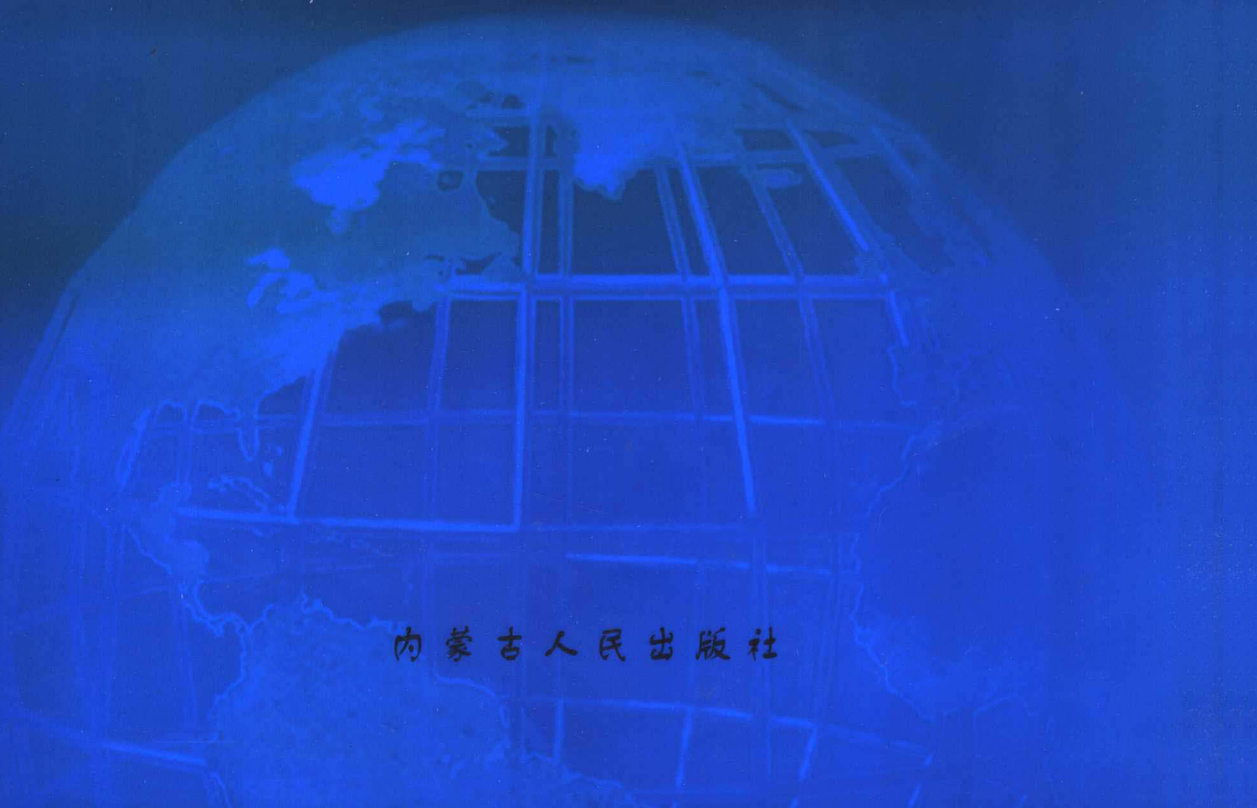
高等数学

GAODENGSHUXUE

主编：孙建设　朱青堂



内蒙古人民出版社

高等学校教材

高 等 数 学

主　编　孙建设　朱青堂

副主编　毋绪道　刘卓平

马晓平　常瑞连

编　委　叶晓丽　辛志华

杨秀芹　王　军

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孙建设,朱青堂编.—呼和浩特:内蒙古人民出版社,2005.10

ISBN 7-204-08123-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②朱 Ⅲ.高等数学-高等教育-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 123526 号

高 等 数 学

孙建设 朱青堂 主编

*

内蒙古人民出版社出版发行

(呼和浩特市新城区新华大街祥泰大厦)

河南师范大学(新乡)印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:29.5 字数:500 千字

2005 年 10 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

印数:1-3000 册

ISBN 7-204-08123-4/G·2023 定价:34.80 元

如发现印装质量问题,请与我社联系。联系电话:(0471)4971562 4971659

作者简介

孙建设，男，汉族，河南武陟人，1965年5月出生，中共党员，全国杰出教育研究者，焦作师专副教授，郑州大学研究生。澳大利亚RGMIA(数学的不等式及其应用国际研究组)研究员;WGGC(国际一般凸性工作组)研究员;中国数学会会员;河南省素质教育研究会会员;河南省科技成果专家信息库成员；河南省教育科学专家信息库成员;河南省社会科学专家信息库成员。曾应邀赴澳大利亚和印度参加国际学术会议。

