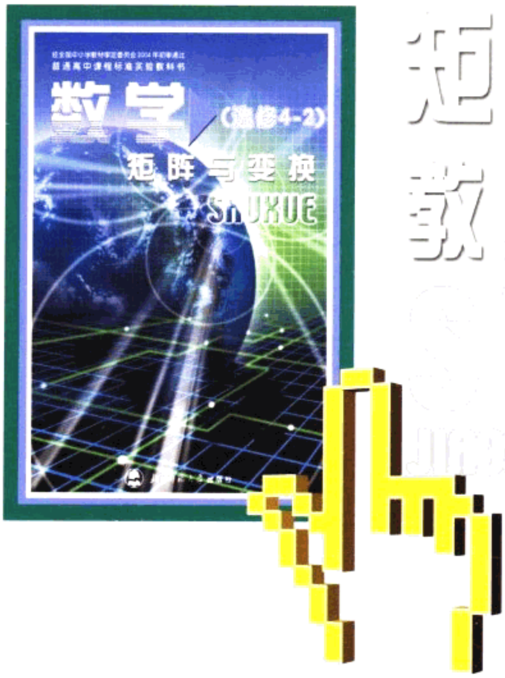
普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

教师教学用书



SHUXUE

JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU

北京师范大学出版社

前　言

本书是北京师范大学出版社 2004 年 9 月出版的《普通高中课程标准实验教科书·矩阵与变换(选修 4－2)》的配套教师用书，其内容是介绍本册教科书的教学目的、教学内容及课时安排建议、教学建议、评价建议，同时还提供了本册教科书各章节练习、习题、复习题的参考答案或提示，供执教教师在教学中参考使用.

本书由檀晋轩编写，全书由张饴慈统稿审定. 希望各执教教师、教研员能在教学实践中继续不断总结，不断创新，用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书，使得课程改革的基本理念和《普通高中数学课程标准(实验)》所设定的课程目标得以真正落实。

2004 年 9 月

概　述

矩阵是线性代数的研究对象和重要工具. 矩阵的发展源于解线性方程组的问题. 线性方程组可以用矩阵表示，利用矩阵可以研究线性方程组是否有解、有多少解和怎样求解等理论问题. 矩阵又是刻画线性空间的线性变换的重要工具，在生产、生活和科学研究中有着广泛的应用.

对于在数学方面基础较好且有兴趣的中学生，为了拓宽数学视野，提高数学素养，应该适当学习了解一些高等数学的知识. 目前介绍矩阵知识的教材，大多是从代数的角度，作为一种新的运算对象加以讨论，概念、理论较抽象，运算量大，容量较多，对中学生而言比较难以理解和掌握. 本教材并不是系统地介绍矩阵的知识，而是希望更多地揭示矩阵的几何背景，把矩阵作为表示几何变换的工具，讨论矩阵的性质、作用和简单运算. 并且我们的讨论仅限于二阶方阵的情况. 突出几何是本教科书的重要特点之一.

教科书一方面力求简易直观，通俗易懂，另一方面还希望通过整个专题的内容，渗透一些基本的数学思想方法，让学生初步了解矩阵的一些基本知识，给学生建立一个新的数学模型. 教科书无论是对概念的阐述，还是对性质、公式的讨论，都利用了大量的具体实例，希望学生通过具体的操作，如计算、画图等手段形成初步的认识，而后逐步加深理解、抽象概括. 因此教学中既要重视对具体实例的分析，形象直观的操作，又不能仅仅停留在实例表层，还要重视传递给学生一些必要的数学理念. 知识体系由浅入深、逐步完善是本教科书的又一重要特点.

教科书的每一章都配备了一定量的例题、习题和复习题，同时又根据问题难度划分了不同层次. 这样编排既有利于学生巩固知识，也有利于教师分层教学. 并且，在例题和习题中，都有意识地设计了一些应用型问题，既可以提高学习兴趣，又能加强学生数学应用的意识.

本专题是为对数学有兴趣和希望进一步提高数学素养的学生而设置的，因此对学生学习的评价，既要重视学生对知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教师对学生的评价，又要重视学生的自评与互评.

