全国高等教育自学考试

高等数学基础自学辅导

组编／全国高等教育自学考试指导委员会
主编／王德谋

出版社

出 版 前 言

为了完善高等教育自学考试教育形式,促进高等教育自学考试的发展,我们组织编写了全国高等教育自学考试自学辅导书。

自学辅导书以全国考委公布的课程自学考试大纲为依据,以全国统编自考教材为蓝本,旨在帮助自学者达到学习目标,顺利通过国家考试。

自学辅导书是高等教育自学考试教育媒体的重要组成部分,我们将根据专业的开考情况和考生的实际需要,陆续组织编写出版文字、音像等多种自学媒体,由此构成与大纲、教材相配套的、完整的自学媒体系统。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999 年 10 月

目　　录

第一部分

第二部分

第三部分

第四部分

第 一 部 分

学习要求和自学方法

一、学习目的和要求

《高等数学基础》是全国高等教育自学考试小学教育专业理科的指定选修课，是为提高和检验自学应考者的高等数学的基本理论、基本知识和基本技能而设置的.

高等数学基础是由常量数学向变量数学过渡的转折点. 由于研究范围的扩大，方法的统一，理论更加完整严密，结论更为深刻，应用更加广泛. 这一切无疑将会使学习者学习后能开拓思维，扩大眼界，学习到更先进的理论，掌握到更为有力的工具和手段，从而提高自身的素质，达到加深对常量数学的认识和增强分析和处理教材的目的，为日后的学习和教学工作奠定较为坚实的基础.

设置本课程的具体要求是：使自学应考者初步了解高等数学中最基本的概念，如空间坐标系、向量、空间直线和平面、函数、导数、积分、行列式、矩阵、线性方程组等，掌握最基本的方法和工具，如坐标法、向量代数、极限和矩阵的初等变换等，初步了解高等数学的理论体系. 如空间解析几何，首先讨论向量的各种运算和性质，然后在空间直角坐标系下，以向量为工具建立平面和空间直线的方程，并通过方程来研究空间中平面与平面、平面与直线、直线与直线的位置关系及其他有关问题. 微积分，首先是讨论极限的运算和性质，然后以极限为工具去研究函数的连续性、可微性、可积性以及微分法、积分法等. 线性代数，首先讨论行列式、矩阵的运算和性质，然后用它们去解决线性方程组的有无解、解的个数以及如何求解等问题.

本课程各章各节的具体要求，在考试大纲中都有明确的规定. 自

学应考者应详细研读考试大纲.

二、掌握自学方法和提高自学能力

仅提出以下几点供自学者参考.

1. 处理好全面阅读与抓重点的关系. 数学理论，一环扣一环，在没有全面阅读教材的情况下孤立地去抓重点是行不通的. 学习过程应该是：首先全面系统地学习各章，在理解的基础上记忆应当识记的基本概念、名词、定理、公式，掌握基本方法；其次，要注意区分相近概念和类似的问题，弄清概念之间的关系，认识各章知识之间的联系和理论框架；再次，在全面系统学习的基础上，有目的深入学习重点章节，抓重点.

2. 处理好赶速度与求质量的关系. 学习数学，自然是希望学得快一点好，但不能只图快. 重要的概念、定理要细读，逐字逐句地领会，有些内容需反复多次才能消化. 对于一些份量很重的词句要细心体会，如“任意”、“存在”等，随时留心命题、定理的表达方式，注意分清定理的条件和结论，读了一段书，应回过来想一想，这里提出了什么问题？是如何分析的？最后得到了什么结论？如果要我解释某个名词，我能否准确地回答出来？如果要我叙述某个定理，我能否清晰地知道它的条件和结论？

3. 抽象的概念、定理要通过具体的实例去理解，要掌握几个正、反例子，例子好理解好记忆. 凡是可以直观化的概念和定理，尽量使其直观化，发展逻辑思维能力也离不开直观形象事物的帮助. 例如收敛数列的几何意义对于掌握收敛数列的性质就极有帮助.

4. 学习数学，必须动手做相当数量的习题. 只看书，不动手去算题和证题是学不到手的. 做了一些题之后再小结一下，找出规律，往往能起到举一反三的功效.

5. 处理好自学与社会助学之间的关系. 希望得到社会助学的帮助，但不能完全依赖几天的讲授与辅导，必须有较长时间的下苦功，两者结合才能收到实效.

第 二 部 分

各章内容复习、讲解与练习

第一篇 空间解析几何

解析几何的基本方法

解析几何是法国哲学家兼数学家笛卡儿(1596～1650 年)在 17 世纪 30 年代创立的.

