21世纪高等院校教材

经济管理类·数学基础课教材系列

大学数学教程

从玉豪 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

经济管理类·数学基础课教材系列

大学数学教程

丛玉豪 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括一元及多元微积分、无穷级数、微分方程及差分方程、行列式、矩阵及线性方程组、线性规划、概率基础知识、统计基础知识与数据整理、图论等. 书末附有部分习题参考答案及附表. 书中概念清晰，语言通俗，注重逻辑思维、抽象分析及实际应用能力的培养.

本书适合高等院校经济管理类及部分理工科专业一年级大学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程/丛玉豪主编. —北京：科学出版社，2005
(21世纪高等院校教材(经济管理类·数学基础课教材系列))
ISBN 7-03-016011-8

I. 大… II. 丛… III. 高等数学－高等学校－教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 084195 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：鲁 素
责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005年9月第一次印刷 印张：27
印数：1—3 500 字数：516 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

随着社会的迅猛发展，人们越来越感到数学在人类社会发展进程中有着不可替代的重要作用. 数学是科学的语言，是许多学科和技术的工具，许多学科用数学表达其定量与定性的规律，便能深刻揭示事物的本质. 数学方法作为人们思考和解决问题的工具，在人类活动的领域中有着广泛且有效的运用. 大学数学教育也是培养学生理性思维能力和创新能力的重要载体.

本教材通过接近生活的实例，用通俗易懂的语言把数学的基本概念、方法讲清楚，内容涉及微积分、高等代数、概率统计、运筹与图论等. 在编写中努力做到突出数学思想的阐述，而不是数学内容的简单介绍. 教材也着重讲述在不同学科中如何应用数学方法解决实际问题. 希望通过本教材的学习，使学生在数学思想的理解、数学运算基本技能的掌握及用数学方法去解决实际问题的能力上有所得益.

在编写中，我们在紧扣内容的科学性和系统性的同时，注意让有些内容保持相对的独立性，以利于教师根据不同学时对教材内容进行取舍. 建议用 54 学时或 72 学时或 104 学时讲授教材的部分或全部内容.

本书由丛玉豪任主编，第 1~7 章由王家声、吴承勋、车崇龙和朱嗣筠等讨论编写，第 8~10 章由丛玉豪编写，第 11、14 章由施永兵编写，第 12、13 章由刘荣官编写. 加“*”号节为非基本要求内容，供选用. 全书由费鹤良统稿. 书的最后附上了部分习题参考答案及附表.

限于我们的水平，书中不足之处，恳请专家和读者不吝赐教.

编　者

2004 年 12 月

目　录

第 1 章　函数与极限 …… 1
1.1　函数 …… 1
习题 1.1 …… 7
1.2　数列的极限 …… 8
习题 1.2 …… 14
1.3　函数的极限 …… 15
习题 1.3 …… 21
1.4　函数极限的性质及运算法则 …… 22
习题 1.4 …… 24
1.5　极限存在的两个准则, 两个重要极限 …… 25
习题 1.5 …… 27
1.6　无穷小量与无穷大量 …… 27
习题 1.6 …… 30
1.7　连续函数 …… 30
习题 1.7 …… 35
*1.8　问题及其解 …… 36
习题 1.8 …… 38
第 2 章　导数与微分 …… 39
2.1　导数的概念 …… 39
习题 2.1 …… 43
2.2　导数的基本公式及运算法则 …… 44
习题 2.2 …… 51
2.3　高阶导数 …… 52
习题 2.3 …… 52
2.4　微分 …… 53
习题 2.4 …… 55
*2.5　问题及其解 …… 55
习题 2.5 …… 57

第 3 章　中值定理与导数的应用 …… 59
3.1　中值定理 …… 59
习题 3.1 …… 63
3.2　洛必达法则 …… 63
习题 3.2 …… 66
3.3　导数在研究函数中的应用 …… 67
习题 3.3 …… 75
*3.4　问题及其解 …… 76
习题 3.4 …… 77
第 4 章　积分 …… 79
4.1　不定积分的概念与性质 …… 79
习题 4.1 …… 82
4.2　不定积分的换元积分法和分部积分法 …… 82
习题 4.2 …… 88
4.3　定积分的概念与性质 …… 89
习题 4.3 …… 93
4.4　微积分基本公式 …… 93
习题 4.4 …… 97
4.5　定积分的换元法与分部积分法 …… 98
习题 4.5 …… 102
4.6　定积分的应用 …… 103
习题 4.6 …… 108
4.7　广义积分 …… 109
习题 4.7 …… 111
*4.8　问题及其解 …… 112
习题 4.8 …… 115
第 5 章　多元函数 …… 117
5.1　空间解析几何简介 …… 117
习题 5.1 …… 123
5.2　多元函数的概念 …… 123
习题 5.2 …… 126

