高等农林院校十五规划教材

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

概率论

黄燕苹 主编

中国农业出版社

全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

概　　率　　论

黄燕苹　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论／黄燕苹主编．—北京：中国农业出版社，
2003.12
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-08620-8

Ⅰ.概…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.概率论-高等学校-教材
Ⅳ.O211

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第095654号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑　朱　雷

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2003年12月第1版　　2003年12月北京第1次印刷

开本：787mm×960mm 1/16　　印张：7
字数：120千字
定价：12.00元

前　言

概率论是研究随机现象的统计规律的一门基础学科,没有扎实的基本功,对进一步理解和掌握数理统计的方法是相当困难的.我们在多年的教学中使用的都是工科类或者是理论性太强的理科类概率论用书,就前者而言,许多例题和定义的引入都带有一定的偏向性,而后者,太强的理论推导对学生来说又过于深奥和枯燥.我们发现,越是贴近生活的例子学生越是感兴趣,在兴趣和实际问题的引导下,掌握概率论的基本理论和方法并不是一件难事.来自于生活的例子,采用通俗易懂的语言,组成严谨的逻辑推导,这就是我们编写本教材的出发点.

参加本教材编写的教师,都是具有多年教学经验的优秀教师.在编写过程中,溶进了自己多年积累的教学经验、教学思想和教学方法.本书还聘请了王文植教授把关主审.书中第二至五章插图均由西南农业大学李代明副教授用 Auto CAD 2000 软件绘制.

本书可作为各类高等院校概率论教材或参考书,也是一本便于自学的教材.

由于编著者水平有限,书中难免出现错误,敬请读者批评指正.

编　者

2003 年 5 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

第一节　引　　言

在自然界和社会中存在着一类现象,我们可以准确地预言其结果在一定条件下必然出现或不出现.例如,“在一个标准大气压下,将水加热到 100 ℃时必定沸腾”,“将一电池插入一个简单电路,则电流量必为 $I=E/R$”,等等.这一类现象称为**确定性现象或必然现象**.确定性现象广泛地存在于自然界,例如,“早晨,太阳必然从东方升起”,“同性电荷一定相互排斥”,“函数 x^3 的一阶导数必定为 $3x^2$”等等.

在自然界和社会中还存在着一类现象,其结果在一定条件下可能出现,也可能不出现,即事先不能准确地预知其确切的结果.例如:一天内光顾某超市的人数以及光顾该超市且购买商品的人数;在幸运抽奖活动中,任抽一张奖券可能中奖,也可能不中奖;明年的今天,重庆市的最高气温与最低气温;掷一颗均匀骰子,其出现的点数;这些我们事先都无法肯定会出现哪一个结果,我们将这一类现象称为**随机现象或偶然现象**.

人们经过长期的实践和深入研究,发现这一类现象虽然就每次试验或观察的结果来说,都具有不确定性,但如果将某个试验或观察在相同条件下大量重复地进行,它的结果却呈现出了某种规律性.我们将其称之为随机现象的统计规律性.

概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

一、概率论简史

概率论最初是起源于机会游戏或赌博,赌徒们在赌博的过程中,时输时赢,他们就很想弄清楚其中究竟有没有什么规律.于是他们就将在赌博中遇到的各类问题拿去请教数学界的朋友.当时的数学家对这方面的理论研究进行得很少,甚至完全不感兴趣,而只着眼于对赌徒们提出的每个具体问题进行组合推理.直到 1933 年 Kolmogorov 给出了概率的公理化定义后,概率论才逐步成为一门独立的数学分支,之后便十分迅速地发展成为了科学家、工程师、医生、法学家和实业家等手中的一个有力的数学工具.现在概率论的应用几乎遍及所有的科学领

域、工农业生产和国民经济等各个部门. 例如,气象、水文、地震预报、矿藏的勘测、质量管理,生产中寻求最佳生产条件的试验设计,通讯中怎样提高产品的抗干扰性和分辨率等. 概率论还与其他学科相结合产生了许多边缘学科,如生物统计、数学地质、环境数学等. 概率论还是近代许多新学科的基础,如人工智能、可靠性理论等.