孙建设主持省部级、厅级课题8项，参与国家、省部、厅级课题5项，主要从事特殊函数理论和数学不等式理论及应用研究、素质教育和教学方法改革研究。已在美国、印度、澳大利亚等国内外杂志上发表学术论文30篇。参编统编改革教材1部；主编和副主编教材各1部。荣获省、厅级壹等奖7项，二等奖3项。

内容简介

本书根据教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的要求，注重教学中全面体现知识、能力和素质的统一，突出以应用为目的，以必需、够用为度的原则。全书包括预备知识、函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分和曲线积分与曲面积分、高等数学软件包共十一章。

本书结构完整、体系新颖、内容丰富、例题典型、应用广泛，不仅可作为理工农科和师范院校本、专科教材，也可作为全国高等教育自学考试和硕士研究生入学考试理工科考生的复习参考用书。

前　言

近年来，我国高等院校数学教学改革的思想十分活跃。高等数学是理工类院校一门十分重要的必修基础课程，也是理工类硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书根据教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的要求，结合全国高等教育创建示范专业数学教学改革的经验，并根据全日制大学高等数学教学大纲和原国家教委于1996年修订的高等学校《高等数学教学基本要求》编写的。

在本书编写的过程中，作者始终致力于本书的质量，反复进行修改、校对、调整与完善。本书既结合了编者在高等数学的教学与研究实践中积累的一些有益的经验，也采纳了同类教学参考书的某些技巧与方法，文字通俗易懂，深入浅出，并且尽可能地从内容上和方法上反映近年来《高等数学》这门课在教学和科研中的最新成果。同时考虑到读者对象的特点，最后经过较长时间的酝酿，编写了此书。该教材具有以下特点：

对于基本概念的叙述深入浅出、清晰准确、重点突出；对于基本方法的介绍从分析、比较切入，力求阐明数学思想方法的本质及其应用技巧，做到条理清晰、文字准确、通俗易懂、便于自学；注重基本运算能力的培养，淡化某些复杂形式，注重核心内容，但简而不略；对于例题的选取力求典型求实，内容覆盖面广，题型种类多，同时我们增加了一些趣味性、应用性较强的实例和习题，以引导学生学数学、爱数学并培养他们用数学的意识。通过这些例题的讲解与分析，能加深读者对基本内容的理解，提高解决问题的能力，培养读者的严谨与创新能力。

本书是针对理工农科和师范院校校本、专科在校生而编写的。适用于非数学专业的普通高校本、专科学生和成人高校的非数学专业学生使用。也可作为全国高等教育自学考试和硕士研究生入学考试理工科考生的复习参考用书。

本书由孙建设提出总体写作方案并组织撰稿，朱青堂、毋绪道、刘卓平、马晓平、常瑞连参加了总体方案的讨论。全书共十一章，除第五、第十章以外，都由焦作师范高等专科学校数学系教师编写，各章分工如下：

前言、目录、预备知识、第七、十一章、附录Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、习题答案由孙建设执笔；第一章由朱青堂执笔；第二章由辛志华执笔；第三章由毋绪道执笔；第四章由马晓平执笔；第五章由王军（商丘师范学院数学系）执笔；第六章由刘卓平执笔；第八章由常瑞连执笔；第九章由杨秀芹执笔；第十章由叶晓丽（洛阳师范学院数学与信息科学系）执笔。全书由孙建设进行系统的修改、统稿、总纂定稿。

在本书编写过程中，参考了国内外有关文献、著作、教材，引用了本书所列参考文献中的有关材料，同时得到各参编院校有关领导的大力支持和帮助，在此一并致谢！

本书的出版得到全国杰出教育研究者孙建设副教授主持的“河南省自然科学基金项目（＃0511012000）”、“河南省教育厅自然科学基础研究项目（＃200512950001）”、“河南省教育厅“十五”教育科学规划2003年度课题”、“河南省教育厅“十五”教育科学规划2004

年度重点课题和2005年度重点课题”、“河南省社科联2004年和2005年度调研课题”的资助。

由于我们的水平有限，书中的缺点和不足之处在所难免，恳请各位专家和读者批评指正。

编者

二00五年八月

目　　录

预备知识

第一节　集体论初步

集合是现代数学中一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号，它正广泛地被应用到各个层次的数学之中，中学的数学介绍了集合的初步知识，高等数学的不同分支就是研究不同对象的集合及其运算，集合论的语言正成为现代数学的基础理论.