5.3 多元函数微分法 …… 127
习题 5.3 …… 133
5.4 二元函数极值 …… 134
习题 5.4 …… 138
5.5 二重积分 …… 138
习题 5.5 …… 148
*5.6 问题及其解 …… 149
习题 5.6 …… 153
第 6 章 无穷级数 …… 155
6.1 无穷级数概念 …… 155
习题 6.1 …… 159
6.2 常数项级数的审敛法 …… 159
习题 6.2 …… 164
6.3 幂级数 …… 165
习题 6.3 …… 169
6.4 函数展成幂级数 …… 169
习题 6.4 …… 175
*6.5 问题及其解 …… 175
习题 6.5 …… 178
第 7 章 微分方程与差分方程简介 …… 179
7.1 微分方程的基本概念 …… 179
习题 7.1 …… 180
7.2 一阶微分方程 …… 181
习题 7.2 …… 185
7.3 几种二阶微分方程 …… 185
习题 7.3 …… 190
7.4 差分方程简介 …… 190
习题 7.4 …… 198
*7.5 问题及其解 …… 198
习题 7.5 …… 202

第 8 章 行列式 …… 203
8.1 二阶与三阶行列式 …… 203
习题 8.1 …… 206
8.2 n 阶行列式 …… 206
习题 8.2 …… 211
8.3 行列式的性质 …… 212
习题 8.3 …… 219
8.4 克拉默法则 …… 219
习题 8.4 …… 222
*8.5 问题及其解 …… 222
习题 8.5 …… 225
第 9 章 矩阵 …… 227
9.1 矩阵的概念 …… 227
9.2 矩阵的运算 …… 230
习题 9.2 …… 236
9.3 逆矩阵 …… 237
习题 9.3 …… 240
9.4 矩阵的初等变换 …… 240
习题 9.4 …… 245
*9.5 问题及其解 …… 245
习题 9.5 …… 247
第 10 章 线性方程组 …… 248
10.1 n 维向量空间 …… 248
10.2 向量间的线性关系 …… 249
习题 10.2 …… 253
10.3 秩 …… 253
习题 10.3 …… 256
10.4 线性方程组的有解性判别 …… 257
习题 10.4 …… 265
*10.5 问题及其解 …… 265
习题 10.5 …… 268

第 11 章 线性规划 …… 269
11.1 线性规划的例子 …… 269
习题 11.1 …… 272
11.2 线性规划的基本概念 …… 273
习题 11.2 …… 277
11.3 线性规划的代数解法——单纯形法 …… 278
习题 11.3 …… 285
11.4 初始基本可行解的寻求 …… 285
习题 11.4 …… 289
*11.5 问题及其解 …… 289
习题 11.5 …… 293
第 12 章 概率基础知识 …… 294
12.1 事件与概率 …… 294
习题 12.1 …… 310
12.2 条件概率与全概率公式 …… 310
习题 12.2 …… 318
12.3 随机变量及其概率分布 …… 318
习题 12.3 …… 335
*12.4 问题及其解 …… 336
习题 12.4 …… 339
第 13 章 统计基础知识与数据整理 …… 341
13.1 样本与统计量 …… 341
习题 13.1 …… 347
13.2 参数估计 …… 348
习题 13.2 …… 358
13.3 一元线性回归 …… 358
习题 13.3 …… 363
*13.4 问题及其解 …… 364
习题 13.4 …… 368
第 14 章 图论 …… 370
14.1 基本定义 …… 370

习题 14.1 ········ 373
14.2　最短路问题 ········ 373
习题 14.2 ········ 377
14.3　树与圈 ········ 377
习题 14.3 ········ 382
14.4　对集 ········ 382
习题 14.4 ········ 389
*14.5　问题及其解 ········ 390
习题 14.5 ········ 391
参考文献 ········ 394
部分习题参考答案 ········ 395
附表 ········ 417

第 1 章　函数与极限

1.1　函　　数

1. 绝对值

绝对值的概念在本书的学习中, 经常用到, 特别对极限理论的建立, 有着重要的作用. 任何实数 a 的绝对值, 记为 $|a|$, 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

绝对值有以下基本性质:

(1) $|a| \geqslant 0$.