前面谈到概率论起源于机会游戏或赌博,而一些游戏规则简单明了,问题清楚,有趣味性、刺激性,能帮助我们理解概率论的基本概念和基本思想,下面我们先看两则游戏:

游戏 1:有 3 张形状完全相同但所涂颜色不同的卡片,第一张两面全红,第二张两面全黑,第三张一红一黑. 现把 3 张卡片混合后,随机取一张,如果取出的卡片朝上的一面是红的,那么它的另一面也是红的机会有多大?

这个问题容易被错误地认为答案是$\frac{1}{2}$,理由是已知出现了红的一面,那么就有两种等可能的情形:这张卡片的两面都是红的,或者一面红一面黑. 错误之处正是假定上述两种机会是等可能的.

游戏 2:参与者将赌注压在由 1 至 6 的某一数上,然后掷 3 颗均匀骰子,约定参与者所压的数在骰子上出现 i 次,$i=1,2,3$,则参与者赢 i 单位,如所压的数没有出现,则参与者输 1 单位. 问这个规则合理吗?

上述两则游戏的答案可在第二章、第五章解决.

二、组合分析公式

乘法原理 设完成一件事有 k 个步骤,第一步有 n_1 种方法,第二步有 n_2 种方法,…,第 k 步有 n_k 种方法,且完成这件事必须经过每一步,则完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种方法.

加法原理 设完成一件事有 k 类不同的方式,第一种方式有 n_1 种方法,第 2 种方式有 n_2 种方法,…,第 k 种方式有 n_k 种方法,并且每种方式中任取一种方法都可以完成这件事情,则完成这件事情共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法.

由上述两条原理可得到下列组合分析公式.

从 n 个不同的元素中,任意取出 k 个不同的元素($0<k\leqslant n$)按照某种顺序排成一列,这样的一列元素叫做从 n 个不同元素中取 k 个不同元素组成的一个**选排列**,其选排列总数为

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

特别当 $k=n$ 时,称为**全排列**,n 个不同元素的全排列总数为 $n!$,即 $n!=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$,规定 $0!=1$.

从 n 个不同的元素中，任意取出 k 个不同的元素而不考虑其顺序的一种取法，称为从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的一种组合，其组合总数记为 C_n^k，并且

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

有时 C_n^k 又记为 $\binom{n}{k}$，且规定 $\binom{n}{0}=1$，若 $k>n$，规定 $\binom{n}{k}=0$.

例 1　从 n 个不同元素中，任取 m 个不同元素进行排列，若其中某一元素必不在某一位置上，问共有多少种排列？

解　由于某一元素必须不在某一位置上，故只能从其余 $n-1$ 个元素中选择一个放在该位置上，有 A_{n-1}^1 种方法，再从剩下的 $n-1$ 个元素里选 $m-1$ 个放在其他位置上，有 A_{n-1}^{m-1} 种取法，由乘法原理，共有 $A_{n-1}^1 A_{n-1}^{m-1}$ 种排列.

