高等学校建筑环境与设备工程专业教材

建筑环境与设备测试技术

刘耀浩　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高[redacted]设备工程专业教材

建筑环境与设备测试技术

刘耀浩　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书共分12章，分别讲述了建筑环境与设备工程专业测量的基本知识，误差分析与数据处理理论，温度、湿度、压力、流速、流量、液位、燃烧产物成分分析，环境噪声和显示仪表等测试仪表的原理、应用技术、测量方法及校验技术等内容。

本书系统性强，取材新颖，可作为高等学校建筑环境与设备工程和热能动力工程的专业教材，也可作为从事环境监测、供热通风空调、建筑给水排水、燃气供应、采暖通风、燃气、制冷、空调、锅炉、热工、地热利用、能源利用及自动化等工作的专业技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

建筑环境与设备测试技术/刘耀浩主编．—天津：天津大学出版社，2005.4
ISBN 7-5618-2121-2

Ⅰ．建…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．①建筑物-环境管理-测试技术②房屋建筑设备-测试技术　Ⅳ．①TU-865②TU8

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第031064号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　　话　发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
印　　刷　天津市宝坻区第二印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　12.5
字　　数　315千
版　　次　2005年4月第1版
印　　次　2005年4月第1次
印　　数　1-4 000
定　　价　17.00元

前　言

“建筑环境与设备测试技术”课程是建筑环境与设备工程专业本科生的一门技术基础课。

本书是按照建筑环境与设备工程专业的教学计划，在总结多年来教学、科研及生产实践的基础上编写而成的。为适应高等教育的发展，达到拓宽专业口径、扩大学生知识面、调整学生知识结构的高等教育目标的要求，本书在编写中注意融入现代新技术成果和应用经验，力求扩大高科技信息量。在取材上，紧密地结合我国建筑环境与设备工程的实际情况，较多地反映了传感器技术及计算机技术在生产和科研方面的先进成果。为便于读者自学，对相关内容既重点详细讲述，又力求少而精，避免重复。

编写中采用了国家法定计量单位以及有关国家最新专业标准。

本书由天津大学刘耀浩副教授主编，张廷元、葛文梅、杨春瑞和陈海燕参加了编写。本书在编写过程中得到了有关专家及同行的指导和帮助，在此表示衷心的感谢！

本书可作为高等学校建筑环境与设备工程专业、燃气工程、热能动力工程、空气调节工程等专业的教材，也可供从事采暖通风、燃气、制冷、空调、锅炉、热工、地热、能源及自动化等工作的专业技术人员参考。

由于时间仓促和编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者不吝指教。

编者

2005 年 1 月于天津大学

目　　录

第 1 章　测量误差分析与数据处理

人类为了认识自然与改造自然，就需要不断地对自然界的现象进行测量研究。由于实验方法和实验设备的不完善，加之周围环境的影响以及人们认识能力所限等原因，使测量和实验所得数值和真实值之间，存在一定的差异，在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得愈来愈小，但始终不能完全消除它。误差存在是必然的和普遍的。

为了充分认识进而减小和消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行充分研究，对实验的数据进行必要的处理。

测量误差分析与数据处理是科学实验的重要组成部分，是实验研究必要的工作环节。这对实验的内容、实验方法及测量系统都有较大的指导作用。

通过误差分析和数据处理可以正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差；正确处理数据，合理计算所得结果，可以在一定条件下得到更接近于真实值的数据；正确组织实验，合理设计测量系统及选用仪器和测量方法，可以在最经济的条件下，得到理想的结果。

1.1　测量误差的基本知识

1.1.1　真值与测量值

我们要进行测量的物理量，它具有客观存在的量值，这一量值就称为真值，也称真实值，用 x_0 表示。通过检测仪表测量得到的结果称为测量值，也叫仪表示值，用 x 表示。

