周克定
学术论文选集

万国学术出版社
世界图书出版公司

周克定学术论文选集

万国学术出版社
世界图书出版公司

图书在版编目（CIP）数据

周克定学术论文选集 / 周克定著. -北京 ：世界图书出版公司北京公司 ：万国学术出版社 2002.11
ISBN 7-5062-4565-5

I.周… II.周 … III. 电机学-文集 IV. TM3-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 083882 号

Published and Distributed by
International Academic Publishers/
Beijing World Publishing Corporation
137 Chaonei Dajie, Beijing 100010
The People's Republic of China
E-mail: wgxs@public3.bta.net.cn

世界图书出版公司/万国学术出版社

BI00420

First edition 2002

2002 年第 1 版

周克定学术论文选集

《周克定学术论文选集》
编辑委员会

作者简介（代序）

周克定，男，1921年6月1日生，湖南省湘阴县人。十三岁高小毕业后，到中药店当学徒。在环境条件极差的情况下，他通过自学考上中专、大专，最后考上著名高等学府武汉大学，在电机系学习。上大学时，正是我国抗日战争时期，武汉大学转移在四川乐山，条件极为艰苦，他克服各种困难完成了学业，其优异的成绩得到学校赏识，毕业（1946年5月）后留校任教。尔后一直从事高等教育。1953年国家实行高等学校院系调整，组建华中工学院，他调到华中工学院工作。1985年湖北省组建湖北工学院，为了支援省属院校建设，他应邀调湖北工学院工作。

在武汉大学任教的最初阶段，周克定同志较长时间担任《高等微积分》课程的助教，还担任过《无线电原理》、《电磁波与天线》、《高电压工程》、《输电配电工程》、《电力传动》、《电信网络理论》等课程的助教，从事过高空电离层实验室、电机实验室和无线电实验室的科研与教学工作。在此期间，他所写的数学论文《拉普拉斯方程（在不同正交坐标系）的解及调和函数在电磁理论中的应用》在当时具有一定学术地位的《新科学》季刊杂志（中华全国自然科学专门学会联合会武汉地区分会主办，新华书店发行）上发表。1951年6月晋升为讲师。在承担主讲教学任务后，1952年周克定同志编写了新中国成立后国内首部《电工基础》中文讲义，并采用结合学生实际水平的教学方法，收到了良好效果。在武汉大学1953年1月12日—19日，停课八天召开的教学改革师生代表大会上，第一个作教学经验报告，博得出席代表大会师生及外校代表共600余人的很高评价。并经《光明日报》两位记者采访后，4月18日该报将经验报告全文刊登。在尔后的工作中，周克定同志承担了多门课的教学，其中开设了一些新的课程。在科研方面，与中国科学院机电研究所合作研究完成了“同步发电机带电压校正器的复式励磁装置”的科研课题，其研究成果被中国科学院评为1955年科研项目最佳成果之一；与448厂合作研制的“交磁电机放大机”和“磁放大器”两个项目，到1957年6月圆满完成，产品填补了国内空白，至今仍在批量生产。关于“交磁电机放大机”的研究成果，1956年9月在浙江大学召开的“全国电机放大机技术报告会”上，作为首篇学术研究报告，因内容丰富，论述严谨，受到与会专家代表的普遍赞扬；翌年7月浙江大学和电器科学研究院合编出版的《电机放大机论文集》，仍列为学术报告首篇。

1957年后，周克定同志受到不公正待遇。1956年学院提升他为副教授，但在报中央教育部审批期间，因他被错划为“右派”未获通过。在逆境中，他自强不息，坚持学习和研究。他在《华中工学院学报》第三卷第七期（1963年12月）发表的《变参数网络的脉冲过渡函数与传递函数》，被收入钱学森、宋健所著《工程控制论》一书的基本文献目录。