例 2　有 3 本不同的数学书、5 本不同的物理书、4 本不同的英语书，从其中任取 2 本数学书、3 本物理书、3 本英语书，有多少种取法？

解　从 3 本数学书中任取 2 本，有

$$C_3^2 = C_3^1 = 3$$

种不同的取法，从 5 本物理书中任取 3 本，有

$$C_5^3 = C_5^2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$$

种不同的取法，从 4 本英语书中任取 3 本，有

$$C_4^3 = C_4^1 = 4$$

种不同的取法，因此，所求的取法的种数为

$$C_3^2 C_5^3 C_4^3 = 3\times 10\times 4 = 120$$

例 3　用 0,1,…,9 这 10 个数字组成没有重复数字的 4 位数，其中有多少偶数？

解　一个数要成为偶数，其个位必须是 0、2、4、6、8 中的一个，因此放在个位上的数有 C_5^1 种取法，而前 3 位有 A_9^3 种取法，由乘法原理共有 $A_9^3\cdot C_5^1$ 种排法，但我们注意到，在这些排列中包含以 0 为首位的情况，因此应将其剔除. 当 0 排在首位时，个位只能从 2、4、6、8 中任选一个，有 C_4^1 种方法，十位、百位有 A_8^2 种取法，这样以 0 为首位的共有 $A_8^2 C_4^1$ 种排法，所以组成 4 位偶数的个数为

$$A_9^3C_5^1 - A_8^2C_4^1 = 2\,520 - 224 = 2\,296$$

第二节　随机试验

为了叙述方便，我们把对自然现象、社会现象所进行的观察或试验，统称为**试验**，用 E 表示，例如：

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：从一批棉花种子中取 20 粒，观察发芽的种子数.

E_3：从一副扑克牌(52 张)中任选 13 张牌，观察得牌情况.

E_4：从 3 月龄的鸡群中，随机地抽取一只小鸡且称其重量.

E_5：向平面上某一目标射击，观察弹着点的位置.

E_6：记录某公共汽车站早上 7 点到 7 点 30 分的乘车人数.

上面举出了 6 个试验的例子，仔细观察，发现它们具有以下 3 个共同的特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，且在试验之前已知试验的所有可能结果；

(3) 每次试验总会出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

注：这里试验的可能结果是指试验中出现的最基本、最简单、不能再分解的结果. 如没有特别申明，在后面的叙述中也是如此.

我们将具有上述 3 个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**，用 E 表示.

第三节　样本空间与随机事件

一、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能确定会出现哪一个结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的，我们就将试验的所有可能结果组成的集合，称为**随机试验 E 的样本空间**，记为 U，样本空间的每个元素，即试验 E 的每个可能结果，称为**样本点**.

若记第二节中随机试验 E_k 的样本空间为 $U_k(k=1,2,\cdots,6)$，那么容易得到：

$U_1=\{H,T\}$

$U_2=\{0,1,2,\cdots,19,20\}$

$U_3=\{$为 52 张牌中选 13 张牌的各种组合的全体共有 C_{52}^{13} 个元素$\}$

$U_4=\{x\mid 0<x<a\}$,这里 a 为某一确定的数

$U_5=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$

$U_6=\{0,1,2,3,\cdots\}$

由上可知,试验不同,对应的样本空间一般不同,有的相当简单,有的却复杂,我们建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型,一个抽象的样本空间可以概括许多内容不相同的实际问题,例如 U_1,是只包含两个样本点的样本空间,但是它既可以作为掷硬币出现正面或反面的模型,也可作为产品检验中产品合格与不合格的模型,作为气象预报中下雨与不下雨的模型,作为公用事业排队现象中有人排队与无人排队的模型等等,这说明尽管问题的实际内容不同,但有时却能归结为相同的概率模型.因此,我们常以抛掷硬币、摸球等这样一些既典型又形象且易于理解的例子阐明一些问题,以便使问题阐述得更明确,且使问题的本质更为突出.

二、随机事件

在进行随机试验时,人们常常对试验中出现的一些随机现象感兴趣.例如,在 E_2 中,"发芽的种子数是奇数",而满足种子数是奇数这一条件的样本点组成了 U_2 的一个子集$\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$;在 E_6 中,"候车的人数不多于 10 人",而满足人数不多于 10 人的样本点组成了 U_6 的一个子集$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.可见在随机试验中,人们关心的一些随机现象可以归结为用样本空间的子集来表示.

定义 设在随机试验 E 之下的样本空间为 U,F 是以 U 的一些子集为元素的集合.如果 F 中的集合对可列并、可列交、差和补的运算都封闭,则称 F 为**事件域**.并称 F 中的元素为**随机事件**,简称**事件**,用 A,B,C……表示.