在实际测量工作中，总是存在着各种各样的影响因素，例如，对被测对象本质认识的局限性，测量方法不完善、测量设备不精确、测量过程中条件的变化、测量工作中的疏忽或错误，以及其他偶然因素的影响等，都会使测量结果与被测量的真实值之间存在着一定的差值，这个差值就是测量误差。基于上述原因，在测量中总是存在着误差，也就是说，测量误差的存在是不可避免的。所以，客观对象实际的真实值 x_0 是无法通过测量得到的，但随着人们认识运动的推移和发展，在实践中不断改进检测仪表、测量方法以及数据处理方法，测量值 x 可以无限地逐渐逼近真实值 x_0，然而却不能等于真实值 x_0。我们的目的就是采取各种手段来获得尽可能接近真实值 x_0 的测量值 x，探讨所得到的测量结果是否符合被测量的真实值，以便寻求消除或减小测量误差的方法，保证测量结果尽可能地接近于被测量的真实值，满足测量精确度的要求。

1.1.2　测量误差的表示

1.1.2.1　测量的绝对误差

测量值 x 与被测量的真实值 x_0 之间的差值称为测量的绝对误差，用 Δx 表示，即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-1}$$

被测量的真值就是指被测量本身的真实数值，它只能是个理论值或定义值，实际上是不可知的。在误差理论中指出，对于等精度测量，即在同一条件下所进行的一系列重复测量，在排除了系统误差的前提下，当测量次数为无限多时，测量结果的算术平均值近似于真值。通常都是以标准器所提供的标准值或以高一级的标准仪表测量值作为近似的真实值，又称为实际值。因此，测量绝对误差的数值和符号(正或负)，表明了测量值偏离实际值的程度和方向。

1.1.2.2 测量的相对误差

测量的相对误差是绝对误差与所取的参考值(约定值)的比值，用百分数来表示。按所取参考值(约定值)的不同，测量的相对误差有三种表示方法。

(1) 实际相对误差

测量绝对误差与被测量实际值的比值，称为实际相对误差，以百分数表示为

$$\delta_0 = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \tag{1-2}$$

(2) 标称相对误差

测量绝对误差与测量值的比值，称为标称相对误差，以百分数表示为

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x} \times 100\% \tag{1-3}$$

(3) 引用相对误差

测量绝对误差与该仪表的量程(刻度范围)的比值，称为引用相对误差，以百分数表示为

$$\delta_m = \frac{\Delta x}{x_{max} - x_{min}} \times 100\% \tag{1-4}$$

式中：x_{max}和 x_{min}分别为仪表量程范围的上限值和下限值。

上述两种误差表示方法中，相对误差比绝对误差更能说明测量的精确性。

1.1.3 测量误差来源

在测量过程中，测量装置、环境、方法、人员等影响因素，都是产生测量误差的原因。

1.1.3.1 测量装置误差

(1) 标准器误差

标准器是提供标准量值的器具，如标准量块、标准刻线尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，而它们本身体现出来的量值，不可避免地都含有误差。

(2) 仪器误差

凡是用来直接或间接将被测量和测量单位进行比较的设备，称为仪器或仪表，如天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表。仪器和仪表本身都具有误差。

(3) 附件误差

仪器的附件及附属工具等的误差，也会引起测量误差。

①机构误差：如仪器中机械零件连接的间隙等引起的误差。

②调整误差：仪器仪表、量具在使用时没有调整到理想状态，如由不垂直、不水平、偏

心、零件偏移等引起的误差。

③量值误差：标准量值本身的不准确性、量值随时间的不稳定性和随空间位置的不均匀性而引起的误差，如刻线尺长度的变化、标准电阻阻值的变化等所引起的误差。

④变形误差：仪器仪表、量具在使用中的变形，如因零件材料性能的不稳定或仪器本身因测量部件移动产生的变形等引起的误差。

1.1.3.2　环境误差

由于各种环境因素与要求的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压(引起空气各部分的扰动)、振动(外界条件及测量人员引起的振动)、照明(引起视差)、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规定条件下使用产生的示值误差称为基本误差，而超出此条件使用引起的误差称为附加误差。

1.1.3.3　方法误差

由于采用近似的测量方法而造成的误差，如计算式中常量取值的不同，将会引起误差。

1.1.3.4　人员误差

由于测量者受分辨能力的限制、因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化、固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等引起的误差。