评价学生学习过程时，应关注学生是否积极主动地参与教学活动，是否愿意与同伴合作交流，是否能理解并有条理地表达数学内容，是否不断反思并改进学习方法.

评价学生对相关知识、技能的理解与掌握时，应关注学生是否能深入理解矩阵概念、运算及性质的几何背景，是否能举出一定数量的用于说明问题的正例和反例并正确运用数学语言进行表达；是否能正确地进行矩阵与向量的乘法、矩阵的乘法运算，并把矩阵的运算纳入已有

的运算体系中;是否能恰当选择公式和方法,求出逆矩阵、矩阵的特征值和特征向量.

评价学生数学能力时,应注重激发学生自主学习能力的提高;关注学生是否善于发现问题和提出问题并联系相关知识的信息尝试着解决问题,是否既能独立思考又能与他人很好地交流,是否能够对解决方案进行质疑、调整和完善,是否能将解决方案与结果进行准确地表述并进行分析、讨论或应用.

上述评价建议分为两部分进行记录并反馈给学生,一部分是笔试的定量评价结果,侧重于知识、技能和能力的考查;另一部分是定性的评价,这一部分除了对平时上课、作业、讨论的评价外,还要有对学生最终的总结报告进行评价,对学生的报告不必追求全面严谨,对于学生工作中的闪光点应特别鼓励. 对于学生中的优秀论文,除作为评价进行记录外,还可以采取表扬、评奖、推荐发表、编辑出版、向高等学校推荐等多种形式进行激励.

总之,应将评价贯穿学习的全过程,既要发挥评价的甄别与选拔功能,更要突出评价的激励与发展功能.

目　录

引　言

一、教学目标

1. 掌握矩阵的概念，了解转移矩阵、相邻矩阵、系数矩阵及其在生产生活中的应用.

2. 通过大量实例激发学生的学习兴趣，拓宽学生的数学视野，同时发展学生的数学应用意识.

二、内容分析和教学建议

教科书通过两个实例，引入了矩阵，在学生对具体的矩阵有了初步认识后给出矩阵的一般概念，然后又用了两个实例让学生进一步熟悉矩阵这一新的研究对象，同时简单介绍了转移矩阵、相邻矩阵、系数矩阵以及它们在实际生产生活和科学研究中的应用，初步展示了矩阵应用的广泛性.

教学中在引入矩阵概念时，不要急于介绍抽象的符号和概念，应该从具体的矩阵入手，注意捕捉学生所熟悉或感兴趣的一些实例，让学生体会，矩阵作为数表，可以方便地记录和表示所研究对象之间的关系，它由实际需要中产生，又广泛地应用于实际生产、生活和科学研究. 由此让学生感受到矩阵是数学上十分有用的工具.

转移矩阵在气象学、化学、生物学等研究中都会被广泛使用，用以反映连续实验，种群发展的规律和趋势；相邻矩阵是图论中的一个基本概念，反映点与点之间的连接关系. 这些概念在相关学科中都很重要，在本专题中只限于让学生有一个初步认识，不需强调概念名词. 在教学中要让学生通过实例体会，矩阵是如何刻画对象间的关系的. 对于给定的矩阵，要引导学生尽可能用自己的语言对关系、规律和趋势进行描述；反之，也应让学生学会运用矩阵来刻画一些实际问题中的关系、规律和趋势. 例如，给出图的相邻矩阵，要求学生能用自己的语言描述点与点间的连接关系，并能画出矩阵所表示的图；反之，对于给出的图，也要求学生能写出图的相邻矩阵.

矩阵的重要应用之一就是利用矩阵研究线性方程组的相关问题. 本专题在第一章中要求学生用映射与变换观点认识解线性方程组的意义，在第四章中通过具体的系数矩阵讨论了线性方程组的存在性、唯一性，并利用逆矩阵求解线性方程组. 因此，学生首先要熟悉线性方程组的矩阵表达形式. 对于系数矩阵、增广矩阵等概念，要求学生理解，并能熟练地进行不同形式间的相互转化.

在教学中，教师可以根据学生的具体情况，开发出更多、更广泛的实例，或者让学生收集一

些应用矩阵的实例，并进行相互交流. 有条件的还可以利用各种信息技术来演示、呈现课程内容，以达到教学目的.