“文革”后，1978年5月，周克定同志晋升为副教授。1979年3月，周克定同志错

划“右派”问题得到党委改正。在工作环境有了一定改善之后，他的知识积累发挥了作用，科研成果叠出，成绩卓著。1980 年晋升为教授，1981 年经国家学位委员会遴选批准为我国首批博士生导师。他是湖北省劳动模范，国家级有突出贡献的专家，全国自然科学技术名词审定委员会电工组委员，国际电磁场计算会议中国联络委员会委员，全国高等院校电气技术专业教学指导委员会委员，湖北省电工技术学会理事长，武汉电工技术学会理事长，全国政协第七届、第八届委员。被国内多种传记文献收录，但是英美两著名传记中心（IBC 和 ABI）和纽约自然科学院共来信三十余次，索取个人材料，均婉谢未寄。

周克定教授长期从事高等工程教育和科研工作，在工程电磁场、电机理论、电工数学等方面卓有建树，是我国电磁场数值分析领域的主要开拓者之一。出版专著三本、教材四套，在国内外发表科技论文 200 多篇，其中专著《工程电磁场数值计算的理论、方法及应用》体现了工程电磁场方面的国际前沿水平，在国内是当前出版物中该学科内容最完整、水平最高的专著，被国家教委评为全国高校出版系统优秀学术著作。在国内，他首次提出的加权余量法、电磁场边界元分析法使电磁场理论与数值计算取得突破性进展，其理论在国内外处于先进水平。他主持或参加完成的科研项目共 22 项。其中“工程电磁场边界元分析法的理论与应用研究”获 1988 年国家教委科技进步一等奖；“三维有限元理论和方法及其在大型变压器漏磁场的应用及相关损耗计算的研究”1993 年获国家教委科技进步三等奖；“大型变压器铁芯主磁场分布及其损耗和温度场的研究”1995 年获国家教委科技进步三等奖；其理论研究成果获 2001 年中国高校自然科学奖一等奖。由于他出版《工程电磁场数值计算的理论、方法及应用》优秀学术著作和主编《电工理论基础》高校优秀教材（上中下三册，高等教育出版社出版，机械工业部评为我国高校机电类优秀教材），1998 年获湖北省人民政府两项科技进步三等奖。周克定教授应邀先后到十二个国家访问、讲学、开会、进行学术交流和科研合作，十一次担任电磁场国际会议指导委员会主席、副主席、分会主席和委员，自 1990 年后，连续五届被聘为 COMPUMAG 和 IEEE CEFC 两个国际最高水平的电磁场学术会议论文评审编委。

周克定教授执教 56 周年，为我国电磁学界和电气工程界培养了大批高层次人才，为开创我国工程电磁场教学和科研的新局面做出了贡献。他在电力、电信和电工高等数学三个方面担任过 28 门课程的教学，共指导博士后、博士、硕士 37 人。

周克定教授的为人是有口皆碑的。在他 80 寿辰之际，湖北工学院为其编辑了《玉壶冰心——周克定教授 80 寿辰庆贺文集》，由机械工业出版社出版，其中有四十多篇是他的亲友、同学、学生和同事所写关于他的为人治学的文章，这些文章从不同方面反映了周克定教授的人格魅力，在此不再赘述。

周克定学术论文选集编辑委员会

二 OO 二年九月于武昌

目 录

第一部分 电工数学

第二部分 电磁场与电网络

第三部分　电　　机

第四部分　教学法与考察报告及其它

电工高等数学的理论与方法概论*

现代科学几乎所有各个分支，都或多或少利用数学来描述它的理论和相关量的依赖关系。对于某些学科领域来说，掌握一定的数学工具，是掌握这门学科的关键。

自然科学理论的发展，要依靠数学的应用，而数学的本身又必须结合自然科学的具体问题才能存在和进步。由于人类社会实践的发展，到16~17世纪，对于运动的研究成为当时自然科学的核心问题，数学也向新阶段转化。自1627年笛卡儿提出“变量”概念，数学产生了飞跃，由常量数学过渡到变量数学。在相继有了函数、极限、连续等概念后，到17世纪后半叶发明了微积分，成为变量数学发展的第二个里程碑。从此，建立了高等数学的中心和主要部分——数学分析（简称分析）。

