

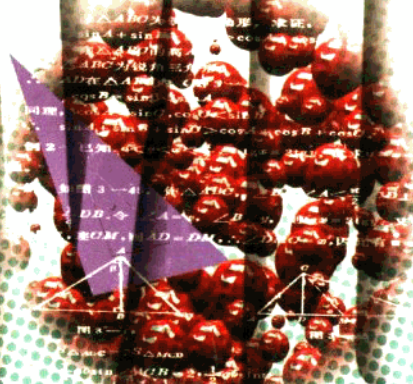
中学生精典文库

OLYMPIAD

初中数学奥林匹克的方法与技巧

CHUZHONG SHUXUE AOLINPIKE
DE FANGFA YU JIQIAO

张求诚 编著



湖南教育出版社



中学生精典文库

初中数学奥林匹克 的方法与技巧

张求诚 编著

湖南教育出版社

初中数学奥林匹克的方法与技巧

张求诚 编著

责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168 毫米 32 开 印张：11.375 字数：280000

1992 年 5 月第 1 版 1999 年 7 月第 2 版第 3 次印刷

印数：15001-18500

ISBN 7-5355-1425-1/G·1420

定价：13.50 元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

序

当今，各种层次的数学竞赛已经成为大家十分熟悉的一项智力竞赛活动。它不仅引起了广大中学师生越来越浓厚的兴趣，而且也日益得到全社会的重视，因为实践证明：数学竞赛对于促进中学数学教学、提高青少年数学水平、发现和培养人才，确实有着非常重要的作用。数学竞赛的内容虽然同样限于初等数学的各个部分，但在广度、深度上显然与一般的中学数学教学有着很大的区别。因此，为了使参赛者创造好的成绩，除了依靠广大中学师生的努力之外，还需要一支高水平的教练队伍和一套介绍解答竞赛题所需的理论、方法和技巧的读物。湖南教育出版社集中我省关心数学竞赛的有经验的专家、教授、教师，把他们长期积累起来的资料分专题整理，出版了《数学奥林匹克的理论、方法、技巧》一书。该书出版之后，深受广大读者欢迎，一年之间，竟两次重印。在图书平均印数徘徊不前的今天，实在是令我们数学工作者感到十分欣慰的。但是，《数学奥林匹克的理论、方法、技巧》一书是为高中学生编写的，对初中学生还缺乏相应的读物。湖南教育出版社有鉴于此，于是，又组织了几位有经验的作者，编写了这本《初中数学奥林匹克的方法与技巧》，可以说是前书的姊妹篇。内容包括整数的基本知识、代数、平面几何和非规范题等内容，与当前初中数学竞赛的命题热点相吻合。这对于促进初中数学竞赛活动的开展，提高初中学生的数学素质，无疑是十分有益的。

数学是一门基础学科，学习数学不仅是数学知识的积累，更重要的是数学能力的培养；而数学竞赛，归根到底，是智慧、能

力和技巧的竞赛。本书的作者正是在这种认识的基础上，不但对他们所论专题的基本内容进行系统的讲述，而且特别注意思路的分析、方法的训练和技巧的培养。深入浅出而富于启发性使本书显示出自己的特色。学习数学，要有一种敢于拼搏的顽强的精神，需要付出艰辛的劳动，但随之而来的却是成功的喜悦和数学美的感受！认真地阅读本书，你将会领略到学习和研究数学的种种甘甜辛苦。初中是打基础的阶段，我衷心希望，同学们能在初中阶段培养起学习数学的兴趣，打下坚实的基础。学好了数学，我们无论将来从事哪一方面的工作，都会受益无穷。

我们中华民族从来就是一个擅长数学的民族。祖冲之、祖暅、刘徽、杨辉、沈括……历代数学家的名字将永留史册，他们的卓越贡献将永放光彩。更可喜的是一代新人也正在茁壮成长。自1986年我国首次参加国际中学生数学竞赛以来，短短的几年间取得了举世瞩目的成就。年轻的中学生们为祖国赢得了荣誉，使我们感到欢欣鼓舞。但是也应该看到，我国现在的数学水平与国际数学发展的主流相比还有相当大的差距，要在不久的将来使我国跻身于世界数学大国的行列，还需要付出极大的努力。立志献身数学的青少年同学们应该为实现这个宏伟的目标而努力奋斗！

