高等学校教学用书

模糊集引论

·下册·

罗承忠 编著

北京师范大学出版社

模糊集引论

下册

罗承忠 编著

北京师范大学出版社出版

内 容 简 介

本书是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》基础上，参考国内外的有关著作，结合作者的教学实践而总结编写的，全书共分上下两册。下册包括：模糊系统、模糊概率与信息、L—模糊集、可能性测度与积分、Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与Fuzzy 范畴、因素空间、落影理论与真值流推理等共八章内容，每章后面都配备了一定的习题，最后一章介绍了汪培庄先生近期提出的三个理论及北京师范大学在这方面的研究工作，包括模糊推理机和专家系统。

本书是模糊数学的基础教材，可供高等学校有关专业选用，下册可作为研究生基础课教材，同时也可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考。

模糊集引论(下册)

罗承忠 编著

北京师范大学出版社出版

开本：850x1168 1/32 印张：12 字数：291 千

1993 年8 月第1 版

1993 年8 月第1 次印刷

印数：1 —1000

ISBN 7-303-02979-6/O.170

定价：10 元

前　言

《模糊集引论》是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》(上海科技出版社)基础上，参考D.Dubois、H.Prede《Fuzzy Sets and Systems》及浅居喜代治等《模糊系统理论入门》赵汝怀译(北京师范大学出版社)，结合作者的教学实践总结编写的，本书采用“集合套”观点来解释模糊集，因而使一些概念直观易懂，同时使理论严密系统，便于与经典数学联系，具有适合教学的特点.

本书是模糊数学基础教材，可用作大专院校有关专业基础课或选课教材(适当选择部分章节)，也可用作研究生基础课教材，还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考，上册前六章是基础知识，七、八、九章及下册十、十一章介绍了模糊规划、模糊逻辑、模糊控制、模糊系统、模糊概率与信息等联系实际的内容. 下册十二至十六章给出L—Fuzzy集、可能性测度与积分、Fuzzy测度与积分、Fuzzy拓扑、Fuzzy群与Fuzzy范畴等理论基础，可列入数学专业研究生课程，其中Fuzzy测度与积分主要参考王震源先生的科研成果，Fuzzy拓扑参考了蒲保明、刘应明先生的工作，十七章的因素空间、落影理论与真值流推理是汪培庄先生近期提出的三个基本理论，它为知识表示技术、模糊信息处理与机器智能提供新的数学方法，该章介绍了北京师范大学近期在这三个方面的研究工作，其中包括模糊推理机和专家系统.

由于作者水平有限，书中一定存在不少缺点，恳请批评指正.

本书出版得到国家教委博士点基金与国家自然科学基金资助. 得到中国管理科学院模糊信息与决策研究所的支持. 得到曾文艺、高家富、于福生、向勇、刘增良等同志的帮助. 作者特向他们表示衷心的感谢.

罗承忠

目　录

第十章 模糊系统

§1. 普通系统

系统理论是一个新兴的数学分支，它对客观世界提供了一个相当广泛的描述框架．研究事物，总可以将被研究的对象同与它有联系的对象分离，称被研究的对象为一个系统，称外界施于系统的影响为输入，称系统传递给外界的信息或影响为输出．现代系统论中，用状态空间的概念描述系统，一个系统可用状态变量、输入、输出以及它们之间的关系来表示．

一些小系统可以耦合成大系统，一个复杂系统可以分解为一些子系统，对大系统来说，子系统之间的输入、输出变成了自己状态的内容．

设 X 为状态空间，U 为输入集，Y 为输出集(如图 10.1)． 从输入信息至输出信息的过程可以分解为两个步骤：1) 向系统输入 $u \in U$，系统状态由 x_0 转移为 x，2) 系统状态 x 向外界输出信息 $y \in Y$．两个步骤各自用状态转移函数 δ 与输出函数 β 来描述．

