中学生课外读物丛书

数 学 世 界

根式和一元二次方程

杨安澜 沈为民

上海科学技术出版社

中学生课外读物丛书
数 学 世 界
根式和一元二次方程
杨安澜　沈为民
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行　　江苏泗阳印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 7.375　字数 160,000
1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷
印数 1—7,000
ISBN7-5323-1409-X/G·199
定价：2.30元

编者的话

“宇宙之大，无处不用数学”．即使如文学、音乐、美术也已经找到了它们与数学之间相互沟通的“缕缕情丝”．擅长国画的计算机科学家庞云阶在美国马萨诸塞大学访问时，曾用自己编制的绘画程序，让计算机作了精彩的表演，画出许多栩栩如生的图画，简直赛过近代艺术大师刘海粟、黄宾虹等，轰动了美国科技界和艺术界．

虽然如此，但还有不少人仍认为数学枯燥乏味．其实不然．我国著名数学家华罗庚曾经给中学生们举了一个极简单又生动的例子．他说：“我家有9个人，每人每天吃半两油，一个月(以30天计算)一共吃几斤几两油(当时1斤为16两)？这个问题大家都会算，算式是$\frac{1}{2}\times 9\times 30\div 16$．但是只要稍微动一动脑筋，就会发现还有一种算法：每人每天半两，每人每月就是一斤差一两，9人每月吃油就是9斤差9两，即8斤7两．算起来又快又方便．这样一比较，就知道数学是一门多么有趣、活泼的科学了．因此，我们编写了这本册子，其中包括：《π与e趣谈》、《美丽的黄金数》、《$\sqrt{a}$与有趣的繁分式》、《古老的故事》、《请你回答有关一元二次方程的几个疑问》、《根与系数的桥梁》、《解应用题的关键是什么？》等文章，力图从全方位、多视角地介绍无理数、根式和一元二次方程的有趣的知识、有效的解题方法，这无疑对青少年读者是有益的．

本书包括两大部份，第一部份以“无理数”、“二次根式”的

内容为主；第二部份以“一元二次方程”的内容为主．无理数的出现，在数学发展史上是一个大飞跃，这在我们中学数学学习中也是一个关键，因为这是从具体到抽象的一个转折．方程是从已知探索未知的桥梁，“一元二次方程”和“可化为一元二次方程的方程”是初中数学研究的重点之一，也是初中有关方程知识的总结．本书以深入浅出、博论趣谈、归纳综合的特点，帮助读者逐步达到透彻了解及熟练掌握．

学习数学如同其他学科一样，要使自己成为知识的主人，而不成为知识的容器、书中的“换元法”、“配方法”、“反证法”、“解应用题法”等篇目都是以培养思维能力为目的，浅近地向读者介绍一些逻辑知识，以便提高读者的分析能力及独立处理问题的能力．

本书与《丛书》中其他分册一样，以行文活泼、叙述生动为宗旨，希望能使所有具有初中水平的读者都爱读．

在本书中提到的数学史料和数学小故事等有关材料，系选自有关的书刊杂志，我们对有关的作者谨表示衷心的感谢．

由于编者的水平有限，书中的缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正．

编者

1990年8月

编辑出版说明

本《丛书》是一套为广大中学生提供的课外读物。第一批先编辑出版数学、物理、化学三门学科的分册。目的为了引导学生开发思维，拓广知识视野，充实数、理、化各门学科本身的知识及这些知识在实际中的应用。但所涉及的基本知识不超过全日制中学数、理、化教学大纲所规定的范围。

本《丛书》的特点是知识性与趣味性相结合。注意揭示数、理、化知识本身内在的联系与规律；重视联系实际应用，联系邻近学科，使学生学到的知识能融会贯通；同时适当介绍学科领域里的新进展，以帮助学生开阔眼界。

本《丛书》的体例不拘泥于章节编排，而以专题篇目的面貌出现。各篇内容既有相对联系的系统性，又有相对的独立性，既体现生动活泼，又注意科学严谨。适合于广大初、高中学生阅读。

在组织编写本《丛书》的过程中，得到了上海市教育局教研室有关同志的热忱指教和协助，在此致以衷心谢意。

由于编写出版时间仓猝，《丛书》中的缺点及不当之处在所难免，欢迎广大读者提出批评指正。

目　录

〔一〕

无理数是没有道理的数吗?