总之，在计算测量结果时，对上述四个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

1.1.4　测量误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

1.1.4.1　系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号均保持不变，或在条件改变时，按照一定规律变化的误差称为系统误差，例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

按对误差掌握的程度可将系统误差分为已定系统误差和未定系统误差。已定系统误差，即误差大小和方向为已知；未定系统误差，即误差大小和方向为未知，但通常可估计出误差的范围。

按误差出现规律可将系统误差分为不变系统误差和变化系统误差。不变系统误差，即误差大小和方向为固定的；变化系统误差，即误差大小和方向为变化的，按其变化规律，又分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

1.1.4.2　随机误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差称为随机误差，又称为偶然误差，例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的变形及其他复杂因素等引起的测量误差。

1.1.4.3　粗大误差

明显歪曲测量结果的误差称为粗大误差，如测量时对错了标志、读错了数、记错了数，以及在测量时因操作不小心而引起的过失性误差等。

测量误差分析主要是对系统误差与随机误差进行分析。这两种误差的性质不同，处理方法也不同。

随机误差和系统误差之间也有相互联系。系统误差有时也呈现出随机性。例如，在使用热电偶测量固体表面的温度时，由于系统中某一脉动电磁场的影响，数字电压表的读数可偏低或偏高。此外，热电偶安装不善所测壁温也有误差。这两方面影响因素的叠加，使系统误差也表现出一定的随机性。随机误差某些项目的影响因素被逐渐认识后，就可以把它们从统计规律中分离出来，作为恒定的具有规律的可变系统误差处理。

1.1.5 测量的精度

反映测量结果与真实值接近程度的量，称为精度，它与误差大小相对应。因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高。

上述各种误差可通过精度反映出来。进行误差分析的主要目的之一就是要确定测试的精度。精度愈高，测定结果愈逼近真值。实质上，精度表示了测量误差的大小，所以精度又可细分为下列三种。

(1) 准确度

表示系统误差的大小，它说明测量值的平均值与真值的偏离程度。

(2) 精密度

表示随机误差的大小及重复性的好坏，说明随机误差的弥散程度。

(3) 精确度

表示综合误差(即系统误差与随机误差的合成)的大小。精确度是测量质量的总评价，它既反映了系统误差的大小，又反映了随机误差的大小。准确度高的测量，精密度不一定高。反之，精密度高的测量，准确度不一定高。但精确度高时，准确度、精密度都高。

系统误差、随机误差和粗大误差对测量的影响可以从图 1-1 中清楚地看出。图中 x_0 为真值，$\bar{x}$ 为多次测量值的平均值，黑点表示每次测量所得的数值。从图中可以看出：(a)图表示随机误差小，系统误差大，说明测量的精密度高而准确度低；(b)图表示随机误差大，系统误差小，说明测量精密度低而准确度高；(c)图表示除去一个坏值 x_k 以外，随机误差和系统误差都小，说明测量的精密度和准确度都高。把(c)图中除去坏值后的测量结果看作是较精确的测量结果。把精密度和准确度合起来称为精确度，它能较全面地说明测量和仪表的质量。