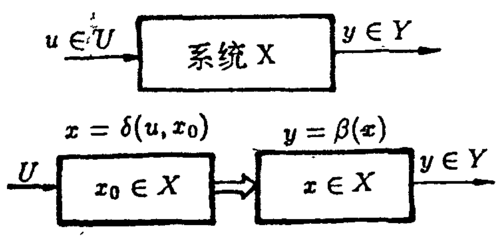

图 10.1

定义 10.1. 一个普通的决定性系统是一个组合

$$\mathcal{T} = (X, U, Y, \delta, \beta)$$
$$\delta : U \times X \to X, \quad \beta : X \to Y$$

称X为状态空间，U为输入集，Y为输出集，δ为状态转移函数，β为输出函数，$\beta \circ \delta$为响应映射.

$$(\beta \circ \delta)(u, x_0) = \beta(\delta(u, x_0)).$$

定义 10.2. 给出一个决定性系统$\mathcal{T} = (X, U, Y, \delta, \beta)$.

1) 若固定x_0(初始状态), 对$\forall x \in X, \exists u \in U$ 使得$\delta(u, x_0) = x$. 则称系统对x_0是可控的.

2) 若β是单射，则称系统是可观测的.

所谓可控，指的是通过外界输入可以使状态转移到我们所希望的状态；所谓可观测，指的是由输出可唯一确定系统所处的状态.

一些系统，$\delta(u, x_0), \beta(x)$ 不是唯一值，而是在一定范围内，这种系统称为非决定性系统.

定义 10.3. 一个普通的非决定性系统指的是一个组合

$$\mathcal{T} = (X, U, Y, \delta, \beta)$$
$$\delta : U \times X \to \mathcal{P}(X), \quad \beta : X \to \mathcal{P}(Y)$$

(其中$\delta(u, x_0) \in \mathcal{P}(X)$, 而$\beta(\delta(u, x_0))$ 按扩展原理得到).

如果初始状态及信息输入也是集合，那么定义 10.1 和 10.3 可扩张为如下的抽象系统:

定义 10.4. 一个抽象系统指的是一个组合

$$\mathcal{T}_a = (X, U, Y, \delta, \beta)$$
$$\delta : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad \beta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

转移映射δ和输出映射β是集合变换.

抽象系统也可记为$\mathcal{T}_a = (\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(U), \mathcal{P}(Y), \delta, \beta)$.

给出决定性系统$\mathcal{T} = (X, U, Y, \delta, \beta)$, 利用扩展原理(经典), δ, β 分别诱导

$$\delta : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad \beta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

从而诱导一个抽象系统$\mathcal{T}_a = (\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(U), \mathcal{P}(Y), \delta, \beta)$, 对$\xi_0 \in \mathcal{P}(X), \mu \in \mathcal{P}(U), \delta(\mu, \xi_0), \beta(\xi)$ 的特征函数为

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \delta(\mu, \xi_0)(x) = \bigvee_{\delta(u, x_0) = x} (\mu(u) \wedge \xi_0(x)) \\ \eta(y) &= \beta(\xi)(y) = \bigvee_{\beta(x) = y} \xi(x) \\ &= \bigvee_{\beta(x)=y} \bigvee_{\delta(u, x_0) = x} (\mu(u) \wedge \xi_0(x)) \end{aligned} \tag{10.1}$$

给出非决定性系统$\mathcal{T} = (X, U, Y, \delta, \beta)$, 利用扩展原理(经典)(见第五章§4). 由集值映射δ, β 分别诱导出集合变换

$$\delta : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad \beta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

对$\xi_0 \in \mathcal{P}(X), \mu \in \mathcal{P}(U)$

$$\begin{aligned} &\delta(\mu, \xi_0) = (\mu \times \xi_0) \circ R_\delta = \xi \in \mathcal{P}(X) \\ &\beta(\xi) = \xi \circ R_\beta \in \mathcal{P}(Y) \end{aligned} \tag{10.2}$$

关系$R_\delta \in \mathcal{P}(U \times X \times X)$ 与$R_\beta \in \mathcal{P}(X \times Y)$ 是集值映射δ 与β 的图象，它们的特征函数

$$\begin{aligned} &R_\delta(u, x_0, x) = \delta(u, x_0)(x) \left(= \chi_{\delta(u, x_0)}(x)\right) \\ &R_\beta(x, y) = \beta(x)(y) \left(= \chi_{\beta(x)}(y)\right) \end{aligned} \tag{10.3}$$