(2) $|a| \geqslant \pm a$.

(3) $|-a| = |a|$.

(4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

以上这些性质, 由绝对值的定义, 容易得到证明.

(6) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

证　若 $a+b \geqslant 0$, 则 $|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$; 若 $a+b<0$, 则 $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) \leqslant |a|+|b|$. 因此, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

(7) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

证　由性质 (6), $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b| + |b|$. 因此, $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

实数与数轴上的点是一一对应的, 今后, 我们把以 a 为坐标的点 A, 简称为点 a, $|a|$ 就是点 a 到原点的距离, 点 a 与点 b 之间的距离就是 $|a-b|$.

设 δ 为实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式 $|x| < \delta$ 的点 x 就是到原点的距离小于 δ 的点, 满足条件的点的全体用集合表示为: $\{x||x| < \delta\}$, 即为开区间 $(-\delta, \delta)$. 满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的点 x, 就是到点 x_0 的距离小于 δ 的点, 满足条件的点的全体用集合表示为 $\{x||x-x_0| < \delta\}$, 即开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 我们也称这样的集合为以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的邻域, 记为 $\bigcup_{(x_0,\delta)}$.

例 1　证明 $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$.

证　由性质 (7), $|a|-|b| \leqslant |a-b|$. 又 $|a| = |b-(b-a)| \geqslant |b|-|b-a| = |b|-|a-b|$, $|a|-|b| \geqslant -|a-b|$.

因此, $-|a-b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a-b|$, 即 $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$.

例 2 写出以点 $x_0=1$ 为中心, $\delta=0.01$ 为半径的邻域, 并用集合及开区间表示.

解 以 1 为中心, 以 0.01 为半径的邻域是 $\bigcup_{(1,0.01)}$, 用集合表示为 $\{x||x-1|<0.01\}$, 用开区间表示为 $(0.99, 1.01)$.

2. 函数的概念

(1) *函数的定义*

我们考察与研究自然现象与社会现象时, 碰到种种不同的量. 在研究过程中保持常值的量称为常量. 在研究过程中可以取不同数值的量称为变量. 常量常用英文字母开头的几个字母 a, b, c 等表示. 变量用英文字母后面几个字母 x, y, z 等表示.

在研究某个问题的过程中有两个变量, 如果每一个都可以独立地给一个特定的值, 称这两个变量为独立变量, 例如矩形的长和宽是两个独立的变量, 如果两个变量中的一个变量给定一个值后, 另一个变量的取值受制于前一个变量的值, 则称这两个变量之间存在着依从关系. 例如在进行圆柱体的底面积的讨论中, 圆柱体底面积 s 与底面半径 r 这两个变量之间存在依从关系, 而底面积 s 与圆柱体的高 h, 这两个变量之间不存在依从关系.

例 3 公式 $y=x^2+2x-4$ 给出了变量 x 与 y 间的依从关系, 对 x 取几个特殊的值, 变量 y 有对应的值. 见表 1-1.

表 1-1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

例 4 变量 x 与 y 的依从关系用下面的叙述表示:

如果 x 取无理数, y 就取 0; 如果 x 取有理数, y 就取 1.

定义 1.1 设 D 是一个非空的数集, 对于变量 x 在 D 中的每一个取值, 通过某个对应法则 f, 变量 y 有唯一确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的**函数**, 记作

$$y=f(x), \qquad x \in D.$$

称法则 f 为联系变量 y 与 x 的**函数关系**, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**或函数, 称数集 D 为**函数的定义域**. 当 x 取定某一值时, 称 $f(x)$ 为与 x 对应的函数值. 函数值的全体构成函数的**值域**.