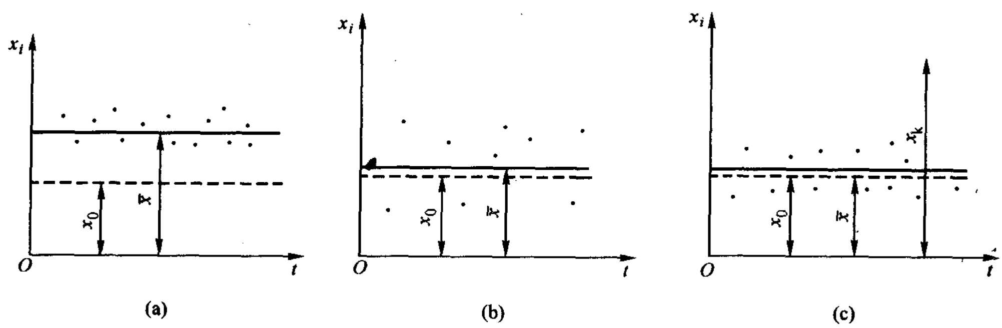

图 1-1 实验数据的准确度、精密度和精确度示意图

实际测量过程只是设法接近真值，所以在不知道真值的情况下不可能分清测量的精密性和准确性，只能笼统地称为测量值的不确定性。对于上述三类误差，必须加以处理，以便得

到尽可能正确的测量结果，即尽可能准确地从一系列测量值中判断出最接近真值的数值，并估计出这个判断可能具有的误差界限。那么怎样才能知道测量值中有无粗大误差和系统误差存在，以及随机误差的大小呢？在统计和概率理论的基础上建立的误差理论可以用来指导对测量值的数据处理。

1.2　随机误差及其特性

1.2.1　随机误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量，得到一系列不同的测量值(常称为测量列)，每个测量值都含有误差，这些误差的出现没有确定的规律，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就误差的总体而言，却具有统计规律性。

随机误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素构成，主要是测量装置、环境和人员等方面的因素。

1.2.1.1　测量装置方面的因素

测量装置方面的因素包括零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

1.2.1.2　环境方面的因素

环境方面的因素包括温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照度变化、灰尘以及电磁场变化等。

1.2.1.3　人员方面的因素

人员方面的因素包括在瞄准、读数时的不稳定等。

随机误差的出现，从表面上看是毫无规律、纯偶然的，故随机误差亦称为偶然误差。但是，就其总体来说，随机误差的出现服从统计规律，利用数理统计的理论和方法，可以掌握大量数据中存在的随机误差的若干规律，确定随机误差对测量结果的影响，并可通过对测量数据的适当处理，来正确估计随机误差的大小。

1.2.2　随机误差的特性

1.2.2.1　随机误差的特性

依据概率论中心极限定理可知，设某随机变量可用大量独立随机变量之和表示，其中每一个随机变量对总和的影响极微，则可认为这个随机变量服从正态分布。在大多数的测量中，随机误差正是由多种独立因素共同造成的许多微小误差的总和。可见，正态分布是随机误差较为普遍的一种分布规律。对正态分布的随机误差的研究，一般是按概率统计理论找出误差的主要数字特征，如数字期望、方差、标准偏差并分析其置信度。

实践与理论证明，只存在随机误差的测量是遵循正态分布的，因此图 1-2 所示曲线可看作正态分布曲线，该曲线的函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-5}$$

如果 x_0 和 σ 的值确定以后，则正态分布的分布密度就确定了，所以 x_0 和 σ 也叫正态分布的特征数。分布密度曲线对称于直线 $x=x_0$，并在 $x=x_0$ 处达到极大值，在 $x=x_0\pm\sigma$ 处有拐

点，以 x 轴为渐近线。用误差 $\delta = x - x_0$ 代入上式，并将 $e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$ 写成 $\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)$，得

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1-6}$$

上式又称为高斯公式，其图形如图 1-3 所示。式中 σ 称为标准偏差，其定义式为

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2} \tag{1-7}$$

式(1-7)表明，偶然误差的平方和除以测量次数的开方取极限即可得到标准偏差。根据定义，σ 又称为均方根误差。

如给出误差区间$[a, b]$，则偶然误差 δ 在区间$[a, b]$内出现的概率为

$$P\{a < \delta < b\} = \int_a^b f(\delta)\mathrm{d}\delta \tag{1-8}$$

即等于图 1-3 中阴影部分的面积。因为 $-\infty < \delta < \infty$ 是必然事件，显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 1 \tag{1-9}$$