$\xi = \delta(\mu, \xi_0)$ 及 $\beta(\xi)$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge R_\delta(u, x_0, x)) \\
&= \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge \delta(u, x_0)(x)) \\
\beta(\xi)(y) &= \bigvee_{x \in X} (\xi(x) \wedge R_\beta(x, y)) \\
&= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge \delta(u, x_0)(x) \wedge \beta(x)(y))
\end{aligned} \tag{10.4}$$

于是，系统 $T = (X, U, Y, \delta, \beta)$ 诱导一个抽象系统 $T_a = (\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(U), \mathcal{P}(Y), \delta, \beta)$.

§2. 模糊系统

复杂的系统往往伴随着模糊性. 尤其是和人有某种联系的系统，如人机系统、管理系统、经济系统、社会系统等等. 可用模糊集来表现模糊性的系统. 它可以看作抽象系统的扩张，将抽象系统中 X、U、Y 的子集换为模糊子集.

定义 10.5. 一个模糊系统指的是一个组合

$$T_f = (\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(U), \mathcal{F}(Y), \delta, \beta)$$
$$\delta : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X), \quad \beta : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

X 为状态空间，$\xi \in \mathcal{F}(X)$ 为模糊状态；U 为输入集，$\mu \in \mathcal{F}(U)$ 为模糊输入；Y 为输出集，$\eta \in \mathcal{F}(Y)$ 为模糊输出；δ 为模糊转移变换，β 为模糊输出变换，$\beta \circ \delta$ 为模糊响应变换.

当连续输入 n 个信息 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathcal{F}(U)$ 时，如果初始状态为 $\xi_0 \in \mathcal{F}(X)$, 那么系统状态转移到 $\xi \in \mathcal{F}(X)$, 我们有

$$\delta(\mu_1, \xi_0) = \xi_1,\ \delta(\mu_2, \xi_1) = \xi_2, \cdots, \delta(\mu_n, \xi_{n-1}) = \xi \tag{10.5}$$

如果把$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$看作一个输入串$\lambda^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdots\mu_n$, 记$\Lambda=\phi$, 令$\{\mathcal{F}(U)\}^*$是全体输入串的集合，在$\{\mathcal{F}(U)\}^*$中定义运算“$\bullet$”

$$\begin{aligned}&\lambda_1^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdots\mu_{n_1},\ \ \lambda_2^*=\mu_1'\cdot\mu_2'\cdots\mu_{n_2}'\\&\lambda_1^*\cdot\lambda_2^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdots\mu_{n_1}\cdot\mu_1'\cdot\mu_2'\cdots\mu_{n_2}'\end{aligned}\tag{10.6}$$

显然$\{\mathcal{F}(U)\}^*$构成一个串群，Λ为单位元，称为由$\mathcal{F}(U)$生成的自由单串群. 于是δ可扩张为

$$\begin{aligned}&\delta^*:\{\mathcal{F}(U)\}^*\times\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)\\&\delta^*(\lambda^*,\xi_0)=\delta^*(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,\xi_0)=\xi\\&\xi_1=\delta(\mu_1,\xi_0),\xi_2=\delta(\mu_2,\xi_1)=\delta^*(\mu_1\mu_2,\xi_0),\\&\cdots\cdots,\xi=\delta(\mu_n,\xi_{n-1})=\delta^*(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,\xi_0)=\delta^*(\lambda^*,\xi_0)\end{aligned}\tag{10.7}$$

且$\delta^*(\Lambda^*,\xi_0)=\xi_0$ (由于没有输入，状态不变化).

