进行符合规律性的变化、引伸和发展，分析命题间的相互关系和内在联系，有助于所学知识的融会贯通，有助于扩展证题方法，提高分析问题和解决问题的能力．因此，我们对一些例题，或是作了变形、引伸和发展；或是讨

论其特殊情况；或是通过联系对比，分析命题间的相互关系和内在联系。例如题5，它的变形就是1978年全国数学竞赛题，它本身是重心定理的引伸发展，又是乘比定理（题56）和牛顿线(题68)的特殊情况。上述这些定理和命题的条件、结论和证法，虽然各不相同，但它们有一定的内在联系，钻研这样的问题是很有教益的。

证题时应注意的几点：

（1）仔细审题，弄清题意；分清已知和求证；搞清题中的每个概念。

（2）画出正确的图形。特别注意不要把图形特殊化。如已知$\triangle ABC$，就要画一般三角形，不要画成直角的或等边的特殊三角形。

（3）不仅要充分利用已知条件，还要利用图形，透过所给的概念，联系有关的定义、定理，发掘隐含的条件。

（4）选引适当的辅助线。

为了综合应用所学的基础知识和基本技能，本章的例题按求证分为七个类型：证相等，证平行、垂直，证定值、定向，证不等，证点共线、点共圆，证比例，证面积；另外，增附有关垂心和垂足三角形的问题、综合题，共为九个部分。各部分之间没有严格的连贯性，如在第一部分证相等的例题中，已用到四点共圆、面积等问题。

一　证线段或角相等

这部分包括证明两线段、两角、两圆相等的问题；证明线段或角的和、差、倍、分问题；证明具有某些条件的点（或线段）构成正三角形、正方形等特殊图形的问题。

证明两线段和两角相等的问题，是几何证题的最基本的问题．证明线段平行、垂直、不等，以及证明四点共圆、三点共线、相似形等各类问题，大多转化为证明线段或角的相等，所以它是证明其他各类问题的基础，必须熟练掌握．同时，其他各类问题又被用来证明线段或角的相等，因此，证明相等的问题内容广泛，证法繁多．下面仅提出一些最常用的方法：

1.最基本的证法是利用全等三角形．即把所要求证的两线段或两角，利用适当的辅助线或利用全等变换，分别放置在两个三角形中，再证这两个三角形全等．如题3、14、17等．

2.利用等量代换．如要证$a=b$，但不容易直接找到a、b间的关系，可找与a、b关系较明显的第三量c，然后证明即可．或者，找两个量证明$a=c$，$b=d$，再证$c=d$．在代换法中，常利用等边三角形、等腰三角形、平行四边形、正多边形等的性质，以及三角形或梯形中位线的定理，圆周角定理，弦切角定理，直角三角形斜边上中线的定理等选取第三量．如题1、2、3．

3.利用比例．用相似形或比例线段的定理，引入比例关系，并使比例中出现：$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$或$\frac{a}{b}=1$，则$a=b$，如题5．

4.证明一线段等于另一线段的倍(分)或两线段的和(差)的问题，一般利用截长补短法、代换法等，转化为证明两线段相等的问题，如题2．

5.利用三角函数、正弦定理等证明两线段、两角、两圆相等，对某些题比纯几何的方法较简便，如题15、16等．

题1　在$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$，D为BC的中点，AH为BC上的高，则$DH=\frac{1}{2}AC$．

证　取AB的中点M，连DM、HM．则

$DM \perp\!\!\!= \frac{1}{2}AC$，

$\therefore$　$\angle MDB = \angle C$

$= 2 \cdot \angle B$.

又　$\because$　MH为直角$\triangle AHB$的斜边AB上的中线，

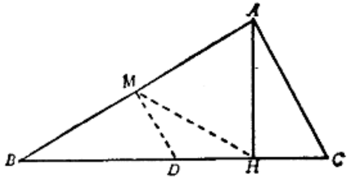

图　1—1

$\therefore$　$MH = MB$，　　$\angle MHB = \angle B$.

在$\triangle DMH$中，$\angle DMH = \angle MDB - \angle MHB = \angle B$.

$\therefore$　$\angle DMH = \angle DHM$，

$\therefore$　$DH = DM = \frac{1}{2}AC$.