变量 y 是 x 的函数, 也可以记为 $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=y(x)$ 等, 特别在 $y=y(x)$ 中, 等号左边的 y 是因变量, 等号右边的 y 是对应法则, 例如: 前面例 3 可

以记为 $y=f(x)=x^2+2x-4,\ x\in\mathbf{R}$, 例 4 可以记为

$$y=D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 取无理数},\\ 1, & x\text{ 取有理数}.\end{cases}$$

这个函数称为狄利克雷函数.

如果变量 x 与 y 之间的精确关系不知道或者不需要详细表示, 这时, 记号 $y=f(x)$ 就显得十分重要, 这既表示 x 和 y 有依从关系; 又表示把法则 f 作用到 x 上就可以得到对应的 y 值. 由函数的定义可以知道, 当两个函数具有相同的定义域及相同的对应法则时, 这两个函数才能称为相等. 例如函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2}$ 与函数 $y=g(x)=|x|$ 是相等的, 而函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $y=h(x)=x$ 虽然它们有相同的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 但对应法则 f 与 h 是不相同的, 例如取 $x=-1$, $f(-1)=1$, $h(-1)=-1$, 因此 $f(x)\neq h(x)$.

例 5 设

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$$

上式表示的是当自变量 $x<0$ 时, y 的值用对应法则 $y=x^2+1$ 来计算, 当 $x=0$ 时, 对应的 $y=0$, 当 $x>0$ 时, y 的值用对应法则 $y=x-1$ 来计算. 例如 $f(-1)=(-1)^2+1=2$, $f(2)=2-1=1$, 见图 1-1. 如果一个函数, 在定义域的不同部分, 用不同的式子来表示对应法则, 称这个函数是分段函数, 例 5 就是一个分段函数.

例 6 "y 是不超过 x 的最大整数", 这是用一句话表示 y 是 x 的函数.

对于任何实数 x, 总可以把它表示为一个整数和一个非负小数之和: $x=[x]+(x)$, 这里 $[x]$ 是一个整数, (x) 是一个非负小数, $0\leqslant(x)<1$. 例如 $x=\dfrac{7}{2}$, $[x]=3$, $(x)=0.5$; $x=-\dfrac{5}{2}$, $[x]=-3$, $(x)=0.5$; $x=4$, $[x]=4$, $(x)=0$. 称这个函数为取整函数, 记为 $y=[x]$, 见图 1-2.

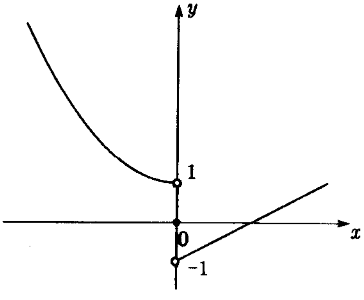

图 1-1

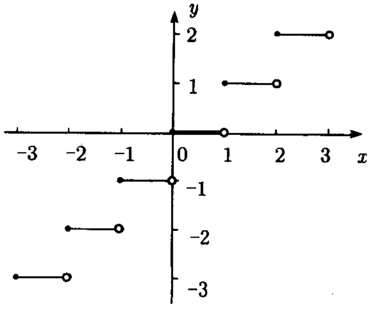

图 1-2

(2) 复合函数

如果给出两个函数 $y=f(x)=\sin x$, $y=g(x)=x^2$, 通过对两个函数进行四则运算, 可以得到一个新的函数, $f(x)\pm g(x)=\sin x\pm x^2$, $f(x)\cdot g(x)=x^2\cdot\sin x$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sin x}{x^2}$. 但是, 函数 $y=\sin x^2$ 却不能由 $f(x)$ 及 $g(x)$ 通过四则运算获得, 这个函数可以这样获得: 先把法则 g 作用在 x 上, 得到 $g(x)=x^2$, 再把法则 f 作用在 $g(x)$ 上, 得到 $f[g(x)]=\sin x^2$, 称这种“函数套函数”的运算为复合运算, 所得到的函数称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合函数.

定义 1.2　设有函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$, 如果将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中, 得到 $y=f[\varphi(x)]$, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为**复合函数**, 复合函数的**自变量**是 x, **因变量**为 y, 称 u 为**中间变量**. $f(u)$ 为**外层函数**, $\varphi(x)$ 为**内层函数**, 复合函数的定义域是由 $u=\varphi(x)$ 的定义域中使得 $\varphi(x)$ 属于 $f(u)$ 的定义域的那些 x 构成, 因此, 在 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空时, 两个函数才能复合, 两个函数的复合过程用图 1-3 表示.