以代数、几何、分析三者为基础发展起来的现代数学，引起了科学理论内容的新变化。这是由于分析、运动和变化等概念，蕴含深刻的辩证法思想，从观察到概括形成科学理论的过程中，数学常常起决定性的作用。电磁波理论的建立就是最好的例证，英国物理学家麦克斯韦概括奥斯特和法拉第等人由实验确立起来的电磁规律。表述成一个方程组，引入一个位移电流的概念。纯粹用数学的方法，推导出可能有电磁波存在的结论。并且认为这种波应该是以光速传播着。后来这种理论完全被赫兹的实验所证明。为无线电技术奠定了基础。也为近代物理学开辟了道路。

现代的电工理论。由于运用了深奥新颖的数学理论与方法并且普遍采用电子计算机作为运算工具，科学内容和处理方法都产生了极大的飞跃。

在电磁场方面，数值计算是最引人注目的课题。因为电磁场的准确计算，常常是制造高效率、高能量密度、高可靠性和高运行性能的电机变压器及其他电工产品的首要步骤。目前，数值计算中的有限元法、边界元法 、模拟电荷法和网络图论法等的发展正方兴未艾，但是数值计算方法的发展，在很大程度上赖于有数学理论去深化。在工程电磁场的应用范围日益扩大的今天，数值计算方法和相关数学理论的研究，显得更为迫切需要。

电工理论的另一个方面——电路（网络）与系统，也是近代科学中极为重要的分支。新数学理论与方法的研究，促进了该学科的迅速发展。多种数学方法的引入，加上机辅分析与设计，使科学内容大大改观，理论水平大大提高。但是，作为一个专业科技工作者，花很多时间和精力用在数学方面是不可能的。现在就紧密相关的如下几个数学分支作综合介绍。

一、近世代数　　二、偏微分方程

三、拓扑、图论　　四、张量分析

---

* 1988年7月中南西南九省理论电工学术会议邀请报告（贵阳）；经补充修改后，登《电工数学进展》电工数学研究会第七届学术年会，1989.6，黄山。

五、变分法　　六、泛函分析
七、广义函数　　八、数值分析
九、概率论和数理统计　　十、非线性系统分析法

（一）近世代数

近世代数（抽象代数）的产生，是由于对所有各种抽象性代数结构的研究。它的基础是集合论。集合是按某种特征或按某种规律结合的事物全体。是现代数学中最基本也是最简单的概念之一。集合中包含的事物称为这个集合的元素（元）。各个元素的个别特性则为构成集合的基础。

研究集合的一般性质的数学分支称为集合论。集合论是在19世纪末20世纪初由德国数学家康托尔所建立而发展起来的。康托尔的工作是由具体问题出发得到这一非常普遍和抽象的理论，体现了认识由特殊到一般的前进过程。

不包含任何元素的集合称为空集。由有限多个元素组成的集合称为有限集。由无限多个元素组成的集合称为无限集（无穷集）。集合的思想和概念由数集、点集、函数集等在许多学科领域得到了广泛的应用，在电工理论中也有极大的重要性。

为了用形式化方法研究问题，必须建立数学模型，群、环、域和线性向量空间是具有普遍意义的数学模型。引进它们是为了识别各种不同性质的集合，这是近世代数的基本内容，已经渗透到了数学的各个分支，起着综合经典数学和近代数学概念的作用。应用于物理和技术问题使分析更加方便和深刻，对问题的阐述在数学结构上可以得到更好的统一。

群是一个非空集合，是只有一种代数运算的代数系，可以认为是第一个要引用并加以讨论的抽象结构。用群的模型可以解决一大类问题而不仅是解决个别问题。只要熟悉有关群的一些公理和定理，了解群的特性，当遇到表达某些事物的集合是一个群时，可以免去一些重复的分析，就能知道许多该项事物的性质。所以群论是研究现实世界对称规律等问题的重要工具。

群的抽象涵义是一个集合一种运算，具有封闭性、结合性、单元（零元）性和逆元性。如果群的任意两个元还满足交换规律，则称交换群，又称阿贝尔群。群的元素的运算结合，可以是加法或乘法，因而分别称加法群和乘法群。加法群是可交换的，乘法结合交换律一般不成立。