本内容需 1 课时.

第一章　平面向量与二阶方阵

一、教学目标

1. 了解向量的物理背景，切实掌握向量的几何、代数表示方法，理解平面上由原点出发的向量与平面上的点一一对应关系.

2. 掌握向量的加、减及数乘运算，并理解运算的几何意义. 对给定的具体向量能进行分解.

3. 理解平面向量共线的条件，能推导直线的向量方程.

4. 能熟练地进行二阶方阵与平面向量的乘法运算，并理解其几何意义.

5. 能用映射与变换的观点认识线性方程组.

二、教学内容及课时安排建议

§1	平面向量及向量的运算	1 课时
§2	向量的坐标表示及直线的向量方程	1 课时
§3	二阶方阵与平面向量的乘法	1 课时

三、内容分析和教学建议

本专题要实现从几何变换的角度认识矩阵的作用这一目标，必须要以理解平面上由原点出发的向量与平面上的点是一一对应为基础，并涉及一些向量的基本知识. 如第二章研究矩阵变换的性质时，将涉及平面向量的加、减、数乘运算及几何意义，还涉及直线的向量方程；第五章研究矩阵的特征向量的好处时，涉及共线向量及向量分解等知识. 为了使没有系统学习过平面向量知识的学生能够学习本专题，教科书在这一章首先分两节初步介绍了上述相关的平面向量知识. 在教学中，宜采取搭建平台的方式让学生尽快认识并能初步应用这些知识，从而理解本专题的相关内容，不必追求向量知识体系的完整和深入，以免喧宾夺主. 对于已经学习了平面向量知识的学生，可以考虑以复习的形式，对专题中涉及的内容进行必要的回顾整理，并适当压缩课时.

本章第三节介绍二阶方阵与平面向量的乘法法则及几何意义，并用映射观点重新认识二元一次方程组. 这一节为整个教科书奠定了几何的基调. 因而，教学中在要求学生掌握代数运算法则的同时，更强调学生对运算几何意义的理解，这一点十分重要，是教学的重点.

§1　平面向量及向量的运算

1. 首先由物理背景(位移、速度、力等)引入向量概念,进而由物理学中表示位移的方法自然地引出向量的几何表示——有向线段,并由合位移引出向量的和的概念,并介绍了数乘向量及向量的差. 在这一过程中,尽可能直接切入主题,以位移(或力)这样学生非常熟悉的知识来体现向量的物理背景.

2. 向量作为代数的对象,定义了加法后理应研究加法运算满足的规律,这里只是类比数的加法、乘法的运算律,利用向量加法的三角形法则,从几何上用一种特例,直观展示了向量加法满足结合律和交换律,并未进行全面严格的证明. 而对于数乘向量对加法的分配律,有条件的可作类似的介绍,在此对学生不作要求.

3. 对于两个向量的差,是利用向量的和结合负向量进行定义的,即把减去一个向量看作是加上该向量的负向量. 并且,在后面讲向量运算的坐标表示时,只提加法和数乘运算,而不提减法运算. 这样安排突出了加法和数乘运算,更科学、合理,在教学中也应该注意分清主次.

4. 教师应该注意的是,由于数学中研究的向量是自由向量,即只考虑向量的大小和方向,而与起点位置无关. 这样平面中的两个向量总可以通过适当平移,使它们起点重合. 因而,说两个向量平行和说两个向量共线是一回事.

§2　向量的坐标表示及直线的向量方程

1. 在介绍平面向量的坐标表示时,是利用 x 轴和 y 轴正方向的单位向量作为一组基向量,对平面内的任意向量进行正交分解. 把分解系数组成有序实数对,作为向量的坐标. 这种讲法,首先从直观上展示了向量的坐标与点的坐标根本是一回事. 在此,应利用大量具体向量与点的实例,让学生体会到以原点为起点的所有平面向量与平面内的所有点是一一对应的. 这一认识对下一节理解矩阵乘向量的几何意义至关重要. 其次,在这个过程中直接得出了任意向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,总可以用基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

这一重要结论,体现出基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的重要作用. 另外,对于程度好的学生,可以鼓励他们结合上述思想,利用(1.3)式试着证明向量运算的坐标表示. 但是,对于平面向量运算的坐标表

示，只要求学生会运用法则进行运算，对法则并不要求证明. 教科书中的图示也只是帮助学生更直观地理解法则，并不是证明.