1 无理数的由来和确立

古代，人们在建屋、架桥、防洪、治水等实践过程中，往往要研究一些几何图形，尤其是直角三角形。人类就是从这里发现无理数的。

在公元前 550 年，希腊数学家毕达哥拉斯 (Pythagras) 发现了在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方(即我国早就发现的勾股定理)。传说毕达哥拉斯发现此定理时，十分高兴，广宴宾客，宰了一百多头牲畜来祭缪斯女神(神话中掌握管理文艺、科学的女神)，以酬谢神的默示。在应用勾股定理求直角三角形的某一边时，必然要把一个数开平方，而开平方不是都能开得尽的，开不尽的数是什么数?这就引起了毕达哥拉斯学派的困惑。因为毕达哥拉斯学派坚信宇宙万物总可以归结为简单的整数或整数的比。而任何两条线段之比总可以用分数来表示，当时把分数看作两个整数之比.传说有个毕达哥拉斯学派的门徒希伯苏斯(公元前五世纪)在一次航海时，发现了正方形的对角线与它的一条边是不可通约的，也就是说它们的比不能用分数表示。这个事实可以用反证法证明如下:

设正方形的边长为 a，对角线为 b，由勾股定理得：$b^2=$

$a^2+a^2=2a^2$，所以$\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$，然而，却不存在一个分数，它的平方等于2。假定存在，我们可以令整数p与q满足$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，不妨假设$p$与$q$没有公因子，即$\frac{p}{q}$是一个既约分数，就可得到$p^2=2q^2$，这表明$p$是一个偶数，设$p=2m$，$m$是一个整数，于是又有$(2m)^2=2q^2$，即$2m^2=q^2$，这又表明$q$也是一个偶数，从而与$\frac{p}{q}$是一个既约分数的假设矛盾。所以正方形的对角线与它的边的比不能用分数表示，也就是说两者是不可通约的。

希帕苏斯的发现引起了其他毕氏门徒的极大恐慌。希帕苏斯因为违反了毕氏学派的信念而被扔进大海，企图严禁泄露这个发现。然而，人们还是很快就发现正方形的边长与对角线的不可通约性，这个并不是罕见的现象。如面积等于3、5、6、……，17的正方形的边与单位正方形的边也是不可通约的。随着时间的推移，无理数的存在逐渐成为路人皆知的事实。也就是说，人们肯定了$\sqrt{2}$是一个数，它既不是整数也不是分数。此事实如洪水般地冲击着传统观念，促使人们重新审视号称"天衣无缝"的有理数理论。引起了数学史上第一次基础理论的危机。

公元十六世纪后期，人们在研究小数时，发现有理数化为小数不外是有限小数和无限循环小数两种$\left(\text{如}2=2.0,\ \frac{1}{2}=0.5,\ \frac{2}{3}=0.\dot{6},\ \frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}\right)$。很自然地想到：无限不循环小数属于什么数？进而发现可以用无限不循环小数表示无理数。这样初步确立了无理数的概念。

在无理数中可以分成两大类：一类是带有根号的，如

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ……；另一类是不带根号的，被称为超越数。如 $\pi=3.1415926\cdots\cdots$，$e=2.718281\cdots\cdots$，$0.1010010001\cdots\cdots$，在十九世纪中叶，数学家玛洛（M′eray），威尔斯特拉斯（weiertrass），戴德金（Dedekind），康托（Contor）先后以不同的形式研究了无理数，这时无理数的理论基础才开始奠定。从不可通约量的发现到无理数、实数的一般定义的建立，一共经历了两千多年漫长的时间。这说明一个抽象概念的产生与精确定义的形成是何等困难啊！