群的元不一定是数，也可能是函数、旋转或变换（矩阵）等。在电工文献中用到的具体的群有平移群、旋转群、线性变换群、置换群和循环群等等。因为任何一个群都同构于一个变换群，每一个有限群都同构于一个置换群，所以研究变换群和置换群常常放在首位。

环也是一个非空集合，它具有加法和乘法两种运算，且满足如下三个条件（一）在加法运算下构成阿贝尔群；（二）满足闭合律和结合律；（三）任意三个元满足分配律。显然，对于成为环的集合，不要求在环下有单元性、逆元性和交换性。满足乘法交换律的环，称为交换环，否则为非交换环。例如全体整数和偶数可分别构成无乘法逆元的交换环。

在环的基础上添加某些条件的代数系可以定义域，域在加法运算下是一个交换群，除掉零还是一个乘法交换群。域的任意三元素满足分配律，因为减和除（不含零）分别为加和乘的逆运算，所以域的任意两个元对于加减乘除四种有理运算都是封闭的。在电工学科中，常用到的有实数域、复数域、有理函数域和二进制数域等四种。域的概念非常重要，同一个问题，由于限制运用的数域不同，可能有不同的结果，并且线性向量空间的概念就是在域的基础上建立起来的。

线性向量空间（简称向量空间或线性空间）理论是用抽象的形与空间来表达某一事物各因素间量的联系。n 维（n 可能大于 3）线性空间是一个 n 维向量作元素组成的集合。向量总是可以互相迭加和与标量数乘。实质上，线性空间是定义于一个标量域 F 上的加法交换群，根据 F 是实数域或复数域，而分别称为实空间和复空间。

利用线性空间理论，可以对某种学科提供一个统一的数学框架。在电工学中，电磁场、电网络理论和电机统一理论都可以用线性空间的概念描绘和概括。基转换矩阵、范数和谱半径等等基本概念都有重要实用意义。例如，在电路理论中，可以证明，支路空间与回路空间的维数相同，两种空间电流的相互变换，由基转换矩阵来实现。同步电机不同坐标轴系之间阻抗矩阵的变换，是由基转换矩阵作的相似变换等等。近年来发展起来的最优化理论，广泛应用于电子科学、生产控制和产品设计等许多方面，也可以用线性空间理论更方便简明地表达和叙述。

抽象空间的研究首先由弗雷歇于 1906 年在集合论的基础上提出来，希尔伯特和巴拿赫等人相继作了大量的工作。n 维线性空间能定义内积，且推广内积的概念，使之成为有度量性质的空间后，在实数域称为内积空间（欧氏空间），在复数域称为复内积空间（酉空间或复欧式空间）。完备的内积空间称为希尔伯特空间（H 空间）。线性空间如可引进范数则成赋范空间称为巴拿赫空间（B 空间）。

在研究线性空间理论时，矩阵常常是一个基本工具。矩阵这个名词是薛尔凡斯特 1850 年首先引用，在遇到数学的矩形阵列但又不能再用行列式这个概念时提出的。在发展历史上，矩阵的概念应早于行列式的概念，但是实际情况相反，关于行列式的研究早在 18 世纪中叶以前就开始了。凯雷通过行列式表达线性方程组，利用了矩阵的概念，并最先提出研究矩阵的许多论文，因此普遍认为他是矩阵论的创始人。矩阵代数是以矩阵为元的代数学，是线性代数的核心部分。矩阵是一个数组，也是一个变换算符。用于线性方程的求解，是矩阵求逆问题，也是在新旧两空间向量之间的变换问题。显然只有两空间维数相同，变换是方阵且满秩，方可求逆，相应方程组有唯一解。两空间维数不同时，变换是长方阵或高矩阵，代表两个坐标轴系之间的变换。在欧氏空间的线性变换，变换矩阵是正交矩阵，在变换中保持向量的内积不变。酉空间的酉变换也是线性变换，变换中也保持内积不变，在标准正交基上的矩阵表示就是酉矩阵。

