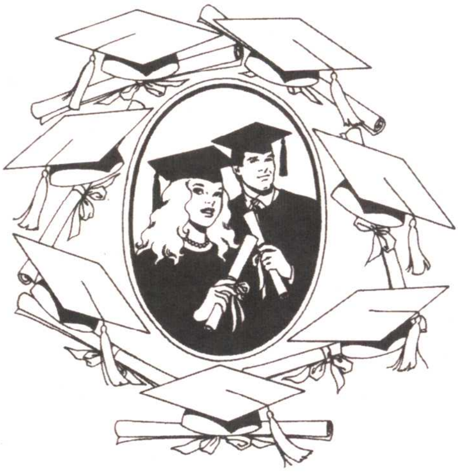
'99考研辅导教材



1999年
硕士研究生入学考试

最后冲刺

(数学分册)

[经济类]

编写考研命题研究组
主编北京大学　田茂英

科学技术文献出版社

1999年

硕士研究生入学考试

最后冲刺(数学分册)

(经济类)

编　写：考研命题研究组
编　著：北京大学田茂英

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

图书在版编目(CIP)数据

1999 年硕士研究生入学考试最后冲刺:(数学分册)[经济类]/田茂英编著. —北京:科学技术文献出版社,1998
ISBN 7-5023-3068-2

Ⅰ.19… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学-试题-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16781 号

总 策 划:胡东华
责任编辑:刘新荣
封面设计:胡东华

出 版 者/科学技术文献出版社
地 址/北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
发 行 者/新华书店北京发行所
印 刷 者/中国农业出版社印刷厂
版(印)次/1998 年 7 月第 1 版,1998 年 7 月第 1 次印刷
开 本/787×1092 16 开
字 数/288 千字
印 张/11.25
I S B N /7-5023-3068-2 /G·664
定 价/15.00 元

前　　言

按照新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲，应广大读者的要求，此次出版的模拟试题与原先比较有了较大改动，主要有二：首先是将原来模拟试题中的数学一、数学二（工学类）与数学三、数学四（经济学类）分开，各自独立成书。这样，可使不同类考生分别选用，同时也是为了更好地分别与已经出版的理工类、经济类《1999 年硕士研究生入学考试应试教程》相配合；第二方面变动较大的是通过精心选编，数学三、数学四又各增了三套模拟试题，即由原来的六套题增至九套，其它部分也根据新大纲作了较大幅度的修改。

考试大纲规定：经济类考生分为数学三、数学四（试卷三、试卷四）两种试卷。各种试卷所适用的专业及考试内容等，可见本书各种试卷（模拟试题）前的说明。由于数学三与数学四两种试卷，有一部分试题相同，为了避免重复，突出重点，我们把数学三与数学四两种试卷编放在一起，为了不致于混淆，在每道试题前都已注明应由哪类考生做。考生做题时，注意看清说明，并在规定时间（3 个小时）内完成答题。

该模拟试题是按正规的考试试卷编写的，并且试题所涉及的数学知识点覆盖了数学考试大纲的要求。对选择题和填空题给出了答案，有些较难的题还给出了提示，对计算题和证明题作了详细解答。所有这些都有利于实战，也便于培养和强化考生的解题、应试能力。**通过模拟测练可发现薄弱环节，结合应试教程和单元测练，及时查漏补缺。**

本书不仅是经济类研究生入学考试者的复习用书，也可作为经济类院校在校生及电大夜大学生的参考书，亦适合自学者阅读。

由于水平有限，书中难免有错误和不足之处，欢迎批评指正。

本书历年切题率高

编　　者

于北京大学燕北园

目 录

说明:1998 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题、参考答案及评分标准请参见《99 考研应试教程》(数学分册)[经济类]

第一部分　数学三、数学四（试卷三、试卷四）

数学三、数学四的说明

数学三

一、适用的专业

国民经济计划与管理（含经济系统分析）、工业经济、工业企业管理（含企业财务管理）、统计学、数量经济学、技术经济学、运输经济（附邮电经济）、经济地理、信息经济以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分：(1) 函数、极限、连续；(2) 一元函数微分学；(3) 一元函数积分学；(4) 多元函数微积分；(5) 无穷级数；(6) 常微分方程与差分方程。