2 无理数名称的来历

“有理数”与“无理数”这两个名词是从国外翻译过来的。有理数一词英文是“Rational-number”其中“Rational”究其词根，含义有二：一是“比率”，二是“合理”。从数学的含义来看，应该取前者，所以“有理数”实际上是比数，而无理数——“irrational-number”实际是“非比数”。但是由于误译而一直沿用到现在。

最早的译名来自1607年徐光启等人译的《几何原本》前6卷和1857年李善兰等人译的后9卷。《几何原本》是我国最早的第一部从拉丁文译过来的著作。在翻译时无对照的词表可循，许多译名都是从无到有，当时创造的。徐光启、李善兰笔下的“理”字在当时应作“关系”、“比率”的意思。我们懂得这一点后，就不要望文生义，把无理数看成为“没有道理的数”。

3 谁最先使用符号$\sqrt{\ }$

在$\sqrt{2}$中，平方根的符号$\sqrt{\ }$原先并不是这个样子，经过几个世纪的进化才算确定了下来。1220 年意大利人里纳昂多第一次用符号 ℞ 来表示根号，这个符号是从拉丁文 Radix 取它的头尾两个字母合併得来的。1480 年前后，德国人用一个点(·)来表示平方根，到十六世纪初，小点带上一条尾巴，变成，1525 年路多尔夫用“$\surd$”来表示平方根，直到十七世纪初叶，法国数学家笛卡儿在他的著作《几何学》中第一次用“$\sqrt{\ }$”表示根。其中“$\sqrt{\ }$”包含两个意思：“$\surd$”是由拉丁字母“r”演变而来，它的原词为“root”是方根的意思，上面一条横线(——)是括线，相当于现在常用的括号，平方根的符号“$\sqrt{\ }$”就一直用到现在。

4 有关无理数的论证问题

(1) 证明$\sqrt{5}$是无理数。

用反证法证明：假设$\sqrt{5}$是有理数，就能表示成$\sqrt{5}=\frac{m}{n}$(其中 m,n 是互质的自然数)，从而

$$5n^2=m^2.$$

即 m^2 能被 5 整除，而 5 是质数，因而 m 能被 5 整除。现令 $m=5m'$，则

$$5n^2=(5m')^2, \quad \therefore \quad n^2=5m'^2.$$

由此，n 也能被 5 整除，这与 m、n 互质相矛盾。

所以$\sqrt{5}$不是有理数，即$\sqrt{5}$是无理数。

请读者不妨用反证法证明$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，…，等等是无理数。

事实上，以下几种常见的无理数，都可以用上述方法证明它们的无理性。① 设N、n都是正整数，且$\sqrt[n]{N}$不是整数，则它必是无理数。如$\sqrt{10}$，$\sqrt[3]{9}$，……；② 设p、q是无公因式的正整数，且$\sqrt[n]{p}$、$\sqrt[n]{q}$不同时为整数，则$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$是无理数。如$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$，……。

(2) 若$\sqrt{5}$是无理数。

① 试证明$1+\sqrt{5}$也是无理数；

② 试问：若a是有理数，则$a+\sqrt{5}$是什么数？并证明你的判断；

③ 若a是实数，则$a+\sqrt{5}$是什么数？并证明你的判断。

证明：① 假设$1+\sqrt{5}$是有理数，就能表示成

$$1+\sqrt{5}=\frac{n}{m}\quad（其中 m、n 是互质的自然数），$$

$$\therefore\quad \sqrt{5}=\frac{n-m}{m}.$$

因此，$\sqrt{5}$可以用一个既约分数表示，即$\sqrt{5}$应是有理数，这与$\sqrt{5}$是无理数矛盾。

所以$1+\sqrt{5}$不是有理数，而是无理数。

② 用上述同样方法可以推出

$$\sqrt{5}=\frac{n-am}{m}.$$

由于m、n、a均是有理数，所以它们四则运算的结果仍是有理数，这与$\sqrt{5}$是无理数矛盾。所以$a+\sqrt{5}$（a为有理

数）也是无理数。

⑧ 当 a 是有理数时，$a+\sqrt{5}$是无理数；当 $a=-\sqrt{5}$ 时，$a+\sqrt{5}=-\sqrt{5}+\sqrt{5}=0$是有理数。所以，当 a 是实数时，$a+\sqrt{5}$不能确定是有理数还是无理数，但 $a+\sqrt{5}$是实数。