矩阵代数有一套独立的运算法则，应用范围十分广泛，在现代数学中占极重要的地位。在电工领域的电磁场、电机理论、电力系统分析和自动控制理论等等方面，关于特征值的计算、大型方程组的求解和二次型的研究等等问题中，都不可缺少它。可以说，矩阵是现

代电工科技工作者须臾不可离的数学工具。

（二） 偏 微 分 方 程

偏微分方程是研究用多变量函数来描述的自然现象的控制方程，其中应用最广在科学文献中最普遍的是数学物理方程，因为一般的研究对象都是随着空间和时间变化，所以相关的物理量是 x、y、z、t 四个自变量的函数。

用多变量函数建立的数学模型来反映客观实际，不可避免地有些简化假设条件，因此一般不是十分精确的。并且所讨论的有关数量是根据这些量的具体性质在平均意义上抽象得到的，用于分析有关复杂现象，只能达到突出主要方面，避开次要问题，在一定程度上是近似的，但仍然有重要的指导意义。

数学物理方程早在 1734 年欧拉用于弦振动问题，并于 1743 年达朗贝尔用于《动力学》中，提出著名的达朗贝尔解。此外，伯努利、拉格朗日、拉普拉斯、泊松等人在这方面做出了卓越的贡献。在电工和其他许多科学领域中，物理过程的本质可分为波动、扩散、平衡三种类型。相应的三种典型方程是：波动方程（双曲型）、热传导方程（抛物型）和调和方程（即拉普拉斯方程，为椭圆型，又称位势方程。波松方程为其非齐次方程）。要完全确定某一物理过程的解答，除了应用描述过程特有规律的泛定方程外，还必须知道在时间上的初始状况和空间上的边界状况，代表这些状况的数学条件分别称为初始条件和边界条件，合称为定解条件。

泛定方程和定解条件结合起来成为定解问题。若定解问题的解存在，唯一而且稳定（解连续依赖于定解条件），则称它是适定的。否则，三个性质有一个不具备就是不适定的。在实践中，定解问题都必须是适定的，即定解问题必须提的正确。然而，确实有许多不适定问题，有时可以从物理现象本身判断它有解或有较好的近似解存在。至于如何求出不适定问题适当的近似解是有待继续研究的课题。

在一个定解问题中，只提初始条件称为初值问题（柯西问题）；只提边界条件则称边值问题；如果既有初始条件又有边界条件，称为混合问题或初边值问题。波动方程描写波的传播和物体的振动，具有时间的可逆性；热传导方程反映热的传导和物质的扩散等不可逆过程。波动和扩散两种方程都可以提出柯西问题和混合问题。调和方程描述平衡、稳定状态下物理量的分布状况，不考虑初始条件，故只提边值问题。

波动方程和热传导方程的第一、二、三三类边界条件都可能显含时间　而调和方程的边界条件与时间无关，其第一、二、三三类边值问题分别称为狄里克莱问题、牛曼问题和洛平问题。根据求解区域是在边界内、外，又分为内问题和外问题。对于外问题，在无穷远处，必须对解加以限制（一般令极限为零），才能保证解是唯一的。

关于解的唯一性和稳定性问题的研究，按各种方程的性质不同，讨论的依据是不同的。对于热传导方程的柯西问题和混合问题以及调和方程的狄里克莱问题（内、外）都可以用极值原理。对于牛曼问题可用强极值原理。不难证明，牛曼内问题的解，如果忽略任意常

数的差别，可以认为是唯一的（但有些著作者认为因有多个差任意常数的解存在便不是唯一的），而牛曼外问题，如果解存在，则一定是唯一的。对于波动方程，它没有极值原理，但是在波的传播中服从能量守恒定律，可导出能量积分，来论证波动方程的柯西问题和混合问题解的唯一性，除了牛曼问题解的稳定性未彻底解决外，其余问题解都是稳定的。

定解问题的正确性必须能经受实践的检验，除了古典解，为了推广解的概念，又推出所谓广义解。广义解常常是一个极限函数，它有时光滑性不够，称为间断解，但用来描述某些物理现象是有效的。这在实质上是拓宽函数空间，使解保持适定性。