2. 直线的向量方程，是综合运用前面一系列知识解决问题的一个实例. 又是后面讨论矩阵的性质时要用到的一个重要结果，在教学中要给予足够的重视，既要强调结果的记忆与理解，又要强调探索求解过程的理解，特别是对方程中每一个向量所对应的几何意义要十分清楚. 教学过程中要结合直线、点、向量的具体数据，以及具体图形进行分析，逐步进行抽象概括、有条件的学校可以采用信息技术帮助学生理解这部分内容.

3. 作为向量基本定理的特例，平面上的任意向量，总可以由两个不共线的平面向量线性表示，且表示方法唯一. 即平面上任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线，则一定存在实数对 s,t，使 $\boldsymbol{\alpha}=s\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+t\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立. 这一理论是向量知识体系中的重要内容，且本专题在讨论特征向量的作用时还将运用，但由于它太抽象，不易理解，本教科书并未直接介绍这一知识，只是在例题和习题中，利用具体的向量、具体的数，作了简单表述，教师可以在处理这部分题目时，有意识地作适当渗透，引导学生体会.

§3　二阶方阵与平面向量的乘法

1. 本节一开始就奠定了整个专题的基调，即把矩阵作为刻画点的运动、研究图形（向量）变换的工具来认识. 这样，在后面介绍矩阵运算及运算性质的同时，突出了矩阵的几何意义，并借助几何意义更好地理解代数运算及运算性质.

2. 在介绍二阶方阵（左）乘平面向量的几何意义的时候，教科书上分了以下三个层次：

第一层次，通过本节例 1 及其后的实践活动中大量具体矩阵、具体向量（点），进行具体运算和画图，让学生充分体会到，矩阵乘向量的作用是把一个向量变成另一个向量，即把一个点变成另一个点；

第二层次，在第二章的第一节中，通过大量具体矩阵、具体简单图形的具体运算和画图，让学生体会，在矩阵的作用下，一个平面图形变成另一个平面图形；

第三层次，通过对具体矩阵对一般向量（点）的运算结果进行分析，由映射与变换观点看，二阶方阵就是平面点集到平面点集的变换.

教学中注意把握层次，逐步引导学生加深认识，渗透映射与变换的思想观点. 这样，有利于发展学生的思维水平，并且，当学生进入大学进一步学习 $m\times n$ 矩阵（n 维超平面点集到 m 维超平面点集的一个映射）时，可以以具体的二阶方阵为实例，帮助学生更好地理解抽象概念和理论.

其中，映射与变换的概念如下：

集合 A 到集合 B 的对应法则 f，若满足对集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有像，且

像唯一，则称法则 f 为集合 A 到集合 B 的一个映射. 而一个集合自身到自身的映射就称为该集合的一个变换.

3. 本节的最后，用映射与变换的观点重新理解二元一次线性方程组，即看作是在系数矩阵的作用下，把未知向量变成了已知向量. 让学生体会，对同一事物可以有不同的认识视角，进而可以引出不同的知识理论. 这一点十分重要.

事实上，矩阵是源于解线性方程组，矩阵的发展又进一步促进了线性方程组理论的发展.

另外，对于二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1,\\-x+4y=3\end{cases}$$

还可以表示为向量的形式

$$x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

由此也可以用向量知识理解为向量 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 如何由向量 $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ 线性表示.

在高等代数中，矩阵、向量及线性方程组的知识是相互关联、相互穿插的.

4. 对学有余力的学生，可以引导他们模仿本节思路，进一步研究三阶矩阵对空间向量的作用及三元一次方程组的重新认识，对特别有兴趣的学生可以指导他们用学过的思想观点去理解认识高等代数中的相关内容.