从上面的论证题中，读者可以想一想，有理数四则运算的结果仍是有理数，而无理数四则运算的结果是否一定仍是无理数呢？无理数与有理数经过四则运算的结果又是什么数？

读者不妨举$\sqrt{2}$与$-\sqrt{2}$的四则运算为例，就可以得出如下结论：

无理数四则运算的结果不一定是无理数。

那么，无理数和有理数经过四则运算的结果是否一定是无理数呢？举一例 $0\cdot\sqrt{2}=0$，就可得出正确的答案。

(3) 如果 A、B、P、Q 都是有理数，$\sqrt{P}$、$\sqrt{Q}$是无理数，那么要使 $A+\sqrt{P}=B+\sqrt{Q}$成立，必须且只须 $A=B$，$P=Q$。

证明：由 $A+\sqrt{P}=B+\sqrt{Q}$ 经移项后，得

$$A-B+\sqrt{P}=\sqrt{Q}.$$

将上式两边平方，得

$$(A-B)^2+2\sqrt{P}\cdot(A-B)+P=Q,$$

$$\therefore\quad (A-B)^2+(P-Q)+2(A-B)\sqrt{P}=0.$$

A、B、P、Q 都是有理数，所以$(A-B)^2+(P-Q)$也是有理数。而$(A-B)$是有理数，$\sqrt{P}$是无理数，从而得

$$\begin{cases}(A-B)^2+(P-Q)=0, & ①\\ A-B=0. & ②\end{cases}$$

由②式，得 $A=B$，代入①式，得 $P=Q$。

反过来，当 $A=B, P=Q$ 时，显然有

$$A+\sqrt{P}=B+\sqrt{Q}.$$

∴ 命题得证。

想 与 练 (一)

1. 如果 a, b 是有理数，$\sqrt{m}$是无理数，那么要使 $a+b\sqrt{m}=0$，必须且只须 $a=0$，$b=0$。

2. 若 a、b、c、d 是有理数，则

$$a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c+\sqrt{6}d=0$$

仅限于 $a=b=c=d=0$ 时成立。试证明之。

〔二〕

π 和 e 趣谈

1 记号 π 和日益精确的 π

圆周率 π，即圆周长和直径的比值。是实际应用和理论研究中的重要数据。

圆周率 π 是希腊文 $\pi\varepsilon\rho ed\varepsilon\rho e\alpha$（圆周）的第一个字母。这是 1647 年英国数学家奥托兰特（W. Oughtred, 1574—1660)首先采用的,到 1737 年在瑞士大数学家欧拉(Euler)的影响下,才得到全世界公认。

有位著名的数学家曾说过:“历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展的标志”。早在公元前二世纪，我国在以天文学为主要内容的《周髀算经》中,记载着“周三径一,”即取 $\pi=3$.后人称为“古率”.人们在实践中逐步认识到，用古率计算诸如圆周长或圆面积时,所得到的值误差很大。人们又不断地实践,探求 π 的精确值。后来,人们认识到,可以用圆内接或外切正多边形来近似地代替圆，以确定 π 值。当多边形的边数越大时，得到的 π 值也越精确。

至今，在有记载的计算 π 值的完整方法中，最早最有价值的要算我国魏晋时代的数学家刘徽(生于三国时代,死于晋初）和古希腊数学家阿基米德（Archimedes)（公元前 287～

公元前 212 年)的方法。刘徽在《九章算术》中用作圆的内接正多边形的"弧矢割圆术"计算 π: 他在以一尺为半径的圆内，作圆内接正六边形，然后逐渐倍增边数，计算出正十二边形、正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形和正一百九十二边形的面积。刘徽求得最后一个多边形的面积是 $314\frac{64}{625}$ 平方寸。于是就得到:

$$3.141024<\pi<3.142704.$$

他进而由四舍五入给出准确到两位小数的 π 值: $\pi\approx3.14$。在用于计算时，他还作了"此率尚微小"的声明。当他一直算到圆内接正 3072 边形时，进一步又得到 $\pi=\frac{3927}{1250}=3.14159$。刘徽将古率 $\pi=3$。提高到 $\pi=3.14$，这是一次重大的突破，为了表彰刘徽的功绩，历史上将 3.14 称为"徽率"。刘徽不但提高 π 的精确度，而且在算术、代数、几何等方面也曾做出巨大贡献。