固定初始状态$\xi_0\in\mathcal{F}(U)$, 可定义

$$\delta_{\xi_0}:\{\mathcal{F}(U)\}^*\to\mathcal{F}(X),\ \ \delta_{\xi_0}(\lambda^*)=\delta^*(\lambda^*,\xi_0)\tag{10.8}$$

模糊状态ξ仅依赖于输入串λ^*, $\xi=\delta_{\xi_0}(\lambda^*)$. 然后再向外界输出信息$\eta\in\mathcal{F}(Y)$, 此时映射变换可表示为

$$\begin{aligned}&f_{\xi_0}:\{\mathcal{F}(U)\}^*\to\mathcal{F}(Y)\ \ (f_{\xi_0}=\beta\circ\delta_{\xi_0})\\&f_{\xi_0}(\lambda^*)=\beta(\delta_{\xi_0}(\lambda^*))=\beta(\delta^*(\lambda^*,\xi_0))\end{aligned}\tag{10.9}$$

类似普通系统，可定义可控与可观测的概念.

定义10.6. 给出一个模糊系统$T_f=(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(U),\mathcal{F}(Y),\delta,\beta)$

1) 若固定$\xi_0\in\mathcal{F}(X)$, $\forall\xi\in\mathcal{F}(X)$, $\exists\lambda^*\in\{\mathcal{F}(U)\}^*$, 使得$\delta_{\xi_0}(\lambda^*)=\xi$, 则称系统对$\xi_0$是可控的.

2) 若响应变换$f_{\xi_0}=f_{\xi_0'}\Rightarrow\xi_0=\xi_0'$, 则称系统是可观测的.

所谓可控指的是通过输入可达到任一模糊状态；所谓可观测指的是任何状态ξ与以ξ为初始状态的响应变换f_ξ是一对一的.

定理10.1. 设$\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \{\mathcal{F}(U)\}^*$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{F}(X)$, 满足$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^* \cdot \lambda_2^*) = \xi_2$, 则存在$\xi \in \mathcal{F}(X)$, 满足$\xi = \delta_{\xi_1}(\lambda_1^*)$, $\xi_2 = \delta_\xi(\lambda_2^*)$.

证明： 设$\lambda_1^* = \mu_{11}\mu_{12}\cdots\mu_{1n}$, $\lambda_2^* = \mu_{21}\mu_{22}\cdots\mu_{2m}$

$$\delta_{\xi_1}(\mu_{11}) = \delta(\mu_{11}, \xi_1) = \varsigma_1$$

$$\delta_{\xi_1}(\mu_{11}\mu_{12}) = \delta^*(\mu_{11}\mu_{12}, \xi_1) = \delta(\mu_{12}, \varsigma_1) = \varsigma_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*) = \delta^*(\lambda_1^*, \xi_1) = \delta(\mu_{1n}, \varsigma_{n-1}) = \varsigma_n$$

$$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\mu_{21}) = \delta^*(\lambda_1^*\mu_{21}, \xi_1) = \delta(\mu_{21}, \varsigma_n) = \varsigma_{n+1} = \delta_{\varsigma_n}(\mu_{21})$$

$$\begin{aligned}\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\mu_{21}\mu_{22}) &= \delta^*(\lambda_1^*\mu_{21}\mu_{22}, \xi_1)\\ &= \delta(\mu_{22}, \varsigma_{n+1}) = \varsigma_{n+2} = \delta_{\varsigma_n}(\mu_{21}\mu_{22})\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\lambda_2^*) = \delta^*(\lambda_1^*\lambda_2^*, \xi_1) = \delta(\mu_{2m}, \varsigma_{n+m-1}) = \varsigma_{n+m} = \delta_{\varsigma_n}(\lambda_2^*)$$

$\varsigma_1, \cdots, \varsigma_{n+m} \in \mathcal{F}(X)$, 令$\xi = \varsigma_n \in \mathcal{F}(X)$, 于是

$$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*) = \varsigma_n = \xi, \quad \delta_\xi(\lambda_2^*) = \delta_{\varsigma_n}(\lambda_2^*) = \delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\lambda_2^*) \qquad \blacksquare$$

最后给出两个由普通系统扩展而成的模糊系统.