题2　如果P是正$\triangle ABC$外接圆的劣弧BC上的任一点，求证：$PA = PB + PC$.

证1　如图1—2，在PA上截取$PD = PB$，

$\because$　$\angle P = \angle C = 60°$，

连接BD，

则$\triangle PDB$是正三角形.

$\therefore$　$BD = BP$，

又$AB = BC$，

$\angle ABD = 60° - \angle DBC$

$= \angle CBP$.

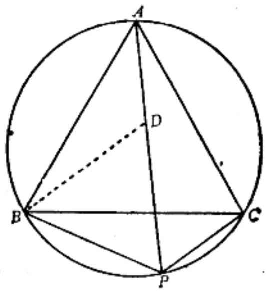

图　1—2

$\therefore$　$\triangle BPC \cong \triangle BDA$，$PC = DA$，

$\therefore PA = PB + PC$.

证 2　如图1—3，延长PB到D，使$BD=PC$。

∵　A、B、P、C 共圆，

∴　$\angle ABD=\angle ACP$，

∴　$\triangle ABD\cong\triangle ACP$，

$AD=AP$，

∵　$\angle APD=\angle C=60°$，　　∴$\triangle APD$是正三角形。

∴　$AP=PD=PB+PC$。

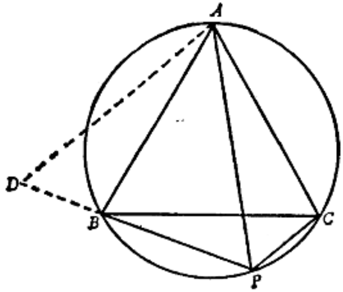

图　1—3

注意　本题证 1 是截长，证 2 是补短，实质是一致的。截长补短是证明一线段等于两线段（或几条线段）的和时，常用的方法。

截长补短法也用于证明一线段等于另一线段的两倍（或几倍）。这时，可以把较长的折半，或者把较短的加倍，如下题：

题 3　求证：三角形的任一顶点与垂心间的距离等于外心到这顶点的对边的距离的二倍。

证　设H、O分别为$\triangle ABC$的垂心和外心。OM为O到BC的距离。

为了证明此命题的普遍性，将$\triangle ABC$分为锐角、钝角、直角三角形，分别证明如下：

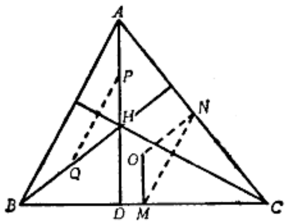

图　1—4

一、当$\triangle ABC$为锐角三角形时，给出以下四种证

·法：

1.如图1—4，连接AH、BH的中点PQ，作$ON \perp AC$，则ON平分AC；连接MN.

则 $MN \perp\!\!\!\!= PQ \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AB$， $\therefore \triangle MON \cong \triangle PHQ$，

$\therefore \quad OM = HP = \frac{1}{2}AH$.

2.如图1—4， $\because \triangle MON \backsim \triangle AHB$，

$\therefore \quad \frac{OM}{AH} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$， 即$OM = \frac{1}{2}AH$.

3.如图1—5，取CH的中点R，连接MR、NR，则四边形$OMRN$为平行四边形.

$\therefore \quad OM = RN = \frac{1}{2}AH$.

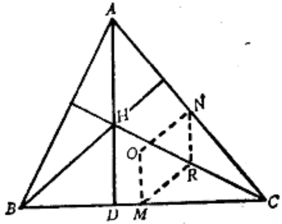

图 1—5

4.如图1—6，作$\triangle ABC$的外接圆的直径BK，连接CK、AK，则四边形$AHCK$为平行四边形.

$\therefore \quad OM = \frac{1}{2}KC$

$= \frac{1}{2}AH$.