侯振挺

目 录

绪论 怎样解数学竞赛题	(1)
§ 1 解数学题的一般步骤	(1)
一、解题的步骤要求 (1) 二、解题的探索过程 (5)	
§ 2 探索解题方向的一些方法	(8)
一、观察 (8) 二、类比 (10)	
三、猜想 (11) 四、特殊化 (13)	
五、分类 (15)	
§ 3 再谈几种常用的解题策略	(17)
一、考虑极端情形 (17) 二、利用对称原理 (18)	
三、寻找出不变量 (21) 四、从反面看问题 (22)	
五、画张图列个表 (24) 六、学点构造本领 (25)	
七、不可轻视配凑 (27)	
第一章 整数的性质	(31)
§ 1 整数的基本知识	(31)
一、整除性 (31) 二、奇数和偶数 (36)	
三、平方数 (38) 四、最大公因数和最小公倍数 (41)	
五、质数与合数 (44) 六、同余式 (49)	
七、二元一次不定方程 (52) 八、高斯函数 (55)	
§ 2 常见的与整数有关的竞赛题型	(62)
一、数谜问题 (63) 二、整除问题 (68)	
三、不定方程 (73) 四、形形色色的杂题 (77)	
第二章 代数	(88)
§ 1 数、式运算的常用技巧	(88)
一、有理数和无理数 (88) 二、因式分解 (94)	

三、求式的值 (100)	四、证恒等式或条件等式 (110)
§ 2 换元法.....	(116)
一、分解因式中的换元 (116)	二、证明题中的换元 (118)
三、解方程中的换元 (122)	四、换元法解其他题 (127)
§ 3 其他常用方法	(130)
一、待定系数法 (130)	二、配方法 (134)
三、判别式法 (137)	四、消元法 (141)
五、韦达法 (144)	六、数形结合法 (146)
§ 4 应用问题解法举例	(151)
第三章 几何	(162)
§ 1 解几何题的一般分析方法	(162)
一、轨迹问题 (163)	二、作图问题 (165)
三、极值问题 (167)	
§ 2 各类几何证明题的常用证法	(172)
一、证相等 (173)	二、证不等 (179)
三、证垂直与平行 (185)	四、证点共线、线共点 (188)
五、证点共圆和圆共点 (194)	六、证定值 (196)
§ 3 几种特殊证法	(200)
一、面积证法 (201)	二、代数证法 (207)
三、反证法 (211)	
§ 4 几何计算	(215)
一、线段计算 (216)	二、面积计算 (224)
第四章 非常规问题	(234)
§ 1 基本原理和常用方法	(234)
一、极端原理 (234)	二、抽屉原理 (236)
三、容斥原理 (245)	四、有序化方法 (250)
五、分类讨论方法 (253)	六、赋值方法 (256)
七、逐步调整方法 (258)	
§ 2 染色问题与染色方法	(263)
一、小方格染色问题 (263)	二、线段染色问题 (266)

三、点染色问题	(268)
§ 3 覆盖问题	(271)
一、基本概念与定理	(271)
二、几类覆盖问题	(273)
§ 4 逻辑推理问题	(287)
一、穷举推理方法	(287)
二、探索推理方法	(289)
三、列表推理方法	(290)
四、计算推理方法	(291)
五、作图推理方法	(292)
第五章 选择题的常用解法	(298)
一、直接法	(298)
二、排除法	(301)
三、特殊值法	(305)
四、验证法	(307)
五、分析法	(309)
六、反推法	(312)
七、图解法	(314)
八、观察法	(316)
九、归纳推理方法	(319)
练习题解答与提示	(331)