设$T = (X, U, Y, \delta, \beta)$为决定性系统，由扩展原理(第四章§1, §2),$\delta$, β可诱导

$$\delta: \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X), \quad \beta: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

于是诱导出模糊系统$T_f = (\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(U), \mathcal{F}(Y), \delta, \beta)$, $\xi = \delta(\mu, \xi_0) \in \mathcal{F}(X)$, $\varsigma = \beta(\xi) \in \mathcal{F}(Y)$ 的隶属函数为

$$\xi(x) = \bigvee_{\delta(u,\ x_0)=x} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0))$$

$$\begin{aligned}\varsigma(y) = \beta(\xi)(y) &= \bigvee_{\beta(x)=y} \xi(x) \\ &= \bigvee_{\beta(x)=y}\bigvee_{\delta(u,\ x_0)=x} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0))\end{aligned} \tag{10.10}$$

设$T=(X,U,Y,\delta,\beta)$为非决定性系统

$$\delta: U\times X\to \mathcal{P}(X),\quad \beta: X\to \mathcal{P}(Y)$$

为集值映射. 由广义扩展原理(第五章§4 节),δ, β 可诱导模糊变换

$$\begin{aligned}
&\delta:\mathcal{F}(U)\times\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X),\quad \beta:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)\\
&\delta(\mu,\ \xi_0)=(\mu\times\xi_0)\circ R_\delta=\xi\in\mathcal{F}(X)\\
&\beta(\xi)=\xi\circ R_\beta\in\mathcal{F}(Y)
\end{aligned}$$

关系R_δ, R_β 为集值映射δ, β 的图象, 隶属函数

$$\begin{aligned}
&R_\delta(u,x_0,x)=\delta(u,x_0)(x)\\
&R_\beta(x,y)=\beta(x)(y)\\
&\xi(x)=\bigvee_{u\in U}\bigvee_{x_0\in X}(\mu(u)\wedge\xi_0(x_0)\wedge R_\delta(u,x_0,x)) \qquad (10.11)\\
&\varsigma(y)=\bigvee_{x\in X}(\xi(x)\wedge R_\beta(x,y))
\end{aligned}$$

于是诱导出一个模糊系统$T_f=(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(U),\mathcal{F}(Y),\delta,\beta)$.

§3. 模糊关系系统

一. 模糊关系系统的定义

定义10.7. 一个模糊关系系统指的是一个组合

$$T_{rel}=(X,U,Y,R_\delta,R_\beta)$$

其中$R_\delta\in\mathcal{F}(U\times X\times X)$为$U\times X$到$X$的模糊关系, 称为系统的转移关系. $R_\beta\in\mathcal{F}(X\times Y)$是$X$到$Y$的模糊关系, 称为

输出关系. 合成关系 $R_\delta \circ R_\beta \in \mathcal{F}(U\times X\times Y)$ 是 $U\times X$ 到 Y 的模糊关系，称为响应关系.

给定初始状态 $\xi_0 \in \mathcal{F}(X)$ 及输入 $\mu \in \mathcal{F}(U)$, 系统状态转移到 $\xi = (\mu\times\xi_0)\circ R_\delta \in \mathcal{F}(X)$, 输出为 $\varsigma = \xi\circ R_\beta \in \mathcal{F}(Y)$.

按照广义扩展原理(第五章§4 节),R_δ, R_β 可唯一确定模糊变换

$$\delta:\mathcal{F}(U)\times\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X),\quad \delta(\mu,\ \xi_0)=(\mu\times\xi_0)\circ R_\delta$$
$$\beta:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y),\quad \beta(\xi)=\xi\circ R_\beta$$

于是 $\mathcal{T}_{rel}=(X,U,Y,R_\delta,R_\beta)$ 可唯一确定一个模糊系统 $\mathcal{T}_f=(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(U),\mathcal{F}(Y),\delta,\beta)$.

如果模糊系统 $\mathcal{T}_f=(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(U),\mathcal{F}(Y),\delta,\beta)$ 中，δ,β 为模糊线性变换，则可唯一确定模糊关系 R_δ, R_β, 从而唯一确定一个模糊关系系统 $\mathcal{T}_{rel}=(X,U,Y,R_\delta,R_\beta)$.

二. 模糊关系系统的矩阵表示

设状态空间 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 输入集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$, 输出集 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$, 则模糊关系系统 $\mathcal{T}_{rel}=(X,U,Y,R_\delta,R_\beta)$ 可由 R_δ,R_β 的矩阵表示唯一确定.