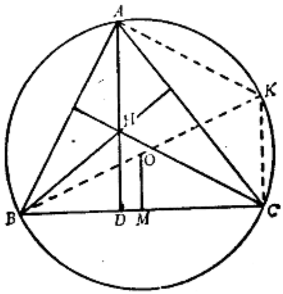

图 1—6

二、当$\triangle ABC$为钝角三角形时，设$\angle A$为钝角，此时垂心

H和外心O都在$\triangle ABC$之外，但仍有类似于一的各种证法，简述如下：

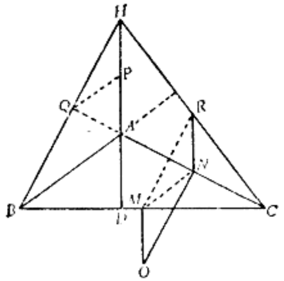

图　1—7

1.如图1—7，

$\because\quad \triangle MON\cong\triangle PHQ$，

$\therefore\quad OM=PH=\frac{1}{2}AH$。

2.如图1—7，

$\because\quad \triangle MON\backsim\triangle AHB$，

$\therefore\quad \frac{OM}{AH}=\frac{MN}{HB}=\frac{1}{2}$，

即　$OM=\frac{1}{2}AH$。

3.如图1—7，四边形$ONRM$为平行四边形，

$\therefore\quad OM=NR=\frac{1}{2}AH$。

4.如图1—8，作外接圆的直径BK，则有$\square KCHA$，

$\therefore\quad OM=\frac{1}{2}KC$

$=\frac{1}{2}AH$。

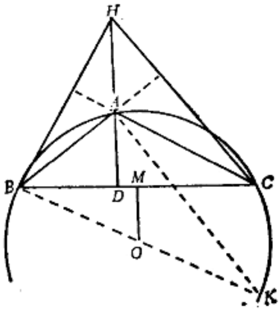

图　1—8

三、当$\triangle ABC$为直角三角形时，设$\angle A$为直角，如图1—9．此时，H与A重合，O即为BC的中点M。

$\therefore \quad OM=\frac{1}{2}AH$

$=0$，同时，

$ON=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}BH$；

$OP=\frac{1}{2}CA=\frac{1}{2}CH$.

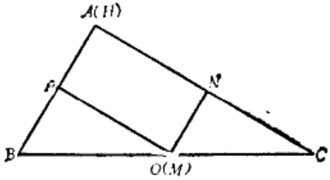

图 1—9

所以命题对直角三角形也正确.

注意 从本题来看，虽然三角形的类型不同，垂心的位置不同，但结论有普遍性；而对于有些命题，结论可能不同，如下题.（较系统的讨论，可参看本部分第八个问题。）

题4 $\triangle ABC$的垂心为H，外接圆半径为R，如果$AH=R$,则$\angle A=60°$或$120°$.

证 当$\triangle ABC$为锐角三角形时，外心O在三角形内. 作$OD\perp BC$，则

$$OD=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}R$$

$=\frac{1}{2}OC$ （由上题知）.

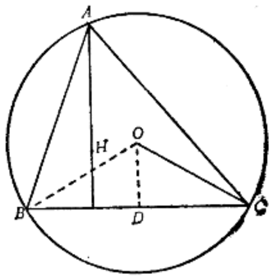

图 1—10

$\therefore \quad \angle OCD=30°$，

$\angle COD=60°$.

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle COD=60°.$$

当$\triangle ABC$为钝角三角形，$\angle A$为钝角时，O在三角形

外，如图 1—11．作外接圆直径BE．则

$$BE=2R,$$

$$EC=AH=R,$$

$$\therefore\quad \angle E=60^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle A=180-\angle E=120^\circ.$$

当$\triangle ABC$为直角三角形时，如图 1—12，$\angle C$为直角，则H与C重合．

$$\therefore\quad AC=R=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore\quad \angle A=60^\circ.$$

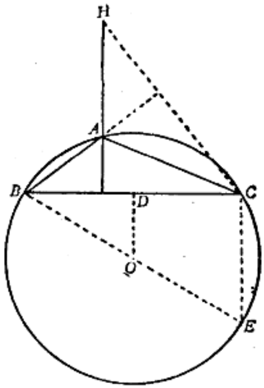

图 1—11

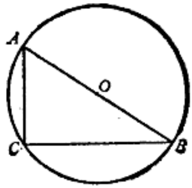

图 1—12

题 5　一直线与$\triangle ABC$的两边AB、AC相交于D、E，并且$DE\parallel BC$，设CD与BE相交于F，AF与BC交于M，求证：AM平分BC．