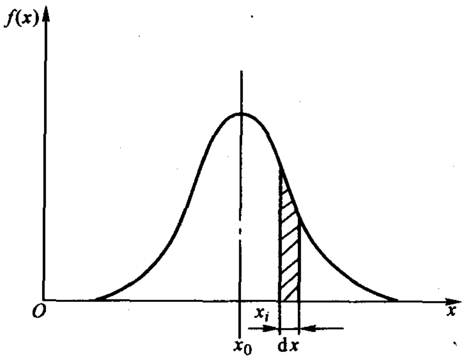

图 1-2　测量值的概率分布密度曲线

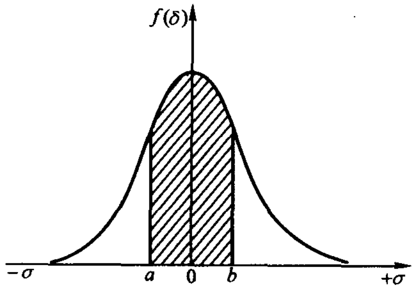

图 1-3　随机误差的概率密度分布曲线

由图 1-3 可看出，按正态分布的随机误差有下列几个特性：

①误差可正、可负，绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相同，即 δ 对于纵坐标对称分布，因而全体误差的代数和 $\sum\delta = 0$；

②绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大，等于零的误差其概率密度具有最大值；

③绝对值很大的误差出现的概率近于零，即可认为随机误差值有一定的实际极限。

上述的特性，有时也称为随机误差的公理。

随机误差服从正态分布，可以用概率论的中心极限定理来说明，该定理用于随机误差这种随机变量时可解释为：大量独立随机因素引起的测量值的随机误差，若各独立因素造成的误差相对于结果的随机误差极其微小，则可认为随机误差实际上服从正态分布。

1.2.2.2　正态分布的统计性质

(1) 数学期望

对于分布密度服从正态分布的测量值 x，落在$(x \sim x + \Delta x)$内的概率近似为 $f(x)\Delta x$，所以一列等精度测量的数学期望可写成为

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} dx = x_0 \tag{1-10}$$

上式的意义为：数学期望是随机变量(测量值)的概率分布的平均数，也就是把变量的所有可能值乘以各个可能值所分别具有的概率的总和。可以根据一列 n 次等精度测量所得到的结果 x_1，x_2，…，x_i，…，x_n 来估计真值 x_0。因此真值 x_0 的最可能值就是诸 x_i 的算术平均值，即

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-11}$$

式中 $\bar{x}$ 表示有限个测量值的平均，它在 x_0 附近摆动，当 n 为无穷大时，$\bar{x}$ 会依概率收敛于 x_0，我们把 $\bar{x}$ 称作 x_0 的无偏估计，即 x_0 的最佳估计值。

(2) 标准偏差(均方根误差)

式(1-7)说明标准偏差 σ 是以真误差 $\delta = x - x_0$ 来定义的，并要求测量次数 $n \to \infty$ 和知道 x_0 值，实际所知道的仅仅是有限次等精度测量值及依此所求得的最佳估计值 $\bar{x}$，所以在计算 σ 时是用 $\bar{x}$ 代替 x_0，用 $x_i - \bar{x} = v_i$(叫做剩余误差)代替 δ。显然根据式(1-11)算术平均值 $\bar{x}$，不论 n 为何值，都有

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 \tag{1-12}$$

在计算 σ 时，用 v_i^2 代替 δ^2，要考虑到虽然一共有 n 个剩余误差，但由于 $\sum v_i = 0$ 关系的约束，只有 $n-1$ 个剩余误差是独立量(即 $n-1$ 个自由度)，因为余下的一个剩余误差可由 $\sum v_i = 0$ 关系式确定。这意味着余下的这一剩余误差并未提供前面 $(n-1)$ 个剩余误差中所未包含的任何新信息。这样，当利用 n 个 v_i^2 值来估计 σ^2 值时，应该在求和之后除以 $n-1$，而不是除以 n，所以便得到

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1-13}$$

上式称作贝塞尔公式，当 $n \to \infty$ 时，$\bar{x} \to x_0$，$(n-1) \to n$，可见贝塞尔公式与 σ 的原始定义式完全一致。不过，利用上式计算时，n 为有限值，所以计算出的结果是 σ 的估计值，用符号 $\hat{\sigma}$ 来表示。