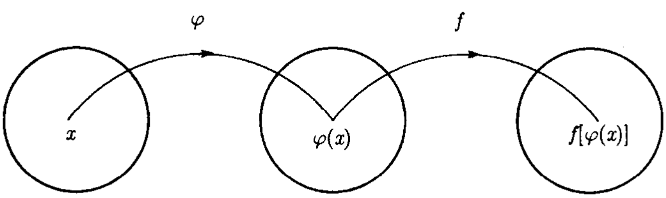

图 1-3

例 7　设 $f(x)=2^x$,　$\varphi(x)=x^2$,　求 (1)$f[\varphi(x)]$;　(2)$\varphi[f(x)]$.

解　(1)　$f[\varphi(x)]=2^{x^2}$.

(2)　$\varphi[f(x)]=(2^x)^2=4^x$.

例 8　设 $F(x)=\lg(x+1)$, 证明 $F(x^2-2)-F(x-2)=F(x)$.

证　$F(x^2-2)-F(x-2)=\lg(x^2-1)-\lg(x-1)=\lg\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lg(x+1)=F(x)$.

(3) 隐函数

变量 x 和 y 的关系用一个联系 x 和 y 的方程表示, 例如方程 $x^2+y^2=9(y\geqslant 0)$, 表示了变量 x 和 y 的关系, 它确定变量 y 是另一个变量 x 的函数.

定义 1.3　由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 称为**隐函数**.

因为 $y=f(x)$ 是方程的解, 因此有 $F[x,f(x)]\equiv 0$. 对于某个含 x, y 的方程, 如果就 y 解出, 则隐函数就变成显函数了, 但不是每个方程都能把一个变量显化, 例如

$xy + 2^x - 2^y = 0$. 有时, 用方程表示函数关系对问题的研究反而方便.

(4) *反函数*

在函数 $y = f(x)$ 中, 自变量 x 是主动变化的量, 因变量 y 依从于 x 的变化而变化, 是被动变化的量. 我们把 $y = f(x)$ 称为直接函数. 如果在研究中把 y 作为主动变化的量, 让 x 依从于 y 的变化而变化, 这就得到了一个新的函数.

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R, 对变量 y 在 R 中的每一个取值, 通过某个法则 f^{-1}, 使变量 x 有唯一确定的值与之对应, 且满足 $y = f(x)$, 则变量 x 是 y 的函数, 称它为直接函数 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯中自变量用字母 x 表示, 因变量用字母 y 表示, 我们把 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$, 这样并不改变函数的定义域及对应法则, 因此 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是同一个函数.

例如, $y = f(x) = x^3$ 的反函数是 $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, 也可记为 $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

在同一个坐标平面内, 函数与 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 表示的是同一条曲线, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 表示的是对称于直线 $y = x$ 的两条曲线.

3. 基本初等函数及初等函数

基本初等函数指下面 5 类函数:

幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为任何实数)

指数函数 $y = a^x$ $(a > 0,\quad a \neq 1)$

对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0,\quad a \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \tan x,\quad y = \cot x,\quad y = \sec x,\quad y = \csc x$

反三角函数 $y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \arctan x,\quad y = \operatorname{arccot} x$

这些函数的定义、性质、图像在中学数学课程中已作过详细讨论, 这里不再重复.

由常数及基本初等函数, 经过有限次四则运算及复合运算得到的用一个式子表示的函数称为**初等函数**, 在理论研究与实际应用中, 初等函数是我们经常碰到的一类函数.

4. 几种特殊的函数

(1) *有界函数*

定义 1.5 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $M > 0$, 对任意 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**.

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 它的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上的部分介于直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 为边界的带形区域内, 在 $I = [a, b]$ 情形下, 见图 1-4.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数.

如果存在数 A, 使 $f(x) \leqslant A$, 则称 A 为 $f(x)$ 的**上界**. 若存在数 B, 使 $B \leqslant f(x)$, 称 B 为 $f(x)$ 的**下界**.