绪论 怎样解数学竞赛题

竞赛题不同于数学课本中的练习题，初中数学竞赛试题的特点是需要的数学知识并不超越初中数学教程的范围，但它的构思巧妙，形式新颖，不拘于现成的格式，解答起来确有一定的难度。所以本书特设一章与同学们谈谈解题方法。

§ 1 解数学题的一般步骤

一、解题的步骤要求

大体上说，可以把解数学题的一般过程分为以下几个步骤：

第一步 仔细审查题意，发掘概念内涵；

第二步 比较分析条件，探求解题途径；

第三步 综合运用知识，进行推理计算；

第四步 回顾解题过程，总结解题经验。

审题是解题的起点，也是解题中最主要的一环。一道题中涉及到许多数学概念，在审题时首先要弄清这些概念的含义，然后分清哪些是已知的条件，哪些是要证的结论。条件和结论之间有什么联系？过去是否见过类似的题型？条件和结论是否可以换一种办法来表达？问题可否向较易于求解的方向转化等等，尽可能地画一张草图，以便于观察分析。

审题之后，紧接着就是探索解题的途径，这是关系到解题成败的最重要一环。也是我们这一章讨论的重点。

找到正确的解题途径之后，就进入第三步——正式解题。前

两步是思考、分析过程，虽然重要，但一般不要求写出来。只有正式解题的推理计算是需要写出来的。书写有一定的格式，要求逻辑严谨，计算准确，层次分明，详略恰当，语言通顺，图形规范。

解完一道题之后，我们还要强调加上总结经验这一步。千万不要以为一个题目解出来了就万事大吉，这样很难提高我们的解题能力。每解完一题，要回顾一下解题过程，考虑如下一些问题：

1. 寻找解题方法遇到的最大障碍是什么？产生障碍的原因何在？突破难点的关键是什么？

2. 与过去做过的习题比较，这道题可归入哪一类？解这类题的基本方法是什么？解题时用到了与以往不同的新方法吗？

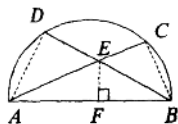
3. 本题还有别的解法吗？相对地说，哪一种解法最好？

4. 这个问题能否推广、变化？

下面举例加以说明。

例 1 如图绪—1，设 AB 是半圆的直径， AC 和 BD 两弦相交于 E ，求证：

$$AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD.$$



图绪—1

第一步 审题.

先画出图形，本题的条件和结论都比较简单清楚，审题并不困难。题中涉及到半圆、相交弦、直径等概念，我们首先要对这些概念进行一些联想，它们有哪些基本的内涵。

(1) 半圆内的弓形角 $\angle ADB$ 、 $\angle ACB$ 都是直角；

(2) 因为是直角，根据勾股定理有 $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2$ 。

(3) 题中涉及到线段 AE 、 BE 、 AB ，在 $\triangle ABE$ 内有 $AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE \cdot BE \cos \angle AEB$ 。

(4) 圆内相交弦涉及圆幂定理： $BE \cdot ED = AE \cdot EC$ 。有了这些准备，我们就可以开始探求解法。

第二步 探求解题途径.

从结论 $AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD$ 看, 等式的左边是单项式, 而右边是二项式, 因此左边必定可以拆开成两项使它们和右边的两项分别相等. 反映在图形上, 说明 AB 上必有一点 F , 使得

$$AB^2 = AB(AF + FB) = AB \cdot AF + AB \cdot FB,$$

且满足条件

$$AB \cdot AF = AE \cdot AC, \quad AB \cdot FB = BE \cdot BD.$$

如果能找到这个 F 点, 问题就解决了. 现在假定 F 点已经找出, 看它应满足什么条件? 由 $AB \cdot AF = AE \cdot AC$, 根据圆幂定理, 应有 B, C, E, F 四点共圆. 因 $\angle ECB$ 为直角, 故 $\angle EFB$ 也应为直角. 于是, 解题的关键就找到了.

第三步 证明.