2. 线性代数：(1) 行列式；(2) 矩阵；(3) 向量；(4) 线性方程组；(5) 矩阵的特征值和特征向量；(6) 二次型。

3. 概率论与数理统计：(1) 随机事件和概率；(2) 随机变量及其概率分布；(3) 随机变量的数字特征；(4) 大数定律和中心极限定理；(5) 数理统计的基本概念；(6) 参数估计；(7) 假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1) 微积分　约 50%；

(2) 线性代数　约 25%；

(3) 概率论与数理统计　约 25%。

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题　约 30%；

(2) 解答题（包括证明题）约 70%。

数学四

一、适用的专业

农业经济(含林业经济、畜牧业经济、渔业经济)、商业经济(含物资经济)、劳动经济学、财政学、货币银行学、会计学(含审计学)、国际贸易、国际金融、世界经济、政治经济学马克思主义经济思想史、中国经济思想史、西方经济学、外国经济史、外国经济思想史、消费经济、商品学、旅游经济、城市经济、国际经济以及对数学要求较低的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

1.微积分:相对于数学三讲,数学四不考无穷级数、常微分方程及差分方程。其余部分数学四与数学三的要求相同。

2.线性代数:数学四除不考二次型外,其余内容与数学三的要求基本相同。

3.概率论:数学四不考数理统计(包括参数估计,假设检验)。其余部分与数学三的要求基本相同。

三、试卷结构

1.内容比例

(1)微积分　约50%;

(2)线性代数　约25%;

(3)概率论　约25%。

2.题型比例

(1)填空题、选择题　约30%;

(2)解答题(包括证明题)　约70%。

第一套模拟试题

一、填空题(每小题 3 分，满分 15 分。数学三的考生做(1)，(4)，(5)，(6)，(8) 小题；数学四的考生做(2)，(3)，(5)，(6)，(7) 小题。把答案写在题后横线上)

(1) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=a$($a$ 为常数)，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\varphi(x)}-1}{x}=$ ________。

(2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}}{x(1+x)}\mathrm{d}x=$ ________。

(3) 设 $f'(x)$ 存在，且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}f(\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{2}{x}$

则 $f'(\dfrac{1}{3})=$ ________。

(4) 方程 $2^x y_{x+1}-\dfrac{2^{x+1}}{3}y_x=x\cdot(\dfrac{4}{3})^x$ 的通解为________。

(5) 设 A 为 3 阶非零矩阵，而矩阵 $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$，且$(AB)^T=0$

则 $a=$ ________，其中$(AB)^T$ 是矩阵 AB 的转置矩阵。

(6) 若 n 阶方阵 A,B 满足 $|A|\neq 0$，且 $|B|\neq 0$

则$(AB)^*=$ ________。

(7) 两个随机变量 ξ,η 都服从正态分布 $N(1,\dfrac{1}{(\sqrt{5})^2})$，如果 $\xi-a\eta+2$ 满足

$D(\xi-a\eta+2)=E[(\xi-a\eta+2)^2]$

则 $a=$ ________，$D(\xi-a\eta+2)=$ ________。

(8) 测量某种溶液的浓度，测量25次，计算得标准差$S=0.025$(克/米^3)。设测量值服从正态分布，则溶液浓度的 95% 的置信区间的长度为________。

二、选择题(每小题 3 分，满分 15 分。数学三的考生做(1)，(2)，(4)，(5)，(6)；数学四的考生做(1)，(2)，(3)，(5)，(6) 小题。每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(xz,z-y)$ 所确定，则微分 $\mathrm{d}z=$ (　　)

(A) $\dfrac{-zf'_1\mathrm{d}x+f'_2\mathrm{d}y}{xf'_1+f'_2}$；　　(B) $\dfrac{f'_1\mathrm{d}x+f'_2\mathrm{d}y}{xf'_1+f'_2-1}$；