应该注意，在以标准表对直接测量仪表进行检定或校验时，把标准表的示值(修正了的)作为约定真值 x_0，这时计算标准偏差不用被校表读数的算术平均值 $\bar{x}$，而用约定真值 x_0，因此 n 次校验的自由度就是 n，校验结果的标准偏差应按下式计算

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2} \tag{1-14}$$

σ 的大小表征着各个测量值彼此间的分散程度。不同 σ 值的三条正态分布曲线如图 1-4 所示。由图可见，σ 值愈小，则分布曲线愈瘦高，这意味着小误差出现的概率愈大，而大误差出现的概率愈小。因此可以用参数 σ 来表征测量的精密度，也就是说，σ 愈小，测量值之间的差异越小，精密度愈高。但是也应指出，一列等精度测量的 σ 不是其中任何一个测量值的误差，而是这一列测量值的标准偏差。在不同条件下进行的两列等精度测量，一般说来具有不同的 σ 值。

从几何角度来看，σ 是概率分布密度曲线的拐点的横坐标。因为$\mathrm{d}^2f(\delta)/(\mathrm{d}\delta)^2=0$的解恰好是 $\delta=\pm\sigma$，如图 1-5 所示。

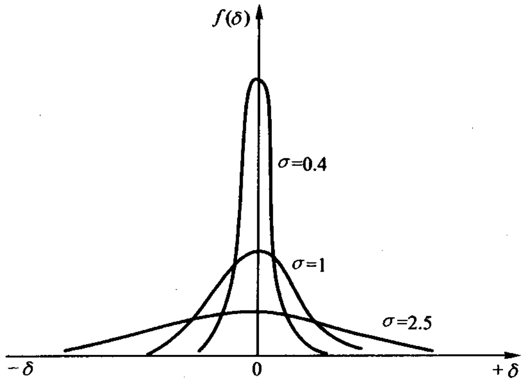

图 1-4　不同 σ 值的正态分布曲线

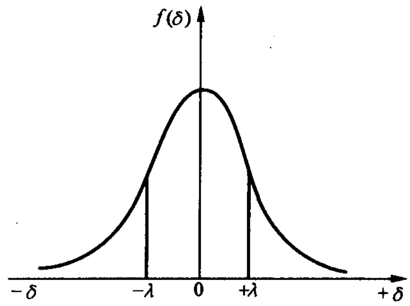

图 1-5　σ 在正态分布曲线图上的位置

(3) 概率积分

利用概率积分可求出在某一区间内的误差的概率。对于正态分布的误差，一般取对称于 x_0 的区间$[-a,\ a]$来估计 δ 出现的概率，即求

$$P\{-a\leqslant\delta\leqslant a\}=P\{|\delta|\leqslant a\}=\int_{-a}^{a}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=2\int_{0}^{a}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta \tag{1-15}$$

因为随机误差 δ 在某一区间内出现的概率与标准偏差σ 的大小密切相关，故常把区间 a 取为σ 的若干倍，即令

$$a=z\sigma$$

那么

$$z=\frac{a}{\sigma}$$

代入式(1-15)，并以$f(\delta)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$代入，得

$$\varphi(z)=P\{|\delta|\leqslant z\sigma\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z \tag{1-16}$$

$\varphi(z)$称为概率积分值，它与 z 的关系如表 1-1 所示。

表 1-1　$\varphi(z)=\dfrac{2}{\sqrt{2x}}\int_0^z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z$ 数值表

z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$
0	0.000 00	0.7	0.516 07	1.5	0.866 39	2.2	0.972 19	2.9	0.996 27
0.1	0.079 66	0.8	0.576 29	1.6	0.890 40	2.3	0.978 55	3.0	0.997 30
0.2	0.158 52	0.9	0.631 88	1.7	0.910 87	2.4	0.983 61	3.5	0.999 535
0.3	0.235 82	1.0	0.682 69	1.8	0.928 14	2.5	0.987 58	4.0	0.999 937
0.4	0.310 84	1.1	0.728 67	1.9	0.942 57	2.58	0.990 12	4.5	0.999 993
0.5	0.382 93	1.2	0.769 86	1.96	0.950 00	2.6	0.990 68	5.0	0.999 999
0.6	0.451 49	1.3	0.806 40	2.0	0.954 50	2.7	0.993 07		
0.674 5	0.500 00	1.4	0.838 49	2.1	0.964 27	2.8	0.994 89		