证 联结 AD, BC , 过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 因 $\angle EFB = \angle ECB = \angle ADE = 90^\circ$, 所以

$$E, F, B, C \text{ 四点共圆} \Rightarrow AB \cdot AF = AE \cdot AC \quad (1)$$

$$E, F, A, D \text{ 四点共圆} \Rightarrow AB \cdot FB = BE \cdot BD \quad (2)$$

由 (1) + (2) 得 $AB \cdot AF + AB \cdot FB = AE \cdot AC + BE \cdot BD$,

即 $AB(AF + FB) = AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD$.

第四步 总结解题经验.

(1) 本题的特点是要证的等式一边是单项式而另一边是二项式, 因而不是简单的比例式, 直接使用相似三角形来证明是有障碍的. 克服障碍的关键在于: 总可以在 AB 上找到一点 F , 把 AB 折开为 $AB = AF + FB$, 这样就可以分成两组线段, 利用两对相似三角形或其他办法来证明. 这是一点“小窍门”.

(2) 本题可否有别的证法呢? 在审题中我们联想过的余弦定理、勾股定理、相交弦定理能否用上呢?

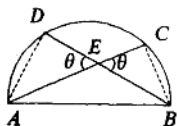
证二 (利用余弦定理) 如图绪-2, $EC = BE \cos \theta$, $ED = AE \cos \theta$, 所以 $AE \cdot EC + BE \cdot ED$

$$= AE \cdot BE \cos \theta + BE \cdot AE \cos \theta$$

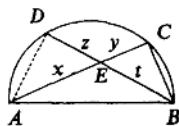
$$= 2AE \cdot BE \cos \theta \quad (1)$$

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE \cdot BE \cos(\pi - \theta)$$

$$= AE^2 + BE^2 + 2AE \cdot BE \cos \theta \quad (2)$$



图绪—2



图绪—3

将(1)代入(2), 即得

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 + AE \cdot EC + BE \cdot ED$$

$$= AE(AE + EC) + BE(BE + ED)$$

$$= AE \cdot AC + BE \cdot BD.$$

证三(利用勾股定理) 如图绪—3,

$$\text{左边} = AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= (x^2 - z^2) + (t + z)^2$$

$$= x^2 + t^2 + 2tz,$$

$$\text{右边} = AE \cdot AC + BE \cdot BD$$

$$= x(x + y) + t(t + z)$$

$$= x^2 + t^2 + 2tz,$$

$$\text{所以 } AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD.$$

(3) 本题的条件和结论能否改变和推广?

若将本题的条件稍加改变, 例如当 E 点在圆上(这时 E 点与 B 点和 C 点重合)或圆外(这时 AE 、 BE 为割线), 结论又如何呢?

当 E 点在圆上, 即为勾股定理, 结论当然仍成立.

当 E 点在圆外, 如图绪—4, 设 $\angle AEB = \theta$, 仍有

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE \cdot BE \cos \theta$$

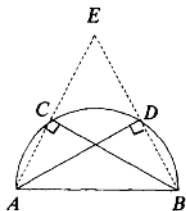
$$= (AE^2 - AE \cdot BE \cos \theta) + (BE^2 - AE \cdot BE \cos \theta)$$

$$= AE(AE - BE \cos \theta) + BE(BE - AE \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= AE(AE - CE) + BE(BE - DE) \\
 &= AE \cdot AC + BE \cdot BD.
 \end{aligned}$$

因此，本题可以统一地叙述为：

设 AB 为定圆的直径， E 为一定点， AE 与 BE 分别交圆于 C 和 D ，则 $AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD$ 。



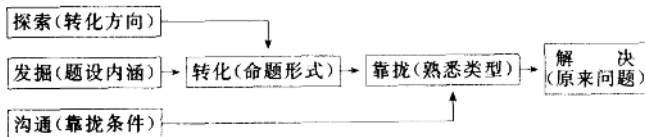
图绪—4

在图绪—4 中，如果撤开半圆，就可把 ABE 看作一个三角形，则本题还可叙述为另外一种形式：

设 AD 、 BC 分别为 $\triangle ABE$ 的边 BE 、 AE 上的高，则 $AB^2 = AE \cdot AC + BE \cdot BD$ 。