(C) $\dfrac{-zf'_1\mathrm{d}x+f'_2\mathrm{d}y}{xf'_1+f'_2-1}$；　　(D) $\dfrac{f'_1\mathrm{d}x+f'_2\mathrm{d}y}{xf'_1+f'_2}$

(2) 将如下极坐标下的二次积分$\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^{\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$化为直角坐标下的(先对$x$积分的)二次积分是(　　)

(A)$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(B)$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(C)$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(D)$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$。

(3) 设A为n阶方阵,且$|A|\neq 0$,$\alpha_j(j=1,2,\cdots,S)$为n维向量。令$A\alpha_j=\beta_j(j=1,2,\cdots,S)$则秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}=$(　　)

(A)S;　　(B)1;

(C) 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$;　　(D)0。

(4) 设A,B分别为$m\times(m+s)$,$(m+s)\times m$矩阵$(s>0)$,下列结论不正确的是(　　)

(A) 若$AB=C$,则C的第j列$(j=1,2,\cdots,m)$等于用B的第j列的元素为系数去作A的列向量组的线性组合;

(B) 若$AB=C$,则C的第i行$(i=1,2,\cdots,m)$等于用A的第i行的元素为系数去作B的行向量组的线性组合;

(C) 若$AB=0$,且$r(A)=m(m>s)$,则B的任意$S+1$个行向量必线性相关;

(D) 若$AB=0$,且$r(B)=m$,则A的行向量组必线性无关。

(5) 设随机变量X服从参数为3的指数分布,对任意常数C,则

$E(2X-C)^2-[E(2x)-C]^2=$(　　)

(A)0;　　(B) $\frac{1}{3}$;

(C) $\frac{1}{9}$;　　(D) $\frac{4}{9}$。

(6) 设A,B是两个随机事件,满足$AB=\varnothing$且$P(A)>0$

则下面必然成立的是(　　)

(A)$P[(A+\overline{B})A]=1-P(A\overline{B})$;

(B)$P[(A-B)A]=[P(A)]^2\cdot[1-P(B)]$;

(C)$P[(A+B)|\overline{A}]=\dfrac{P(B)}{P(\overline{A}+B)}$;

(D)$P(B|A)=P(B)$。

三、(本题 5 分。数学三、四的考生全做)

设函数 $y=y(x)$ 由

$$\begin{cases} x=\int_0^1 t^4\cdot\sqrt[3]{u^2}\cdot\sqrt{1-\sin(t^2u)}\,\mathrm{d}u \\ 3ty+y\sin t-e^y-t^2=0 \end{cases}$$

确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$0<t<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

四、(本题 5 分。数学三、四的考生全做)

两种农作物间种,使用了两种化肥分别为 x(公斤) 和 y(公斤),使得两种作物分别增加产量(公斤)为$(500-2x-y)x$和$(800-x-3y)y$,要使两种作物总增产量最多,两种化肥应各施用多少斤?

五、(本题 8 分。数学三的考生做)

关于 a 讨论方程 $2\sqrt{x}=a-\dfrac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$ 内根的个数。

六、(本题 8 分,数学四的考生做)

设平面区域 D 是由曲线 $y=x,y=\sqrt{x}$ 及 $x=2$ 围成的第一象限部分。求

(1)D 的面积 A;

(2)D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V。

七、(本题 6 分。数学三、四的考生全做)

设 $y_0=e^{-x}$ 是给定微分方程

$$y'=\alpha(x)y^2+\beta(x)y+\gamma(x) \text{ 的一个特解,作变换}$$

$$z(x)=\frac{1}{y-e^{-x}}。$$

求原方程的通解。

八、(本题 6 分。数学三的考生做)

设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 单调,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛,证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

收敛。

九、(本题 6 分。数学四的考生做)

求序列$\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项。

十、(本题 8 分。数学四的考生做)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$ 内可导。若存在两点 $x_1,x_2\in(0,1)(x_2>x_1)$,