解析几何提供了研究几何的一种新方法:借助于坐标系,将曲线用方程表示,通过研究方程来研究曲线.正如前苏联几何学家波格列洛夫所指出的:"解析几何没有严格确定的内容,对它来说,决定性的因素,不是研究对象,而是方法.这个方法的实质,在于用某种标准的方式,把方程(方程组)同几何对象(图形)相对应,使得图形的几何关系在其方程的性质中表现出来."建立坐标系就是他这里所说的标准方式.由于解析几何的重要性在于它的方法,因此,我们也可以说解析几何是一种方法.它现在不仅已经成为几何研究中的一种基本方法,而且还被广泛应用于其他精确的自然科学领域,如力学和物理学之中.

解析几何把代数和几何结合起来,把数学造成一个双面的工具.一方面,几何概念可以用代数表示,几何的目的可以通过代数来达到;另一方面,给代数概念以几何解释,可以直观地掌握这些概念的意义,又可以得到启发去提出新的结论(例如,笛卡儿就提出了用抛

物线和圆的交点来求三次和四次代数方程的实根的著名方法).拉格朗日在他的《数学概要》中说:“只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄,但是当这两门学科结成伴侣时,它们就互相吸取新鲜的活力,从那以后,就以快速的步伐走向完善.”的确,17 世纪以来数学的巨大发展,在很大程度上应归功于解析几何,可以说,微分学和积分学如果没有解析几何的预先发展是难以想象的.

解析几何研究的两个基本问题,一是从图形到方程,二是从方程到图形.前者是通过选择合适的坐标系,建立图形(包括平面图形和空间图形)的方程,后者是通过研究方程,得到图形的几何性质,了解图形的几何形状,经过这两步解决关于图形的几何问题.

也有人把解析几何的上述这个解决问题的方法,抽象为一个模式:

变换——求解——逆变换(或反演),

即先把几何问题(通过建立坐标系)变成代数问题,然后在代数中求解(研究),最后再将得到的代数结果翻译成几何,从而得到几何问题的解答.举例说明如下:

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{几何问题}\\ \text{(例如求两曲线的交点)}\end{array} \arrow[r, "\text{在某个坐标系下}"] & \begin{array}{c}\text{代数问题}\\ \text{(求两个代数方程的公共解)}\end{array} \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{求解}\\ \text{(解联立方程组)}\end{array}"] \\
\begin{array}{c}\text{几何结果}\\ \text{(二曲线的交点)}\end{array} & \begin{array}{c}\text{代数结果}\\ \text{(方程组的解)}\end{array} \arrow[l, "\text{在上述坐标系下}"']
\end{tikzcd}
$$

我们学习解析几何,就是要努力领会和掌握它的上述基本方法,而不是仅仅记住某些个别的具体结论.

美国著名数学教育家波利亚把解析几何比喻为供代数与几何之间互译用的一部辞典.他说:“解析几何提供了一个系统的工具,把数的关系转换为几何关系,或者反过来把几何关系转换为数的关系.在某种意义上可以讲,解析几何是一部两种语言的对照字典——公式

语言和几何图形语言，它使我们很容易地把一种语言翻译为另一种语言."因此，为了更好地掌握和运用解析几何的基本方法，我们在学习解析几何时，既要重视各种几何概念的代数表示式，也要随时把各种代数表示式的几何意义放在心中. 学习中要特别注意培养和提高形数结合和转化的能力，以及注意从几何直观上进行思考的能力. 这些能力对于数学的学习是极为重要的.

空间解析几何和平面解析几何研究的方法完全一样，只是研究的对象不同罢了. 平面解析几何是在平面直角坐标系中，研究平面图形(平面曲线)的几何性质，而空间解析几何是在空间直角坐标系中，研究空间图形(空间曲线和曲面)的几何性质. 因此在学习空间解析几何之前，需要先复习一下平面解析几何的基本内容. 这样做，除了可以重温和熟悉解析几何的基本方法之外，还因为空间中的某些结果，是平面上类似结果的推广. 注意与平面上的情形进行对照，可以帮助我们更好地领会和掌握空间中的情形，而且在空间解析几何的学习中，常常要用到平面解析几何的知识.

为此，我们的《高等数学基础》教材，作为空间解析几何部分的第一章，专门复习了平面解析几何的基本内容，并且在教材和这本辅导材料中，讲空间的情形随时联系平面的情形.