一、集合的描述

1. 集合的定义

学习高等数学一开始就应熟悉集合概念，并逐渐养成用集合的一套语言来表述数学命题，集合论的奠基人德国数学家格奥尔格·康托（*G·Cantor* 1845～1918）在提出这个概念的时候，将“集合”看作我们的感觉或者思维中确定的个别对象的汇总，这一个一个的对象就称为该集合的“元素”

例1　所有自然数组成一个集合

$$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

所有的有理数组成一个集合，记为 Q；所有的实数组成一个集合，记为 R. 前面三个例子中的元素都是数，相应的集合叫做数集. 事实上，集合这个概念是十分广泛的，元素不一定是数. 例如由张三、李四和王五组成一个代表团，就可以看作一个集合，此时张三作为代表团成员就是一个元素.

由康托对集合的描述和上述集合的实例，可以看出，通常把具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**. 简称为集，其中每个对象称为集合的元素，如果集合中只有有限个元素，称该集合是**有限集**.

例2　某教室内学生全体组成的集合，就是一个有限集合.

如果集合中有无限个元素，称该集合为**无限集合**，例如，有理数集 Q 和实数集 R 都是无限集.

2. 集合的表示

人们习惯用大写英文字母 A、B、C、X、Y、…表示集合；用小写英文字母 a、b、c、x、y、…表示集合的元素. 但是规定用 N 表示自然数集，R 表示实数集.

假设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，称元素 a 属于集合 A，记为 $a\in A$，如果 b 不是 A 的称元素，称元素 b 不属于集合 A，记为 $b\overline{\in}A$ 或 $b\notin A$. 有时需要把集合 A 的元素所具有的共同性质明确的表示出来，这时采用符号

$$A=\{x\mid P(x)\}$$

来表示，这里“$P(x)$”表示元素 x 所具有的性质 P，上述符号的涵义就是集合 A 是具有性

质 P 的所有元素 x 所组成的集合.

例 3　大于 3 的,所有实数组成一个集合可表示为

$$\{x \mid x > 3\}.$$

例 4　能被 5 整除的所有自然数组成的一个集合可表示为

$$\{m \mid m = 5n, n \in N\}.$$

如果集合中只有有限个元素,并易于一一列举出来,就可用长括号将它们括起来,例由 1,2,3 三个自然数组成的一个集合可表示为

$$\{1,2,3\}$$

3. 集合的性质

由前面对集合的描述可知,一个集合 A 中的所有元素具有下列三个性质:

性质 1(确定性)　集合 A 中的元素都是确定的或者分明的,对任意一个事物 a,能够判断 $a \in A$ 或 $a \notin A$,二者必具其一,不能模棱两可.

性质 2(互异性)　集合 A 中的所有元素,虽具有共同的特性,但又是互异的,于是,若集合 A 有两个(或多个)相同的元素,则把它们作为一个元素看待,如,集合

$\{1,2,1,3,2\}$ 与 $\{1,2,3\}$ 相同.

性质 3(无序性)　集合 A 的所有元素与它们的排列顺序无关. 如

$\{1,2,3,4\}$ 与 $\{4,2,1,3\}$ 是同一个集合.

二、两个集合之间的关系

定义 1　若集合 A 的任意元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,或集合 B 包含集合 A,简记为 $A \subset B$.

定义 2　若集合 B 包含集合 A,即 $A \subset B$,且集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 是集合 B 的真子集,简记为 $A \subset B$,且 $A \neq B$.

例 5　设

$$A = \{x \mid x > 3\}, B = \{x \mid x > 1\},$$

显然,A 是 B 的子集,且是真子集,即 $A \subset B$ 且 $A \neq B$.

说明:(1)对于任意集合 A,总有 $A \subset A$,即任意集合都是它自身的子集.

(2)为了集合运算的需要,若集合 A 不包含任何元素,则称集合 A 是空集,简记为 $A = \emptyset$.

例 6

$$\{x \mid x \neq x\} = \emptyset,$$
$$\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x > 0\} = \emptyset.$$

(3)空集 $\emptyset$ 是任意集合 A 的子集,即 $\emptyset \subset A$.

(4)集合 $\{0\}$ 不是空集,它是仅由一个元素 0 组成的集合.