使得

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

证明存在 $\xi_1,\xi_2 \in (0,1)$，使得

$$f'(\xi)_1 \geqslant f'(\xi_2)。$$

十一、(本题 8 分。数学三的考生做)

设函数 $f(x)$ 在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且 $f'(x) \neq 0$。证明存在 $\xi,\eta \in (1,2)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{f'(\xi)} = \xi \ln 2。$$

十二、(本题 9 分。数学四的考生做)

已知三阶实方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$

有两个特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$。其中 x,y 是待定实常数。

(1) 求另一个特征值 λ_3 及 x,y 的值；

(2) A 可否对角化?如果是，求可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = D$$

为对角形矩阵。

十三、(本题 7 分。数学三的考生做)

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A。若存在三阶方阵 B，使得 $AB = 0$，就如下两种情况，计算行列式 $|B|$，并说明所得结果的理由

(1) 当 $\lambda = -1$ 时；

(2) 当 $\lambda \neq 2$，且 $\lambda \neq -1$ 时。

十四、(本题 7 分。数学四的考生做)

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 \end{bmatrix}$$

如果 $r(A)=r(B)$。试证明

(1) 方程组有解；

(2) 若 $|A|\neq 0$，则 B 的行向量组线性相关。

十五、(本题 9 分。数学三的考生做)

设 A,B 皆为 n 阶实对称方阵，且 B 是正定的。证明矩阵 AB 的特征值是实数。

十六、(本题 8 分。数学三、四的考生全做)

一袋中装有 20 个大小相同的三种颜色的球，其中第一种是红球有 16 个，第二种是黄球有 3 个，第三种绿球有 1 个。现在随机地从中任取一个球。如果记

$$X_i=\begin{cases} 1, \text{若取到第 } i \text{ 种球} & i=1,2,3 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布；

(2) 问随机变量 X_1 与 X_2 是否相关？

十七、(本题 8 分。数学四的考生做)

某大型商场每天接待顾客 10000 人，设每位顾客的消费额(元) 服从[100,1000] 上的均匀分布，且顾客的消费额是相互独立的，试求商场的销售额(元) 在平均销售额上、下浮动不超过 20000(元) 的概率。

十八、(本题 8 分。数学三的考生做)

设随机变量 X 和 Y 的相互独立，且 X 服从均值为 0.2，方差为 5 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布。而 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_5$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，求统计量

$$Z=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{25}-5}{5\cdot\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_5^2}}$$

所服从的分布，并指明其参数。

第一套模拟试题参考解答

一、(1) $\frac{a}{3}$；

提示　原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}\cdot\frac{1}{\{[1+\varphi(x)]^{2/3}+[1+\varphi(x)]^{1/3}+1\}}$；

(2) $2x-\ln(1+x)^2+(\arctan\sqrt{x})^2+C$；

提示　原积分 $=\int\frac{2x}{1+x}\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$，再在上式右端第二个积分中令 $t=\sqrt{x}$；

(3) -3；

(4) $y_x=c(\frac{2}{3})^x+\frac{3}{4}x(x-1)(\frac{2}{3})^x$；

(5) $a=0$；

(6) B^*A^*；提示 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1}$；

(7) $a=3$，方差为 2；**提示**　$E(\xi-a\eta+2)=0$；

(8) 0.020；**提示**　$l=2\delta=2\lambda\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$，对 $\alpha=0.05$，查表 $t(24)$ 得 λ。

二、(1)C；(2)B；(3)C；(4)D；(5)D；提示原式 $=E(2X)^2-4CE(X)+C^2-[E(2X)]^2+4CE(2X)-C^2=4E(X^2)-4[E(X)]^2$；(6)C。

三、解　在积分中作变量替换，令

$$z=t^2u,\text{则 } \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}z}{t^2}$$