二、解题的探索过程

中学数学是通过怎样的探索程序来寻找解题思路的呢？一般地说是这样做的：仔细审查题意之后，分清条件和结论，尽量发掘题目中涉及的一些概念的内涵。接着就考虑这个问题能否归结为我们已经熟悉的解法的类型，并向那种类型靠拢，如果把问题直接化归为某种已熟悉的类型还有困难，就设法变化问题的形式使其转化为某种类型。如果在转化过程中碰到某些障碍，缺少某些条件，就设法搭桥铺路，进行沟通。最后使问题化归为我们已熟悉的类型。可以把这种探索程序简单地概括如下：



例 1 证明：长度分别为 a, b, c 的三条线段能构成一个三角形的充分必要条件为对一切实数 p ，使

$$pa^2 + (1-p)b^2 > p(1-p)c^2.$$

第一步 揭露题设内涵.

a, b, c 能构成一个三角形的充分必要条件就是说 a, b, c 要满足:

$$\begin{cases} a+b-c > 0 \\ a+c-b > 0 \\ b+c-a > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (1)$$

要使 $pa^2 + (1-p)b^2 > p(1-p)c^2$ 对一切 p 都成立可转化为 p 的二次三项式恒取正值

$$Q = c^2 p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0 \quad (2)$$

第二步 转化命题形式.

(2)式表示一条开口向上的抛物线, 要 Q 恒取正值, 就是要它的判别式

$$\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0 \quad (3)$$

于是本题就可转化为一个代数不等式命题:

(1) $\Leftrightarrow$ (3).

第三步 靠拢熟悉类型.

要从(1)推(3)或由(3)推(1), 直接使用不等式并不方便, 但注意到(1)式中三个不等式的乘积

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0 \quad (4)$$

这个问题能不能证明 Δ 是(4)的左边与一个负数的乘积呢? 这样问题就解决了, 即要证明:

$$\begin{aligned} & (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \cdot d \end{aligned} \quad (5)$$

其中 d 为一恒取负值的式子. 这时, 我们可以对(5)的左边进行因式分解, 甚至可通过做除法来算出 d . 这将是我们所熟悉的.

第四步 解决原来问题.

$$\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$$

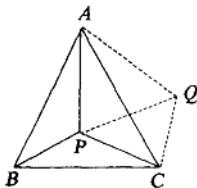
$$\begin{aligned}
&= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) \\
&= [a^2 - (b-c)^2][a^2 - (b+c)^2] \\
&= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) < 0.
\end{aligned}$$

(详细的解法略, 留着读者自己完成.)

例 2 若等腰三角形内部一点对两腰张角不等, 则该点到底边两端点的距离亦不等且与大角相关者距离较近.

第一步 揭露题设内涵.

本题的条件和结论都很明白: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, $\angle APB > \angle APC$. 要证明 $PB < PC$.



图绪-5

PB 与 PC 在同一三角形中, 很自然地会想到能否证明 $\angle PBC > \angle PCB$. 直接证明这一点比较困难, 所以要设法转化命题.

第二步 转化命题形式.

对于证明等边三角形、等腰三角形或正方形等的有关问题, 使用旋转法经常有用. 若将 $\triangle ABP$ 旋转至 $\triangle ACQ$ 的位置, 连接 PQ , 便得到新的等腰三角形 $\triangle APQ$ 和另一 $\triangle PCQ$. 问题转化为在三角形 PCQ 内, 证明 $PC > CQ$.

第三步 靠拢熟悉类型.

欲证 $PC > CQ$, 对我们事实上已经不难, 可视为是比较熟悉的了. 因为欲证 $PC > CQ$, 只要 $\angle CQP > \angle CPQ$. 因为 $\angle AQC = \angle APB > \angle APC$, 所以, 要证 $\angle CQP > \angle CPQ$, 只要证 $\angle AQP \leq \angle APQ$, 这只要要求 $AP \geq AQ$ 就可以了.