四、知识拓展

本专题只介绍了平面向量(即二维向量)的概念、运算及性质. 这部分内容的一个直观自然的推广就是三维向量. 三维空间向量与平面向量类似，也可以有几何和代数两种表示. 在三维空间中，三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 若共面，则其中一个向量可以由另外两个向量线性表示，如 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$；三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 若不共面，则可以构成一组基，空间内任意向量 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}.$$

当然，这样的基不唯一. 特别地，单位向量 $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 不共面，构成一组基，称为标准基，空间内任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

这里形成的有序数组 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 下的坐标. 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 起点在原点，(a_1,a_2,a_3) 刚

好就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点 P 的直角坐标，于是有序数组 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 与空间内的点及由原点出发的向量形成一一对应.

同样地，我们可以定义三维向量的两种运算——加法(记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$)和数量乘法(简称数乘，即实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相乘，记作 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$)，这两种运算是封闭的(即运算结果仍是三维向量)，并满足如下 8 条运算规则：

1. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$； (加法结合律)
2. 存在零元，即零向量 $\mathbf{0}$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；
3. 任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；
4. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$； (加法交换律)
5. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$； (数乘结合律)
7. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$； (数乘分配律)
8. $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$ (数乘分配律)

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是任意三维向量，λ,μ 是任意实数.

可以对三维向量进一步推广为 n 维向量，即数域 F 上的 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的有序数组. 同样地可以定义 n 维向量的加法和数乘运算，它们也都满足上述 8 条运算规则. 平面向量的共线，三维向量的共面推广到 n 维向量即是线性相关性. 通过讨论 n 维向量空间中的向量关于线性运算的线性相关性，可以完满地阐述线性方程组的解的理论.

在全体 n 维实向量作成的集合中，定义了向量的加法和实数与向量的数乘运算，就称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间(记作 $\mathbf{R}^n$). 进一步推广抽象为线性空间概念. 所谓数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合，它带有两个运算——加法和数乘(即 F 中的数 λ 与 V 中元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 相乘)，且 V 对两种运算封闭并满足上述 8 条运算规则.

线性空间是一个抽象的代数结构. 显然，二维向量空间、三维向量空间是线性空间的具有几何背景的具体模型. 对于这样的具体模型的理解与掌握，十分有利于进一步学习和理解 $\mathbf{R}^n$ 及线性空间.

当然，我们以前提到的都是有限维线性空间，事实上线性空间还有其他一些具体模型，如，数域 F 上的全体多项式 $F[x]$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成 F 上的线性空间；又如，区间 $[a,b]$ 上的全体实连续函数，对通常的函数加法和数与函数的乘法运算构成实数域上的线性空间等等，都是无限维线性空间的例子. 有兴趣的老师可以参看大学的《线性代数》或《高等代数》相关的内容.

第二章　几何变换与矩阵

一、教学目标

1. 通过大量具体的矩阵对平面上给定图形(如正方形等)的变换,认识矩阵变换中的一些常见变换.如:恒等变换、反射变换、伸压变换、旋转变换、切变变换和投影变换.

2. 能证明矩阵变换的性质,即 $\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M\alpha})+\mu(\boldsymbol{M\beta})$. 并理解矩阵表示的变换,是把直线或变成直线,或变成一个点的变换,即矩阵变换是线性变换.

3. 使学生初步建立映射与变换的观点.

二、教学内容及课时安排建议

§1	几种特殊的矩阵变换	2课时
§2	矩阵变换的性质	2课时

三、内容分析和教学建议

本章内容包括两大节,§1几种特殊的矩阵变换,首先给出了映射概念,明确矩阵就是一个几何变换,并详细介绍了表示反射变换、伸压变换、切变变换、旋转变换及投影变换矩阵. §2矩阵变换的性质,先用问题"矩阵变换是不是把直线变成直线"引出对矩阵变换性质的探索,得出并证明了矩阵变换最重要的性质,即 $\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M\alpha})+\mu(\boldsymbol{M\beta})$. 然后又回答了本节开头的问题,即矩阵变换把直线或者变成直线,或者变成点.

本章内容是整个专题的基础(把矩阵作为表示图形变换的基本工具)而映射与变换的概念及矩阵变换的性质都十分抽象,学生并不容易理解.因此,教师必须引导学生通过具体的计算和画图等操作,逐步加深对上述概念及性质的理解,从而建立起映射观点,以利于对后面知识的学习和理解.在课堂教学中也必须留给学生足够的思考空间和理解过程.对于学生有意义的思考和探索应及时给予鼓励和肯定.