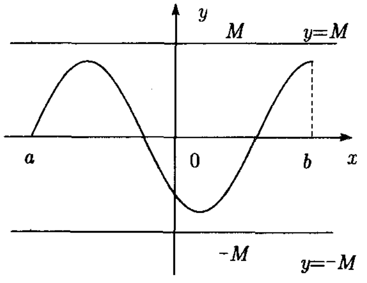

图 1-4

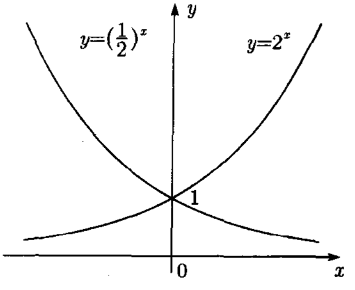

图 1-5

(2) *单调函数*

定义 1.6　函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于 I 上任意两点 x_1, x_2, 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调递增**函数, 记为 $f(x) \nearrow$, $x \in I$, 如果有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调递减**函数, 记为 $f(x) \searrow$, $x \in I$, 递增函数和递减函数通称为**单调函数**.

例如, $y = 2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少, 见图 1-5.

(3) *偶函数与奇函数*

定义 1.7　函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义, 且对任意 $x \in I$, 有 $-x \in I$(称 I 为对称区间), 如果 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**奇函数**; 如果 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**偶函数**.

在几何上, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如, $y = x^2$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, $y = x^3$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 它们的图像见图 1-6 及图 1-7.

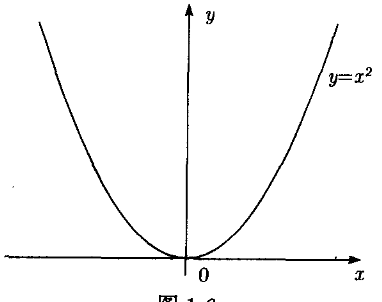

图 1-6

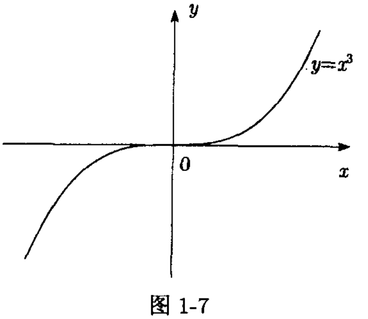

图 1-7

5. 经济学中几个常用的函数

(1) 需求函数

当消费者愿意并有能力在当前市场价格的水平上购买一定数量的商品时，消费者对这种商品的需求称为有效需求. 消费者收入、替代品价格、商品价格等都是影响需求的因素. 在一个特定时期内，只把商品价格作为影响需求量的因素，即把商品价格 P 作为自变量，需求量 Q 作为因变量，则需求量 Q 是价格 P 的函数，称为需求函数，记为 $Q=f(P)$. 它的反函数 $P=f^{-1}(Q)$ 也称为需求函数. 一般情形下，需求函数是单调递减的函数.

(2) 成本函数

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源 (如劳力、原料、设备等) 投入的费用总额. 总成本由两部分构成，一部分是不随产量变化的成本，如设备租金、广告费、管理人员薪金等，称为固定成本，记为 C_1，另一部分随产量变化而变化的成本，如直接材料、直接人工等，称为可变成本，记为 $C_2(Q)$，其中 Q 表示产量. 总成本函数 C 可表示为 $C=C_1+C_2(Q)$.

(3) 总收益函数

设某种产品的价格为 P，相应的销售量为 Q，销售产品的总收益 R，则 $R=PQ$. 如果需求函数用 $P=f^{-1}(Q)$ 表示，则 $R=Q\cdot f^{-1}(Q)$. 在总收益函数及总成本函数分别用 $R=R(Q)$, $C=C(Q)$ 表示时，总利润函数 $L(Q)$ 可以表示为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

习 题 1.1

1. 解不等式：(1) $|x|<4$; (2) $|x-1|<0.1$; (3) $0<|x+2|<0.2$.
2. $f(x)=x^2+1$，求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(a+b)$.
3. $f(x)=\lg x^2$，求 $f(-1)$, $f(-0.001)$, $f(100)$.
4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
5. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$.
6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$.
7. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$.