第二章　向量代数

一、基本内容

(一)空间直角坐标系

1. 八个卦限的划分及各卦限中点的坐标的符号.

分别位于 xy 面上的平面直角坐标系的四个象限上方的空间部分，依次为一、二、三、四卦限，它们中的点，其 z 坐标皆为正，x，y 坐标的符号，分别与 xy 面上四个象限中点的坐标的符号相同.

分别位于 xy 面上的四个象限下方的空间部分，依次为五、六、七、八卦限. 它们中的点，其 z 坐标皆为负，x，y 坐标的符号，亦分别与 xy 面上四个象限中点的坐标的符号相同.

2. 原点及各坐标轴与各坐标面上点的坐标的特征.

原点坐标(0,0,0). 坐标轴上的点的坐标中与该轴不同名的两个坐标为零. 坐标面上的点的坐标中，与所缺坐标轴同名的坐标为零. 具体见下表：

坐标轴	坐标	坐标面	坐标
x 轴	$(x,0,0)$	xy 面	$(x,y,0)$
y 轴	$(0,y,0)$	yz 面	$(0,y,z)$
z 轴	$(0,0,z)$	xz 面	$(x,0,z)$

3. 点(x,y,z)关于原点及各坐标面的对称点的坐标.

求关于 xy 面的对称点，保持 x，y 坐标不动，将 z 坐标反号.

求关于 yz 面的对称点，只须将 x 坐标反号.

求关于 xz 面的对称点，只须将 y 坐标反号.

求关于原点的对称点，将 x，y，z 全都反号.

列成下表：

(x,y,z)	关于原点	关于 xy 面	关于 yz 面	关于 xz 面
对称点	$(-x,-y,-z)$	$(x,y,-z)$	$(-x,y,z)$	$(x,-y,z)$

（二）向量的概念及其几何表示

1. 向量是既有大小又有方向的量，例如位移和速度都是向量. 几何上用（带箭头的）有向线段表示向量.

2. 向量的大小称为向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$，它是有向线段$\overline{AB}$的长度.

3. 因为向量具有两个要素：大小和方向，因此，只有大小相等且方向相同的向量，才能称为相等的向量. 相等的向量，起点可以不同. 只有将它们移到同一起点时，相等的向量才互相重合. 只要不改变向量的大小和方向，向量在空间可以自由移动.

4. 诸向量平行移动到同一起点时，若在同一条直线上，则称它们为共线向量. 因此共线的向量即互相平行的向量，它们的方向相同或相反.

（三）向量的加减法

1. 向量加法的三角形法则：作以点 O 为起点的向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，接着再以点 A 为起点作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则折线 OAB 的起点 O 到终点 B 的向量$\overrightarrow{OB}$，即为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

不管点 A 的位置如何，上面这个式子总是成立的，而且还可以推广到任意有限多个向量相加的情形，即

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_n}.$$

2. 向量加法的平行四边形法则：以同一点 O 为公共起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC 上的向量$\overrightarrow{OC}$，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

由于$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以平行四边形法则和三角形法则是一致的.

3. 向量的加法满足交换律和结合律.

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 表示三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和）.

4. 向量和的三角形不等式.

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式(对于不等号)的几何意义是三角形两边之和大于第三边(对于$\triangle OAB$,$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{OB}|$).

注意 这个不等式是向量模的不等式,不是向量的不等式,向量的"大于"和"小于"是没有意义的,只有向量的模能比较大小,向量的方向是无法比较大小的."$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$"无意义.

5. 向量的减法是加法的逆运算.

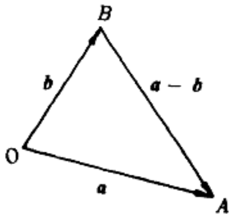

图 2.1

由$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$,得$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$,即以$O$为公共起点,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BA}$即为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 2.1).由此可得二向量差的作图法:将二向量移到同一起点,则减向量的终点到被减向量的终点的向量,即为所求差向量.

任一向量$\overrightarrow{P_1P_2}$可以看成是以任一点O为共同起点,分别以P_2和P_1为终点的两个向量$\overrightarrow{OP_2}$与$\overrightarrow{OP_1}$之差,即

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}.$$

注意,在上式中,向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的终点P_2的向径$\overrightarrow{OP_2}$在前,是被减向量,起点P_1的向径$\overrightarrow{OP_1}$在后,是减向量.

由$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$可将减法转化成加法,于是加法和减法统一起来了,统称为代数和.