抽象问题具体化是一种有效的教学方法,而具体问题抽象化的归纳过程是重要的数学思想方法,在教学中首先要运用大量的具体数的计算,并辅之以具体图形让学生操作练习,但不能仅停留在此,具体数的计算和图形变换的主要目的还是要让学生体会和认识一些有价值的数学规律.

本章的很多内容可以用信息技术帮助学生加深理解,教材中只列举了两个比较典型的例子,这两个例子在信息技术应用的介绍中都是具有开放性的,方法可以平移到其他内容中.另

外老师们也可以进一步开发出更多、更好的辅助手段，以实现教学目标.

§1　几种特殊的矩阵变换

1. 平面图形常见的几种变换有：恒等变换、平移变换、反射变换、伸压变换、切变变换、旋转变换及投影变换等. 这些变换从直观上学生大多数都熟悉，这一节是让学生体会到这些几何变换可以用代数形式刻画并研究. 其中除平移变换不是本专题研究的内容外，其余变换都可以用矩阵来表示. 教学中应把重点落实在让学生体会给定矩阵的作用，并最终逐渐熟悉表示这些变换的矩阵，并不要求学生一开始就能构造满足某种变换规律的矩阵.

2. 对于反射变换、伸压变换及切变变换等初等变换矩阵，在大学教科书中是从代数角度用初等变换定义的. 即单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等方阵. 其中的初等行(列)变换为：

(1)互换两行(列)的位置；

(2)用一个非零数乘某一行(列)；

(3)把某一行(列)的倍数加到另一行(列)上.

这样，用初等方阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行了一次相应的初等行变换；用一个初等方阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行了一次相应的初等列变换. 而二阶初等方阵只是其中的一个特例. 如反射变换矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 就表示两行(列)互换；伸压变换矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$ $(k\neq0)$ 就表示用 $k(k\neq0)$ 乘矩阵的第二行(列)；切变矩阵 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 就表示把第二行(列)的 k 倍加到第一行(列)，等等.

在本专题里，这些初等变换矩阵是从它们对平面上点(向量)的作用出发，由它们所表示的几何变换进行定义的，并未从代数角度分析矩阵乘法中的作用，而是突出了它们的几何意义.

在教学中，应该延续上一章第三节中的层次步骤，不要急于从抽象的符号中给出几何变换的概念，一定要用大量的具体向量(点)，通过具体数值的计算操作，借助图形反复分析，先让学生充分体会具体点的坐标在矩阵作用下发生了怎样的变化，对应的图形发生了怎样的变化，让学生头脑中充满具体的、直观的印象，然后再逐步抽象，让学生分析矩阵把平面上的每一个点(向量)都作了相应的变换. 这种由具体逐步一般、由直观图形逐步抽象的思路应贯彻始终.

3. 旋转变换并不是上述意义下的初等变换，但它是几何上常见的一种变换. 对于旋转 90° 或 180° 的特殊矩阵还是比较好理解的，但要研究一般的旋转 θ 角的旋转矩阵需要一定的三角函数基础. 教科书中把这一内容设计在 B 组习题中，可以根据学生具体情况进行选用.

§2 矩阵变换的性质

1. 本节(2.1)和(2.2)式是(2.3)式的两个引理，事实上也是(2.3)式的两种特例. 因此本节研究矩阵变换性质的核心是矩阵变换满足(2.3)式，即

$$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}).$$

有了这条性质，才会有如下结论：

(1)矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对任一向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的作用结果均可以用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对两个基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的作用结果线性表示，即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

(2)第四章中利用初等变换求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵时，就可以知识，把向量 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 分别变回到 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵 $\boldsymbol{N}$，一定同时把向量 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 变回到 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(3)第五章中矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对任一向量的作用结果可以用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对两个不共线的特征向量的作用结果线性表示.

而以上结论又蕴含着研究矩阵问题的重要思想方法，即先研究特殊基向量的变换结果再研究一般向量的变换结果. 因此，性质(2.3)式是十分重要的性质.