例如 $z=1$(即 $a=\sigma$)，查表 1-1 得$\varphi(z)\approx0.683$，也就是说，绝对值小于 σ 的随机误差出现的概率是 68.3%。换句话说，在一列等精度直接测量值中，可能有 68.3%的误差其数值

落在 $\pm\sigma$ 范围内，31.7%的误差在 $\pm\sigma$ 范围外，即大约每三次测量中可能有一次测量值的误差大于 σ。

同样可得出

$$P\{|\delta|\leqslant 2\sigma\}\approx 0.955=95.5\%;\ P\{|\delta|>2\sigma\}\approx 0.045\approx\frac{1}{22}.$$

$$P\{|\delta|\leqslant 3\sigma\}\approx 0.997=95.5\%;\ P\{|\delta|>3\sigma\}\approx 0.003\approx\frac{1}{370}$$

即前者大约每 22 次测量中可能有一次 $|\delta|>2\sigma$，后者大约每 370 次测量中可能有一次 $|\delta|>3\sigma$。

如图 1-6 所示，把 $\pm a$（即 $\pm\sigma$，$\pm 2\sigma$，…，$\pm z\sigma$）称作置信区间或置信限，其中 z 称作置信系数；把概率 $P\{-a\leqslant\delta\leqslant a\}$ 称作在 $\pm a$ 置信区间内的置信概率；把 $1-P=a$ 称作置信水平或显著性水平。置信限和置信概率合起来称为置信度，即可信赖的程度。显然，置信区间愈宽，置信概率愈大；反之，置信区间愈窄，置信概率愈小。置信概率一般可取 68%，90%，95%，99.5%，99.73% 等数值，究竟取多少，要根据实验要求及该项测量的重要性而定，要求愈高，置信概率取得愈小。

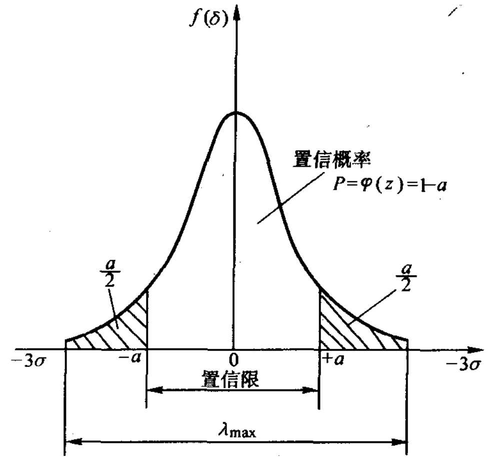

图 1-6　置信概率的几何意义

在一般测试中，当置信系数 $z=3$ 时，绝对值小于 $\pm 3\sigma$ 的误差出现的概率为 99.73%，所以对任何参数的重复测量，其随机误差不会超过 $\pm 3\sigma$。通常把 $\pm 3\sigma$ 称作测量值的极限误差或最大可能误差或公差，又称随机不确定度，用符号 λ_{max} 来表示，即

$$\lambda_{max}=\pm 3\sigma \tag{1-17a}$$

或

$$\lambda_{max}=\pm 3\hat{\sigma} \tag{1-17b}$$

对于一个仪器，如果进行了多次等精度测量后得到 $\hat{\sigma}$ 值，那么当用此仪器一次测量时，如果没有系统误差和粗大误差，则其随机误差不会超出 $\pm 3\hat{\sigma}$，就是说单次测量结果可表示为