古希腊亚历山大学派的大数学家阿基米德在《圆的量度》一文中，利用外切与内接 96 边形求得圆周率 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，从而得到了公元前 π 的最好的近似值，即上述两端二限的算术平均值为 3.1419。

到了我国南朝(公元 429～500 年)，也就是刘徽死后二百多年，祖冲之把圆周率的精确值一下子提高到小数点后面第七位。即

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

是世界上第一个计算 π 达到这样辉煌成绩的人。这一精确度，在长达一千年时间中，一直处于全世界的领先地位。祖冲

之还把这个值有意识地化成便于记忆的分数：形如 $\frac{355}{113}$ 称为密率；$\frac{22}{7}$ 称为约率。祖冲之的推算方法原载于他的《缀术》一书中，可惜原书在北宋元丰七年（1084 年）刻印各种算经时即已失传。但我国后代的数学家多认为他也是采用了"割圆术"。因为采用此术算到圆内接正 24576（即 6×2^{12}）边形时，可得面积 $S_{24576}=3.14159261$，又 $S_{12288}=3.14159251$。由此推得：

$$3.14159261<\pi<3.14159271.$$

若删去不甚可靠的最末位数 1，便得到了祖冲之所求得的数。到了十六世纪才由德国的渥脱（Otto）等重新求得，他比祖冲之晚了约 1100 年。因此，已故日本数学家三上义夫曾建议把 $\frac{355}{133}$ 叫做"祖率"，以纪念祖冲之的贡献，这种叫法在解放后已通行全国。

以后各国数学家以及数学爱好者们还在不断地计算 π 的值，不断地取得新的进展。

1761 年前后，德国数学家兰勃特（J·Lambert 1728～1777）和林德曼（F·Lindeman, 1852～1939）分别证明了 π 是无理数。它只能用一个无限不循环小数表示。也证明了 π 不满足任何整系数的代数方程，即为超越数。

电子计算机出现后，π 值的计算有了飞速的进展。1949 年美国人 Reitioesner 用 ENIAC 的电子计算机，运算了七十多小时，把 π 的值计算到 2037 位小数。1984 年，日本的两位数学家用大型电子计算机把 π 的值算到了小数点后面 800 万位。在漫长的小数中没有循环的迹象，在不断地验证着"π 是无理数"。

1973 年法国的两位女数学家吉劳德和波叶把用电子计

算机求得的 π 小数点后一百万位数，出了一本厚达200页的书。可见人们何等重视这些数据。下面我们把 π 的一百位小数值写出来，帮助读者训练一下大脑，看看自己最多能够记忆到哪一位。

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$$
$$41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164$$
$$06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ \cdots\cdots$$

2 e 的 来 历

16 世纪前后，欧洲资本主义迅猛发展起来，随着货币交换的频繁，天文航海的发达，需要大量复杂的计算。人们迫切地需要改进数字计算的办法。苏格兰数学家纳布尔 (John. Napier, 1550～1617)经过长期的探索发现了对数，从而大大地简化了计算的步骤。天文、物理学家伽里略甚至说“给我空间、时间及对数，我即可创造一个宇宙”。纳布尔在创立“自然对数”中就选用了 e 为对数的底。

e 是一个无理数，也是超越数。用无穷级数表示为：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}{}^{*)} + \cdots.$$

用小数写出来，得

$$e = 2.71828\ 18284\ 59049\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249$$
$$77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967\ 62772\ 40766$$
$$30335\ 35475\ 94571\ 38217\ 85287\ 66427\ 42746$$
$$63919\ 32003\ 05992\ 18174\ 13596\ 62904\ 357\cdots$$

*) $n! = 1.2.3.\cdots n.$