由定义可知,事件是样本空间的子集,在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.特别地,我们将在一定条件下必然发生的现象称为必然事件,用样本空间表示;而在一定条件下必然不发生的现象称为不可能事件,用空集 $\varnothing$ 表示.

例 4 将一颗骰子连掷两次,依次记录所得点数,用 A 表示事件"两次掷得点数之和为 8",B 表示事件"两次投掷所得点数相等",试写出该试验的样本空间,事件 A、B 的样本点集合.

解 试验的样本空间为

$$U=\{(i,j)\mid i=1,2,\cdots,6;j=1,2,\cdots,6\},$$

事件 $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

事件 $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

第四节　事件与事件的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 U,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是 U 的子集.

1. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 **A 是 B 的子事件**或称**事件 B 包含事件 A**,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,可用图 1-1 直观表示.

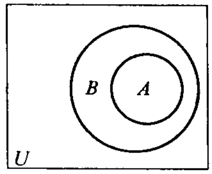

图 1-1

2. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与 B 相等**,记作 $A=B$,直观地说所谓 $A=B$,就是 A、B 中含有相同的样本点.

3. "事件 A 与 B 中至少有一个发生"也是一事件,称为事件 A 与 B 的**和事件**,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$,它的几何表示如图 1-2.

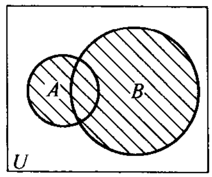

图 1-2

类似地,"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**和事件**,记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$

"可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的**和事件**,记作 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$

4. "事件 A 与事件 B 同时发生"是一事件,称为 A 与 B 的**积事件**,记作 $A\cap B$ 或 AB,即 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$,它的几何表示如图 1-3.

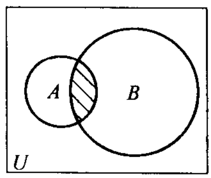

图 1-3

类似地,"事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生"称为 $A_1,\cdots,A_n$ 的**积事件**,记作$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,称$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$为可列无穷多个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$的**积事件**,即"可列无穷多个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$同时发生".

5. 称"事件 B 发生而事件 A 不发生"为事件 B 与 A 的**差事件**,记作 $B-A$,即 $B-A=\{\omega\mid\omega\in B$ 且 $\omega\notin A\}$,如图 1-4.

6. 若事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 是**互不相容的或互斥的**,也就是说 AB 是一个不可能事件,即 $AB=\varnothing$,如图 1-5,对互不相容事件 A、B,可以把和事件 $A\cup B$ 记作 $A+B$.

7. 若事件 A 与 B 满足:$A\cup B=U$,$A\cap B=\varnothing$,则称**事件 A 与 B 互为对立事件或互为逆事件**,此时称事件 B 为 A 的**对立事件**或**逆事件**,记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=B$,如图 1－6 所示.

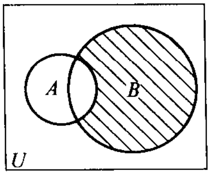

图 1－4

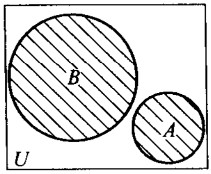

图 1－5

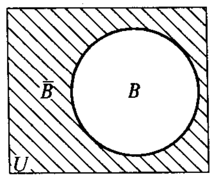

图 1－6

由定义可知,若 A 与 B 互为逆事件就是指 A、B 不能同时发生,但在每次试验中必须发生其一且只能发生一个.

可以验证事件的运算满足下列运算律:

交换律　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

德·摩根(De Morgan)**律**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

例 5　甲、乙、丙三人对某目标射击,用 A、B、C 分别示"甲击中"、"乙击中"和"丙击中",试用 A、B、C 表示下列事件:

(1) 甲、乙都击中而丙未击中;

(2) 只有甲击中;

(3) 目标被击中;

(4) 三人中最多两人击中;

(5) 三人中恰好有一个人击中.