第四步 解决原来问题.

在 $\triangle ABC$ 外作 $\angle CAQ = \angle BAP$, 并取 $AQ = AP$, 连接 QP , QC .

$\because AB=AC, AP=AQ, \angle BAP=\angle CAQ,$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACQ.$$

$$\therefore \angle AQC = \angle APB > \angle APC.$$

$$\text{又 } AP=AQ, \therefore \angle APQ = \angle AQP.$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle CQP &= \angle AQC - \angle AQP > \angle APC - \angle APQ \\ &= \angle CPQ. \end{aligned}$$

$$\therefore PC > PB.$$

§2 探索解题方向的一些方法

当我们通过审题，对题中的条件做了一定的发掘，对问题的形式做了初步的转化之后，下一步就是要把问题引向我们所熟悉的类型。除了一些十分简单的题目之外，怎样才能把问题引向我们熟悉的类型，一般都不是一目了然的，必须做一些探索的工作。这一节我们将介绍数学中通用的一些思考方法。

一、观察

观察是我们认识事物最基本的途径，是发现问题和解决问题的前提。观察的主要方面有：题目的条件和结论有无特殊的结构？从一般问题的特例能否看出普遍的规律？典型抽样等等。

例1 设 x, y 都是实数，且

$$y = \sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}} + \sqrt{\frac{2x+1}{3-4x}} + 1.$$

试求： $y^2 + xy + x^2$ 的值。

分析 如果按一般的想法，从已知的方程中解出 x, y 再代入计算，那将是很麻烦的事情。但如果我们能仔细观察题设的条件，两个平方根号内的式子都必须为非负数，即同时有

$$\frac{2x+1}{4x-3} \geq 0, \quad \frac{2x+1}{3-4x} \geq 0$$

而这两个数互为相反数，必然同时为 0，立即得 $2x+1=0$ 。从而

$x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$. 问题就迎刃而解了.

例 2 证明 $\underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}\underbrace{122\cdots 2}_{(n+1)\text{个}}5$ 是完全平方数.

分析 如果我们对如何解题心中无底, 可取几个简单的情形先观察:

当 $n=1$ 时, $1225=35^2$;

当 $n=2$ 时, $112225=335^2$;

当 $n=3$ 时, $11122225=3335^2$.

这样, 我们就猜想, 问题可能是要证明:

$$\underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}\underbrace{122\cdots 2}_{(n+1)\text{个}}5 = \underbrace{33\cdots 3}_{n\text{个}}5^2.$$

于是, 我们来计算上式右边的平方, 看能否从计算过程中发现到解题的途径.

$$\begin{aligned} 33\cdots 35^2 &= (33\cdots 3 \times 10 + 5)^2 \\ &= \left(\frac{3 \times (10^n - 1)}{9} \times 10 + 5 \right)^2 = \left(\frac{10 \times (10^n - 1)}{3} + 5 \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \times 10^2 \times (10^n - 1)^2 + \frac{1}{3} \times 10^2 \times (10^n - 1) + 25. \end{aligned}$$

因此, 我们只要设法把 $11\cdots 122\cdots 25$ 化成上式右边的形式就可以了.

$$\begin{aligned} \text{证明 } &\underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}\underbrace{122\cdots 2}_{(n+1)\text{个}}5 \\ &= \frac{1}{9} (10^n - 1) \times 10^{n+2} + \frac{2}{9} (10^n - 1) \times 10^2 + 25 \\ &= \frac{1}{9} [(10^n - 1) \times 10^{n+2} - (10^n - 1) \times 10^2] \\ &\quad + \frac{1}{3} (10^n - 1) \times 10^2 + 5^2 \\ &= \frac{1}{9} (10^n - 1) \times 10^2 \times (10^n - 1) + \frac{1}{3} (10^n - 1) \times 10^2 + 5^2 \\ &= \frac{1}{9} (10^n - 1)^2 \times 10^2 + \frac{1}{3} (10^n - 1) \times 10^2 + 5^2 \end{aligned}$$