于是

$$x=\int_0^{t^2}t^{2/3}\cdot\sqrt[3]{z^2}\cdot\sqrt{1-\sin z}\,\mathrm{d}z$$

故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t^3\cdot\sqrt{1-\sin t^2},\text{且}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\neq 0$$

又由题设的第二个方程对 t 求导(隐函数)，得

$$3y+3t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\sin t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y\cdot\cos t-e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2t=0$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2t-3y-y\cos t}{3t+\sin t-e^y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2t-3y-y\cos t}{3t+\sin t+e^y}\times\frac{1}{2t^3\cdot\sqrt{1-\sin t^2}}$$

四、解　设两种作物的增产总量为 z，则

$$z = 500x + 800y - 2x^2 - 3y^2 - 2xy$$

由$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 500 - 4x - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 800 - 6y - 2x = 0 \end{cases}$

解得　$x = 70$　　$, y = 110$

而 $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4, B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$,

$C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6$,

$B^2 - AC = 4 - 24 = -20 < 0$,且 $A < 0$,故 z 在点$(70,110)$处取极大值,也是最大值。即 $x = 70, y = 110$ 分别为两种化肥所求用量。

五、解　设

$f(x) = 2\sqrt{x} - a + \dfrac{1}{x}$

由于
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1)$$

令 $f'(x) = 0$,解得唯一驻点 $x = 1$。

又由于当 $x > 1$ 时,$f'(x) > 0$,故 $f(x)$ 在$[1, +\infty)$上严格单调增加;当 $0 < x < 1$ 时,$f'(x) < 0$,故 $f(x)$ 在$(0,1]$内严格单调减少。因此,$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值,也是最小值。而

$$f(1) = 2 - a + 1 = 3 - a$$

所以

当 $a > 3$ 时,$f(1) < 0$,原方程在区间$(0,1)$及$(1, +\infty)$内各有一个根;

当 $a = 3$ 时,$f(1) = 0$,原方程在$(0, +\infty)$内只有一个根;

当 $a < 3$ 时,$f(1) > 0$,原方程在区间$(0, +\infty)$内无根。

六、解　先求交点(见图 1.1)

$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$, $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y = x \\ x = 2 \end{cases}$

解得交点为$(0,0)$,$(1,1)$,$(2,\sqrt{2})$,$(2,2)$

(1) 所围成平面图形的面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x - \sqrt{x})\mathrm{d}x$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

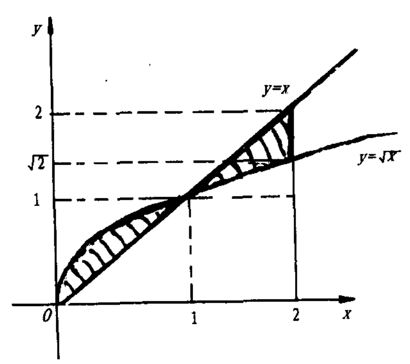


图 1.1

(2) 所求旋转体的体积由两部分 V_1 和 V_2 组成

$$V_1 = \pi\int_0^1 [y^2 - y^4]\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2\pi}{15}$$
$$V_2 = \pi\{\int_1^{\sqrt{2}} [y^4 - y^2]\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}}^2 [2^2 - y^2]\mathrm{d}y\}$$
$$= (\frac{82}{15} - \frac{16\sqrt{2}}{5})\pi$$

故
$$V = V_1 + V_2 = \frac{28 - 16\sqrt{2}}{5}\pi$$

七、解 由 $z(x) = \dfrac{1}{y - e^{-x}}$

得
$$y = \frac{1}{z(x)} + e^{-x}$$

先求 $z(x)$，将 $y' = -\dfrac{z'}{z^2} - e^{-x}$

代入原方程，得

$$-e^{-x} - \frac{z'}{z^2} = \alpha(x)[e^{-2x} + 2\frac{e^{-x}}{z} + \frac{1}{z^2}] + \beta(x)[\frac{1}{z} + e^{-x}] + \gamma(x)$$

因为 $y_0 = e^{-x}$ 是原方程的一个特解，所以有

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2\alpha(x)}{z}e^{-x} + \frac{\alpha(x)}{z^2} + \frac{\beta(x)}{z}$$