解　(1) 事件"甲、乙都击中而丙未击中"表示 A、B 与 $\overline{C}$ 同时发生即 $AB\overline{C}$.

(2) 事件"只有甲击中"就是 A 发生而 B、C 未发生,可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(3) 事件"目标被击中"意味着甲、乙、丙三人中至少有一人击中目标,因此事件可表示为 $A\cup B\cup C$.

(4) 事件"三人中最多两人击中"即"三人中至少有一人未击中",故事件可表示为 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(5) 事件"三人中恰好一人击中"意思为"三人中只有一人击中其余两人未击中",可表为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

例 6 从某班学生中选取一名学生，A 表示选到的是男生，B 表示选到的是田径队员，说明下列关系式所表述的意义.

(1)$A\cap B=A$ (2)$A\cup B=A$

解 (1) 由集合间的关系可知，要使 $A\cap B=A$，只需 $B\supset A$，这就是：如果事件 A 发生，事件 B 就发生，所以，此式的意义是：该班的男生都是田径队员.

(2) 由集合关系可知，要使 $A\cup B=A$，只需 $B\subset A$，即：只要事件 B 发生，事件 A 就发生，所以此式的意义是：该班学生中的田径队员都是男生.

习 题 一

A 组

1. 由数字 0,1,2,3,4,5 能组成多少个没有重复数字的五位数？

2. 从 100 件产品中抽出 4 件进行检查，有多少种不同的抽取方法？其中某一件恰好被抽到的抽取方法有多少种？

3. 设某台机器需要 5 个工人管理，其中至少要有 2 个熟练工人，现从 9 个工人中选出 5 人去管理这台机器，已知这 9 个工人中有 4 个熟练工人，问有几种选法？

4. 设有 n 个人，每个人都以同样的机会$\frac{1}{N}$被分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中的每间中去，问某一指定房间中恰分到 $m(m\leqslant n)$ 个人的分法有多少种？

5. 写出下列试验的样本空间.

(1) 随机抽查 10 户居民，记录安装空调机的户数.

(2) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(3) 某人进行射击，射击进行到命中目标为止，记录射击情况.

(4) 在单位圆内随机取一点，记录它的坐标.

6. 在某学院学生中任选一名学生，事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的？

(3) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立？

7. 设 A、B、C 为 3 个事件，用 A、B、C 的运算表示下列各事件.

(1) A、B、C 都发生.

(2) A、B 发生，C 不发生.

(3) A、B、C 都不发生.

(4) A、B 中至少有一发生而 C 不发生.

(5) A、B、C 中至少有一个发生.

(6) A、B、C 中不多于一个发生.

(7) A、B、C 中至多有两个发生.

(8) A、B、C 中恰有两个发生.

8. 设一个工人生产了 4 个零件,又 A_i 表示事件"生产的第 i 个零件是正品"($i=1,2,3,4$),试用 A_1, A_2, A_3, A_4 表示下列事件:

(1) 没有一个产品是次品.

(2) 至少有一个产品是次品.

(3) 只有一个产品是次品.

(4) 至少有 3 个产品不是次品.

B　组

1. 设 A,B 为两事件,则 $(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示(　　)

(A) 必然事件　　(B) 不可能事件

(C) A 与 B 恰有一个发生　　(D) A 与 B 不能同时发生

2. 设 A,B,C 是 3 个事件,与事件 A 互斥的事件是(　　)

(A) $\overline{A}B\cup A\overline{C}$　　(B) $\overline{A(B\cup C)}$

(C) $\overline{ABC}$　　(D) $\overline{A\cup B\cup C}$

3. 设 A,B 为任意两个事件,则下列关系式成立的是(　　)