定义 3　设 A 与 B 是两个集合,若 $A \subset B$,同时 $B \subset A$,则 $B \subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

说明:证明两个集合 A 与 B 相等,要分两步进行,先证 A 的任意元素都属于 B;其次证 B 的任意元素都属于 A,即 $B \subset A$.

例 7　已知:$A = \{x \mid 4 + c, c \in R\}$, $B = \{y \mid 2 + c, c \in R\}$,求证:$A = B$.

证　(1)先证 $A \subset B$.

若 $x \in A$,则存在 $c_1 \in R$,使 $x = 4 + c_1$ 或 $x = 2 + (2 + c_1)$,因为 $2 + c_1 \in R$,所以 $x \in B$ 嫉 $A \subset B$.

(2)同理可证,$B \subset A$,由(1)、(2)知 $A = B$.

三、集合的运算

定义 4　由集合 A 的元素和集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集或和集,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如图 0-1(a)所示.

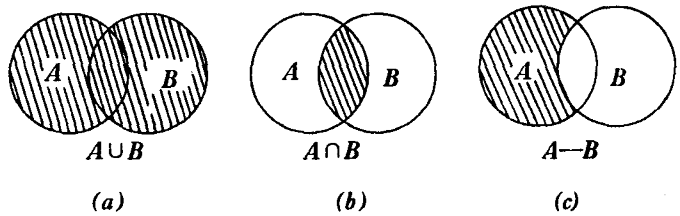


图 0-1

定义 5　由属于集合 A 的元素同时又属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集或乘集,记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如图 0-1(b)所示.

定义 6　由属于集合 A 的元素,但不属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的差集或集合 B 对集合 A 的余集,记为 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

如图 0-1(c)所示.

例 8　$A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{2,3,4,5\}$,则

(1)$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$;(2)$A \cap B = \{2,3,4\}$;

(3)$A - B = \{1\}$.

说明:进一步地,关于两个集合的并集或交集的定义可以推广到有限个集合和无限多个集合的并集或交集.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是无限多个集合

(1)它们的并集记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,即

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid$至少存在某一个自然数 k,有 $x \in A_k\}$;

(2)它们的交集记为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,即

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid$对任意自然数 k,有 $x \in A_k\}$;

例 9　设 $A_n = \{x \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\}$,$n = 1,2,3,\cdots$,则

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\} = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$;

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\}=\{0\}$.

第二节　常用符号

高等数学的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的.一些专门符号在正文中将依次引入,另外还需要引入一些数理逻辑符号和常用的数学符号,数学语言的符号化是现代数学发展的必然趋势,它的引入,既能使定义,定理的叙述和定理的证明过程简洁、明确,易于读者理解、记忆,又能使高等数学的语言与现代数学的语言与现代数学的语言衔接贯通.

一、蕴含符号

1.符号“$\Rightarrow$”表示“蕴含”或“若… 则….”

2.符号“$\Leftrightarrow$”表示“充分必要”或“等价.”

说明:(1)设 P 与 Q 表示两个陈述句;则用“$\Rightarrow$”的符号连接起来就是

$$P \Rightarrow Q$$

表示 P 蕴含 Q,若者有 P 则有 Q.

用“$\Leftrightarrow$”的符号连接起来,就是

$$P \Leftrightarrow Q$$

表示 P 与 Q 等价,若 P 蕴含 $Q(P \Rightarrow Q)$且 Q 蕴含 $P(Q \Rightarrow P)$.

例如,等腰直角三角形$\Rightarrow$直角三角形.

等腰直三角形$\Leftrightarrow$三角形有两个角都等于 45°

(2)命题 $P \Rightarrow Q$ 与非 $Q \Rightarrow$非 P 是等价的,如果要证明命题 $P \Rightarrow Q$ 为真,也可证明命题非 $Q \Rightarrow$非 P 为真即可.

二、量词符号

1.全称量词的符号是“$\forall$”,表示“对任意的”或“对任一的”.

2.存在量词的符号是“$\exists$”,表示“存在”或“能找到”.

例如,$A \subset B$,即集合 A 是集合 B 的子集,也就是,集合 A 的任意元素 x 都是集合 B 的元素,用符号表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

$A=B$ 用符号表示为

$A=B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ 且 $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

三、某些常用数学符号

1.阶乘符号

设 n 是自然数,符号“$n!$”读作“n 的阶乘”,表示不超过 n 的所有自然数的连乘积,如:

$$3!\ =3 \times 2 \times 1.$$

$$5!\ =5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

为了运算上方便,规定 $0!\ =1$.