$$x\pm\lambda_{max}=x\pm 3\hat{\sigma} \tag{1-18}$$

因此，上述判断出现错误的概率是 0.27%。

（4）标准误差

对于一列 n 次等精度测量，是用算术平均值 $\bar{x}$ 作为真值 x_0 的最佳估计值，由于 x 和 δ 是正态分布的，而正态分布的随机变量之和的分布仍是正态的，故 $\bar{x}$ 也属于正态分布。因此，也可用 $\bar{x}$ 的标准偏差 s 来作为 $\bar{x}$ 的精密度参数。可以证明一列等精度测量值 x 的标准偏差 σ 和其算术平均值的标准偏差 s 之间关系为

$$s=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-19a}$$

或

$$\hat{s} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{1-19b}$$

把 s 称作测量值的标准误差。由上式可见，测量次数 n 增加，s 减小，也就是说当 n 增加时用 $\bar{x}$ 作为 x_0 的估计值的精度增高，削弱了随机误差对测量最终结果 $\bar{x}$ 的影响。然而，因为 s 与$\sqrt{n}$成反比，s 下降的速度比 n 的增长速度要慢得多，因此，在实际测量中 n 很少超过 50，一般取 15 至 20。

对于一列等精度的多次重复测量值，假如没有系统误差和粗大误差，那么可表示为

$$x = \bar{x} \pm 3\hat{s} = \bar{x} \pm 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{1-20}$$

(5) t 分布及其应用

某一参数的所有可能的测量值的全体称为母体。通过测量只能得到母体中的若干个测量值，称作子样，子样所包含的测量值的数目叫做子样大小(或子样容量)。

实际上，任何实验与测量的次数都是有限的，也就是只能得到子样，甚至是小子样(指数据少于 20～30 个以下者)。因此要想知道子样的性质能否在一定程度上反映母体的性质，就有必要进一步研究小子样的统计性质，而 t 分布是在研究小子样问题时的一个严密而有用的分布。它指出当已知母体为正态分布，但不知母体的标准偏差 σ 值，如用小子样平均数来代替母体的数学期望时如何估计误差的范围。

设母体的数学期望为 x_0，其容量为 n 的子样的算术平均值$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，标准偏差 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$，$\bar{x}$ 的标准偏差$\hat{s} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$。虽然子样服从母体的同一正态分布，但不能用 $\hat{\sigma}$ 或$\hat{s}$来代替母体的 σ。现在要想在母体的 σ 未知的情况下，估计以 $\bar{x}$ 代替 x_0 时所具有的可能误差范围。为了解决这个问题，古沙提出了随机变量 t，当

$$t = \frac{\bar{x} - x_0}{\hat{s}} = \frac{\bar{x} - x_0}{\hat{\sigma}}\sqrt{n} \tag{1-21}$$

时，此随机变量 t 的密度服从 t 分布(又称学生分布)，其图形对 $t=0$ 是对称的，见图 1-7。当 $n \to \infty$，t 分布相当快地收敛于正态分布。根据式(1-21)定出 x_0 的置信区间为

$$\bar{x} - t_a(k)\frac{\partial}{\sqrt{n}} \leqslant x_0 \leqslant \bar{x} + t_a(k)\frac{\partial}{\sqrt{n}} \tag{1-22}$$

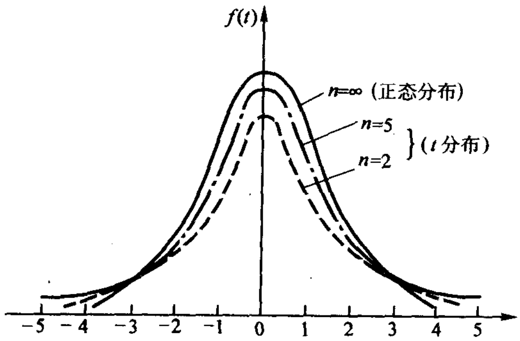

图 1-7　t 分布曲线

式中的$t_a(k)$为 t 分布的置信系数，它由显著性水平 a 和自由度 $k=n-1$ 决定，查表 1-2 可得。

所以，当已知母体为正态分布，则以小子样的 $\bar{x}$ 值代替 x_0 值的误差范围可以按如下步