(A) $(A\cup B)-B=A$　　(B) $(A\cup B)-B\supset A$

(C) $(A\cup B)-B\subset A$　　(D) $(A-B)\cup B=A$

4. 设 $AB\subset C$,则(　　)

(A) $\overline{AB}\supset\overline{C}$　　(B) $A\subset C$ 且 $B\subset C$

(C) $\overline{A\cup B}\supset\overline{C}$　　(D) $A\subset C$ 或 $B\subset C$

5. 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　)

(A) 甲种产品滞销,乙种产品畅销　　(B) 甲、乙产品均畅销

(C) 甲种产品滞销　　(D) 甲产品滞销或乙产品畅销

6. 接连进行 3 次射击,设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}$($i=1,2,3$);$B_j=\{$3 次射击中恰好命中 j 次$\}$($j=0,1,2,3$);$C_k=\{$3 次射击至少命中 k 次$\}$($k=1,2,3$).

(1) 通过 A_1,A_2,A_3 表示 B_j 和 C_k($j=0,1,2,3$;$k=1,2,3$).

(2) 通过 B_j 表示 C_k($j=0,1,2,3$;$k=1,2,3$).

第二章 随机事件的概率

概率论研究的对象是随机现象的统计规律.我们不仅要知道试验中哪些事件可能发生,还必须对事件发生的可能性大小进行度量.在概率论中,我们将用来度量事件 A 发生的可能性大小的数值称为事件 A 的概率.

第一节 概率的统计定义

就某一随机事件而言,在每次试验前我们很难预料是发生还是不发生.但是,人们经过长期的实践发现,随机事件在某次试验中是否发生虽然带有不确定性,但在大量重复试验中却具有某种规律性,为了研究这种规律性,我们首先引入频率的概念.

定义 1 设事件 A 在试验 E 中可能发生,可能不发生,现将试验 E 重复进行了 n 次,如果在这 n 次试验中事件 A 发生了 r 次,则称比值 $\frac{r}{n}$ 为这 n 次试验中事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.

从频率的定义容易得到频率具有如下性质:

(1) 对于任何事件 A,有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 对于必然事件 U,有 $f_n(U)=1$;

(3) 若事件 A 与 B 互斥,即 $AB=\varnothing$,则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示事件 A 发生的频繁程度,频率越大,事件 A 发生得越频繁,这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越大.因而,直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小,是否可行呢?历史上曾有不少人做过这样一个试验:将一枚硬币连抛 n 次,用 A 表示在一次试验中“出现正面”这一随机事件,其结果如表 2-1:

表 2-1 抛掷硬币试验结果

实验者	抛掷次数 n	A 出现的次数 r	频率 $f_n(A)$
德·摩尔根	2 048	1 067	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9

（续）

实验者	抛掷次数 n	A 出现的次数 r	频率 $f_n(A)$
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

可见频率 $f_n(A)$总在0.5附近摆动，用频率表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小是不恰当的，但根据这一规律以及频率的性质，我们可以得到概率的如下定义：

定义 2　设 U 为随机试验 E 的样本空间，F 为事件域，如果定义在 F 上的一个实值函数 $P(x)$满足以下三个条件：

(1) 对 $\forall A\in F$，都有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(U)=1$；

(3) 对一切 $A_i\in F, i=1,2,\cdots$，且 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥，都有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

则称 $P(x)$在事件 $A(A\in F)$处的函数值 $P(A)$为事件 A 发生的**概率**，称三元组(U,F,P)为概率空间.

上述定义称为**概率的公理化定义**，(3)称为**概率的可列可加性**.

由概率的定义可以得到概率的一些重要性质：

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　由于 $P(\varnothing)=P(\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$

而 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，所以 $P(\varnothing)=0$.

性质 2　（有限可加性）若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证明　因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

所以

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

又因为 $P(\varnothing)=0$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 3　设 A 为任一随机事件，那么 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　因为 $A+\overline{A}=U$，所以

$$1=P(U)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$