2. 在对矩阵性质(2.3)式进行教学时，应避免简单地从代数角度给出抽象公式后，再由抽象符号运算进行证明. 实际上，公式的代数结构形式和代数证明并不十分困难，但是非常繁琐抽象，容易让学生感到乏味从而失去学习兴趣. 因此，在这一段内容的教学中，应力求通过大量具体实例先让学生体会到两个引理的几何意义，进而从几何上抽象概括两个引理，即先对向量作矩阵变换再求和或数乘与先求向量和或数乘再作矩阵变换结果是一样的. 然后考虑这一几何结论的代数表述及代数证明. 尽可能使本节内容生动、直观并且合情合理.

3. “矩阵变换把直线或者变成直线或者变成一个点”，这结果既是对矩阵变换性质(2.3)式的进一步描述和解释，又是(2.3)式的一个直接应用实例. 有了这一结论，在研究一条直线在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果时，只需研究直线上的一点 A 和方向向量 $\boldsymbol{v}_0$ 在 $\boldsymbol{M}$ 作用下的点 A' 和向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$：当 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ 时，整条直线变成一个点 A'；当 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0\neq\boldsymbol{0}$ 时，直线变成过点 A' 以 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$ 为方向向量的直线. 也可以研究直线上两点 A，B 在 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果 A'，B'：当 A' 与 B' 重合时，整条直线变成一个点 A'(即 B')；当 A' 与 B' 不重合时，直线 AB 变成直线 $A'B'$. 进而在研究矩阵对直线型几何图形的作用结果时，只需研究每一个顶点的变换结果即可.

这部分内容教学时，也要特别注意结合具体直线实例，让学生进行操作、试验，逐步加深抽象理解. 有条件的可以运用信息技术辅助教学.

4. 投影变换是矩阵变换中特殊的一类，它是把某些直线变成一个点的重要例子. 下一章在介绍矩阵乘法不满足某些运算律时，投影变换矩阵是十分重要的反例. 在第四章中将知道，行列式等于零的矩阵表示的变换，它们把多个点变成同一个点；而行列式不等于零的矩阵把不同点仍变为不同点，这些矩阵一定把直线变成直线.

四、知识拓展

二阶方阵可以描述二维向量空间的一些变换，很自然地联想到三阶方阵是不是也可以描述三维向量空间的某些变换呢？根据前面从代数角度介绍的初等矩阵概念，我们不难发现一些基本的三阶方阵，如 $\begin{pmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$等等，显然三阶方阵中的初等矩阵要比二阶方阵中的复杂得多，但是我们也可以借助立体空间中的直观图形来认识这些矩阵表示的变换在几何上的意义. 我们不难验证的是，三阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 所表示的变换也满足条件：

(1) $$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta};$$

(2) $$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}),$$

即 $$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}).$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是任意三维实向量，λ,μ 是任意实数.

这样的变换我们直观地解释为“把直线变成直线的变换”. 事实上，这就是大学教科书中线性变换概念的具体模型.

在大学教科书中，如果线性空间 $V(F)$ 的一个变换 σ 满足条件：

(1) $$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

(2) $$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是线性空间 V 中两个任意向量，λ 是数域 F 中任意数.
就称 σ 是 $V(F)$ 的一个线性变换.

以上两个条件也可以等价地写成

$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu\sigma(\boldsymbol{\beta})$$

另一个很自然的问题就是，是不是平面向量空间的所有线性变换都能用二阶方阵表示呢？这一内容本教科书并未进行讨论. 在线性代数中，给定 $\mathbf{R}^n$ 的一组基以后，$\mathbf{R}^n$ 中的线性变换与 n 阶实方阵一一对应. 也就是说，$\mathbf{R}^n$ 中的任意一个线性变换总可以用唯一的一个 n 阶实方阵表

示. 而由于任意一个 n 维线性空间 $V(F)$ 总与 n 维向量空间 F^n 同构,即研究任何 n 维线性空间 $V(F)$,都可以通过基和坐标转化为研究 n 维向量空间 F^n. 这样矩阵作为有限维向量空间的线性变换的表示,就显得十分重要.

事实上,更一般地,$m\times n$ 实矩阵可以表示 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射.