偏微分方程的解法，主要的经典法有分离变量法、位势法、复变函数法、积分变换法、达朗贝尔法和变分解法；此外有数值解法，如有限差分法、有限元法和边界单元法等。应用边界元法时，先将偏微分方程转化为边界积分方程。这些积分方程也属于数学物理方程。

分离变量法又称富里叶法或驻波法，常用于波动方程和热传导方程的混合问题以及 n 维（n 为任意正整数）调和方程（包括赫姆霍兹方程）的边值问题，先分解成几个常微分方程。其解一般包括富里叶级数和各种特殊函数。电工中常用的有双曲线函数、正弦和余弦积分函数，贝塞尔函数和勒让德函数等。利用迭加原理，求它的线性组合，代入定解条件，便可求出相应的特解。

位势法是从位势理论导出的求解偏微分方程的方法。自 18 世纪前期由于万有引力问题开始了位势理论的研究，研究的结果得到一个积分（体积分或面积分），称为牛顿位势，代表连续分布在一定体积（或某一曲面上）的质量的引力的位势，它的偏微商就代表质量的力的分量。在质量分布的区域，位势函数适合泊松方程；在吸引体外 p，即在质量密度为零的点，它满足拉普拉斯方程（如前所述，又称位势方程）。

位势理论应用于电磁学，得电磁场的拉普拉斯方程和泊松方程及求位势的积分，满足拉普拉斯方程的场称调和场，亦称牛顿场，它必须是无旋场，也是无源场，此时位势函数必为调和函数。

根据牛顿位势积分求出的位可分三种情况：从体电荷（或假想磁荷）确定的为体位势；从表面电荷（单层源）决定的为单层位势；由表面偶极矩（双层源）决定的为双层位势。在某些情况下这三种场迭加，位势则为三者线性组合而得到电磁场的间接边界积分方程。由于偶极矩和电荷与第一、二类边界条件等价，分别用表面上的位及其法向导数表示。即得电磁场的直接边界积分方程(亦称格林第三公式)，这就是通常格林函数法所得到的结果。

格林函数法亦称点源（影响函数）法。虽然，由格林函数法得到的结果与位势法的相同，理论实质也一致，但由于推导过程有所不同，仍值得一提。格林函数代表一个点源在一定定解条件下所产生的场。所以利用格林函数，通过迭加积分，可求任意分布的源产生的场，其实质是把连续分布的源看成无数离散分布的源。

无界空间的格林函数，称为相应微分方程的基本解。采用格林第一、二公式，代入基本解，可导出格林第三公式，即前述电磁场的直接边界积分方程，进而可导出间接边界积分方程。这是边界单元法的基本理论根据，较详细的分析可参考文献[10]第三章。

位势理论的发展，牛顿、拉普拉斯、泊松、汤姆逊、奥斯特洛格拉德斯基、格林和高

斯等人都做出了卓越的贡献，特别值得提出的是通过自学成功的英国数学家格林，把位势函数的概念，移植用于电磁学，完全基于物理原理证明了格林函数的存在性；进而证明位势函数在边界的值给定，在区域内满足拉普拉斯方程，就是狄里克莱问题或位势理论第一边值问题：如位势函数的法向导数在边界给定，函数在区域内满足拉普拉斯方程，即为牛曼问题成位势理论第二边值问题。格林企图纯粹用数学方式来论述电磁学，他第一次用狄里克莱原理，假定一个函数极小化积分，它的被积函数是函数u的偏导数的平方和，函数u满足位势方程。实际上这就是狄里克莱积分是一次变分为零的必要条件。显然，这与泛函极值原理完全相吻合。

解二维位势方程边值问题的另一种方法，复变函数法则是利用二维调和函数与复变解析函数的联系在柯西积分公式的基础上，导出一个泊松积分公式，它利用调和函数u在圆周上的边界值计算出u在圆内任一点的值，此即圆域内调和方程和狄里克莱问题的解。利用积分公式内的泊松核，还可求出另一积分公式，作为圆域外第一边值问题的解。