即
$$z' + [2\alpha(x)e^{-x} + \beta(x)]\cdot z = -\alpha(x)$$

解这个一阶线性非齐次方程，得

$$z = e^{-\int[2\alpha e^{-x}+\beta(x)]\mathrm{d}x}\{C + \int e^{\int[2\alpha e^{-x}+\beta(x)\mathrm{d}x]}[-\alpha(x)]\mathrm{d}x\}$$

于是得原方程的通解为 $y = \dfrac{1}{z} + e^{-x}$

八、证明 由于 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 单调，则

偶数项
$$\frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2n}} < \frac{2n}{na_n} = \frac{2}{a_n}$$

奇数项
$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2n+1}} < \frac{2n+1}{(n+1)a_n} < \frac{2(n+1)}{(n+1)a_n} = \frac{2}{a_n}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{a_n}$ 收敛，故由比较判别法知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛。

九、解　设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

由于 $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}$

故

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=e$。因为

$$f'(x)\begin{cases}>0,\text{当 } 0<x<e \text{ 时}\\<0,\text{当 } e<x<+\infty \text{ 时}\end{cases}$$

所以当 $0<x<e$ 时，$f(x)$ 严格单调增加；当 $e<x<+\infty$ 时，$f(x)$ 严格单调减少。因此，$f(x)$ 在 $x=e$ 处取极大值，也是最大值。

又由于 $$2<e<3$$

而 $$f(2)=\sqrt{2}<f(3)=\sqrt[3]{3}$$

故$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项为$\sqrt[3]{3}$。

十、证明　令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则有

$$f(x_0)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

从而
$$f(x_0)-f(x_1)\geqslant f(x_2)-f(x_0) \tag{1.1}$$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(x_1,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,x_2)$，使得

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x_0-x_1)$$
$$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(x_2-x_0)$$

将此代入(1.1)式，得

$$f'(\xi_1)(x_0-x_1)\geqslant f'(\xi_2)(x_2-x_0)$$

由于 $x_0-x_1=x_2-x_0$，故

$$f'(\xi_1)\geqslant f'(\xi_2)$$

显然，$\xi_1<\xi_2$，　　　　证毕。

十一、证明　令 $g(x)=\ln x$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 在[1,2]上满足哥西微分中值定理的条件，故存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$$

于是
$$f(2)-f(1)=\xi f'(\xi)\ln 2 \tag{1.2}$$

又 $f(x)$ 在[1,2]上满足拉格朗日中值定理的条件，

故存在 $\eta\in(1,2)$，使得

$$f(2)-f(1)=f'(\eta) \tag{1.3}$$

由(1.2)与(1.3)式得

$$f'(\eta) = \xi f'(\xi)\ln 2$$

即
$$\frac{f'(\eta)}{f'(\xi)} = \xi\ln 2$$
证毕。

十二、解 **(1) 方法一** 由矩阵 A 的特征值与 A 的主对角线上元素之间的关系(即特征值与矩阵的迹之间的关系),知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

于是
$$\lambda_3 = 3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

再将 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ 分别代入特征方程

$$|\lambda_1 E - A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -x & -1 & -1 \\ -1 & -y & -1 \end{vmatrix} = -1 + x + y - xy = 0$$

$$|\lambda_2 E - A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -x & 2 & -1 \\ -1 & -y & 2 \end{vmatrix} = 5 - 2x - 2y - xy = 0$$

由此解得
$$x = 1, y = 1$$

方法二 先将特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ 分别代入特征方程求出 $x = 1, y = 1$,从而有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故
$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)$$

由此得 A 的全部特征值为 $\lambda = 0$(二重),$\lambda = 3$,于是得另一个特征值 $\lambda_3 = 0$

(2) 为将 A 对角化,先求特征向量。

当 $\lambda = 3$ 时,代入齐次方程组 $(\lambda E - A)X = 0$,即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

而
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应的方程组为