(四)数量乘向量(简称数乘向量)

1. 实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积是一个向量,记为$\lambda\boldsymbol{a}$,它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向,当$\lambda>0$时,与$\boldsymbol{a}$同向,当$\lambda<0$时,与$\boldsymbol{a}$反向.

2. 数乘向量满足结合律和两个分配律.

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 模是1的向量称为单位向量,非零向量$\boldsymbol{a}$的单位向量记为$\boldsymbol{a}^0$,$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.于是有$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

4. 向量$\boldsymbol{b}$与非零向量$\boldsymbol{a}$共线的充要条件是$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(五)向量的坐标

1. 在空间直角坐标系中，由向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在三个坐标轴上的射影 a_x,a_y,a_z 组成的有序三数组，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，这个表示式也叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

注意：向量的坐标表示式与点的坐标表示有区别. 向量的坐标表示式中间有等号，而点的坐标表示则没有.

2. 已知向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的端点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标表示式为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

即向量的坐标是终点的坐标减去起点的坐标.

特别地，以原点为公共起点的点 $P(x,y,z)$ 的向径$\overrightarrow{OP}$的坐标表示式为

$$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\},$$

即一点 P 的向径$\overrightarrow{OP}$的坐标与该点 P 的坐标相同.

3. 三个坐标轴的正方向上的单位向量，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，叫基本单位向量或坐标单位向量，它们的坐标表示式为

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}.$$

4. 若$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$，则

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

这个式子叫向量$\overrightarrow{OP}$的分解式.

向量的坐标表示式与向量的分解式是互相通用的，可以看成是等同的.

5. 若 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\lambda$ 为实数，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}.$$

6. 用向量的坐标计算向量的模及两点间的距离公式.

向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离 $|P_1P_2|$，即向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模$|\overrightarrow{P_1P_2}|$.

$$|P_1P_2|=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

7. 线段的定比分点公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,点 $P(x,y,z)$分线段 P_1P_2 成两个有向线段的数量之比为 $\lambda(\neq-1)$,即$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$,则分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地,线段 P_1P_2 的中点的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

上述空间中的两点距离公式和线段的定比分点公式,是平面解析几何中相应公式的推广,两者形式完全类似,只是在空间多了 z 坐标.

8. 用向量的坐标计算向量的方向余弦.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角 α,β,γ,叫向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,方向角的余弦叫方向余弦.

设向量 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$,方向角为 α,β,γ,则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

方向余弦具有如下性质:它们的平方和等于 1,即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(六)向量的数量积

1. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数量,它是 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以 $\boldsymbol{b}$ 的模,再乘以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

此处 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$).

2. 数量积满足交换律和与数乘的结合律及分配律.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

注意：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 没有意义．一般地，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$．消去律不成立，即“由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 推不出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$”．

3．对于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有

①任何一个，自己点乘自己等于 1．

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{i})^2=|\boldsymbol{i}|^2=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

②任何两个互相点乘等于零．

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0.$$

4．设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

即二向量的数量积等于二向量对应坐标乘积之和．

5．设上述二向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

由此可得

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0)$；

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角$(\theta<90^\circ)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2>0)$；

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为钝角$(\theta>90^\circ)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2<0)$．

（七）向量的向量积

1．二向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$（此处 θ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，且$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$组成右手系．

2．向量积满足与数乘的结合律及两个分配律．

$$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\quad（左分配律）,$$

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\quad（右分配律）.$$

注意：

①向量积的交换律不成立：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$（反交换律——两个因子交换顺序，则乘积改变符号）．

②向量积的结合律不成立：一般情况下 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$．

③向量积的消去律不成立：即由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq 0$，推不出 $\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{c}$.

3. 对于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有

①任何一个自己叉乘自己等于零.

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$

②按 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的顺序循环(图 2.2)，不论从哪一个开始，第一个叉乘等二个等于第三个，

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

图 2.2

③逆着 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的顺序循环(图 2.3)，不论从哪一个开始，第一个叉乘第二个等于第三个的反向量.

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

图 2.3

4. 设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

为了避免计算三阶行列式，我们通常使用上面的后一个公式，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式，因为它只须计算三个二阶行列式.

在本书第三章中，我们经常要计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读者务必要熟练掌握用坐标计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方法.

现在介绍 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式的一个记忆方法：

在草稿纸上将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标排成两行，并在 z 坐标之后将 x 坐标再重复写一次，即

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 \end{matrix}$$

先取中间两列组成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，即为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的 x 坐标；

再取后两列组成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$，即为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的 y 坐标；