积分变换法又称频谱法，电工中常用的有富里叶变换、拉普拉斯变换以及采样系统的Z变换。各种积分变换法都是把某函数类A中的函数（称象原函数）经过某种可逆核变换为另一函数类B中的函数（称象函数）。例如，线性常微分方程变为代数方程；偏微分方程变成常微分方程。在新的函数类B中求得解答之后再用逆变换便可得到原来微分方程的解。积分变换法常用于解柯西问题和混合问题或用于展开定理解电网络问题。积分变换方法的选择，要根据定解问题的性质而定，例如，对于不可逆性的即只有$t \ge 0$时才有意义的问题，只能用拉普拉斯变换。

达朗贝尔法又称行波法，只限于用以解波动方程。对于一维波动方程的初值问题，解为正反方向的两个行波和根据定解条件决定的一个附加积分项，称为达朗贝尔解。对于三维波动方程的初值问题，可导出一个泊松公式作为解答。对于二维波动方程可用所谓降维法，即看作是二维情况，但其中求解函数与Z轴坐标无关。对应于非齐次波动方程即强迫振动方程（齐次方程代表自由波动），则除了满足齐次方程和非齐次初始条件的解之外，还要满足非齐次方程和齐次初始条件的解。前者即三维波动方程的解——泊松公式，后者是一个滞后位函数。

变分解法是把一个数学物理方程的定解问题化为某个泛函的极值（一般指极小值，亦称驻值或稳定值）问题，或称变分问题。解变分问题的方法有两类，一类是直接法，另一类是间接法。间接法是解泛函的尤拉方程，这是变分问题的解应满足的必要条件。尤拉方程就是与泛函对应的微分方程，其解答便是使泛函取极值的极值函数，显然，解尤拉方程就是解原来的微分方程，对问题的解决没有帮助，所以变分解法只用直接法，常常得到近似解。

变分问题直接解法中最常用的是里兹法和伽辽金法。里兹法要求所求解的微分方程相对应的算子是正定的，因为正定算子方程$Lu = f$的求解问题与求在空间H使泛函

$$F(u)=\langle Lu,u\rangle-2\langle u,f\rangle$$

取极小值的函数的问题等价。

正定算子是自共轭边值问题即自共轭微分方程和自共轭边界条件构成的边值问题所对应的对称算子（自伴算子）。严格的定义是：如果L是定义在某实H空间内某线性稠密集合D上的线性算子，若

$$\forall u \in D \qquad \langle Lu, u \rangle \geq 0$$

并且等式成立的必要条件是$u \equiv 0$则称L是正算子。若D上任意元素满足更强的不等式

$$\langle Lu, u \rangle \geq r^2 |u|^2 \qquad （常数 r > 0）$$

则称L为正定算子。拉普拉斯算子、波动算子和赫姆霍兹算子都是正定算子，但扩散算子不是自伴的，也就不可能是正定算子。

正定算子方程的边值问题（包括狄里克莱问题、牛曼问题和洛平问题）与泛函极值问题的等价性，不仅在L所定义的范围D内存在，而且不在D上而是在开拓了的H空间内，泛函$F(u)$的极小值仍然有解。前者称为真解（古典解），后者称为弱解（广义解）。求泛函极值函数的近似解，可以通过极小化系列达到。里兹法就是极小化系列的一种常用方法。

里兹法的基本思想是在H空间的线性集合D中选取一个线性无关的完备函数系列。包括n个函数，称为坐标函数，这些函数都能满足齐次边界条件。如果边界条件不是齐次的，可以使它齐次化（自然边界条件在泛函中自动满足，不必列为定解条件）。

下一步将n个坐标函数作某个线性组合，构成极值函数的近似解，称为试验函数，其中有n个待定参数，将之代入泛函表达式，泛函便成为含此n个参变量的n元函数，按多元函数求极值的方法，确定此n个参数，代回试验函数，即得原微分方程的近似解，并可算出相应的泛函值。

增加坐标函数的个数，同时增加了试验函数的次数和参数的个数，相应地可得到一系列试验函数和一系列越来越小的泛函值，这样作出的试验函数系列，就称为泛函的一个极小化系列。从理论上讲，当试验函数增加到无穷多项时，泛函达到极小值。但是，极小化系列是否收敛到泛函的极值函数（即原微分方程的精确解）？收敛速度如何？问题则比较复杂，要提出一定的充分条件。某些专著对此有详细讨论。实际上，n不可能取无穷大的值，只要求两次的结果极为接近（相差值小于给定的ε），便可认为是较好的近似值，对于某一个具体问题来说，关键的问题是选择合适的坐标函数。里兹法求泛函极值的力学背景是最小位能原理（故常称能量法）。对于不存在能量积分的系统，不能用泛函极值问题等价于微分方程定解问题的方法，则不能用里兹法，却可以用伽辽金法，它的依据是从虚功原理提出的变分概念。

由于虚功原理是对应于虚位移，外力和系统内力所做功之和（称为虚功）的变分为零；而最小位能原理表达为所有容许的位移中。真实位移将使位能的变分为零。前者较后者涉及的范围更广，后者仅是前者的一种特殊情况。因此，能够用里兹法求解的问题也可以用伽辽金法求解。反之，能够用伽辽金法 求解的问题不一定能够用里兹法。并且，应用伽辽

金法，不要求微分方程相对应的算子是正定的，故适用于非自伴问题。

伽辽金法也是在H空间内线性集合D中选取一个线性无关的完备函数系列。包含n个函数，作为坐标函数系，其中每个函数都满足边界条件（连同自然边界条件）。用它们线性组合构成含有n个待定参数的试验函数。作为边值问题的近似解，将之代入原来的微分方程。便有一定的余量（误差）。然后逐个用坐标函数乘方程余量。取其内积的积分为零，将全部积分后，得到有n个方程式的方程组。解之便可求出n个参数。将其代回试验函数。即得方程的近似解。所以伽辽金法是使方程余量沿各坐标方向的分量在某种平均意义下为零的方法。同样，增多坐标函数的个数，可以提高试验函数逼近方程精确解的程度，因为与方程余量相乘的坐标函数实质上就是加权函数，所以伽辽金法属于加权余量法。

不难证明，对于某一存在能量积分的问题，如果用同样的坐标函数系，则伽辽金法和里兹法完全一致。应用里兹法和伽辽金法解微分方程边值问题都有一些局限性。首先，对于边界形状比较复杂的区域，很难找到合适的坐标函数；其次，被积函数往往方次很高，计算工作量大，近年来发展起来的有限元法，利用里兹法和伽辽金法为基础，具备很大的优点，得到了迅速的推广，它属于数值计算方法的范畴。

加权余量法是应用范围极广的普遍近似法。取不同形式的权函数乘方程余量，取内积的积分为零，便可得不同的近似法。例如，取权函数等于$\dfrac{\partial R}{\partial a_i}$，称为最小二乘法，其中$R$为方程余量，$a_i$为试验函数中的待定参数：取狄拉克$\delta$函数作加权函数，则为点配置法；取$1$、$x$、$x^2\cdots x^n$（一维）作为权函数，则为矩量法等等。

偏微分方程数值解法的进步，是与现代电子计算机的广泛应用密切相关的。其中有限差分法最先发展起来。它不仅用于解微分方程。还在插值法、数值积分、曲线拟合等方面应用之。

用差分法解微分方程的基础，是以差商代替微商，用差分方程代替微分方程，将求解区域分成网格（二维或三维，等步长或不等步长）以网格节点上的量作未知数。列出大型方程组，用计算机求解，所以又称网格法。这就是用不连续的跃变的宗量值代替连续变化的宗量值，而后算出所求函数的近似值。

在求差商和差分方程时，对于混合问题，同时要用时间步长和空间步长。即在某个时刻t_k求各空间节点上的值，再求下一个时刻t_{k+1}各节点上的值。在已知初始条件下，即可求出不同节点不同瞬间的函数值。

对于不同的求解方程有不同的差分格式，例如，解拉普拉斯方程（及泊松方程），二维问题用五点差分格式，在平面上每一节点值等于相邻四节点值的平均。对于有曲边界的区域，可用折线来逼近，如节点不在原来的边界上，则根据边界条件给定的值，作直线转移或线性插值确定该节点的值。