显然，输出关系 R_β 的矩阵表示是 $n\times l$ 模糊矩阵($R_\beta\in\mathcal{M}_{n\times l}$), 如何表示转移关系 R_δ 呢? 一般说来，$\mathcal{F}(X)$ 的元素 ξ 可用模糊向量表示(称向量为一阶张量);$\mathcal{F}(U\times X)$ 的元素可用 $m\times n$ 模糊矩阵表示(称矩阵为二阶张量); 而 $\mathcal{F}(U\times X\times X)$ 的元素 R_δ 应该用一个 $m\times n\times n$ 模糊立体阵表示(我们称它为三阶张量). 其前后共有 m 片，每片为 $n\times n$ 矩阵. 第 k 片就是截影 $R_\delta|_{u_k}$. 因此 R_δ 可由其 m 个截影(即 m 个 $n\times n$ 模糊

矩阵) 表示.

$$R_\delta\,|_{u_k}=\begin{pmatrix} r_{k11} & r_{k12} & \cdots & r_{k1n} \\ r_{k21} & r_{k22} & \cdots & r_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{kn1} & r_{kn2} & \cdots & r_{knn} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\cdots,m. \tag{10.12}$$

设初始状态$\xi_0=(\xi_0(1),\ \xi_0(2),\cdots,\ \xi_0(n))$, 输入$\mu_0=(\mu_0(1),\ \mu_0(2),\cdots,\ \mu_0(m))$. 系统转移到$\xi=(\xi(1),\ \xi(2),\cdots,\ \xi(n))$.

$$\xi=(\mu\times\xi_0)\circ R_\delta,\quad \xi(j)=\bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{i=1}^{n}(\mu(k)\wedge\xi_0(i)\wedge r_{kij}) \tag{10.13}$$

令$U\times X=\Big\{(u_1,x_1),\cdots,(u_1,x_n),\cdots;\ (u_m,x_1),\ \cdots,\ (u_m,x_n)\Big\}$, $\mu\times\xi_0$ 可用mn 维模糊向量表示.

$$\begin{aligned}\mu\times\xi_0=\Big(&\mu(1)\wedge\xi_0(1),\cdots,\mu(1)\wedge\xi_0(n);\cdots;\\ &\mu(m)\wedge\xi_0(1),\cdots,\mu(m)\wedge\xi_0(n)\Big)\end{aligned}$$

R_δ 可用一个$mn\times n$ 模糊矩阵表示.

$$R_\delta=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} r_{111} & r_{112} & \cdots & r_{11n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{1n1} & r_{1n2} & \cdots & r_{1nn} \\ r_{211} & r_{212} & \cdots & r_{21n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{2n1} & r_{2n2} & \cdots & r_{2nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m11} & r_{m12} & \cdots & r_{m1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{mn1} & r_{mn2} & \cdots & r_{mnn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} (u_1,x_1) \\ \vdots \\ (u_1,x_n) \\ (u_2,x_1) \\ \vdots \\ (u_2,x_n) \\ \vdots \\ (u_m,x_1) \\ \vdots \\ (u_m,x_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} & \end{array}$$

(10.13) 式可视为 mn 维模糊向量与 $mn \times n$ 模糊矩阵合成.

例10.1. 设状态空间 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 输入集 $U = \{u_1, u_2\}$, 输出集 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, 转移关系 R_δ 为

$$R_\delta \,|_{(u_1)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \quad R_\delta \,|_{(u_2)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

如果初始状态 $\xi_0 = (0.2, 0.9, 0.2)$, 当输入 $\mu = (0.1, 0.9)$ 后, 试问转移到什么状态? 又若输出关系为

$$R_\beta = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

求输出信息.

解: $\mu \times \xi_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \wedge (0.2, 0.9, 0.2) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \end{pmatrix}$ 改写为

$$\mu \times \xi_0 = (0.1\ 0.1\ 0.1; 0.2\ 0.9\ 0.2)$$

$$R_\delta = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\xi = (\mu \times \xi_0) \circ R_\delta = (0.2\ 0.4\ 0.9)$$

输出信息 $\eta = \xi \circ R_\beta = (0.3, 0.4, 0.9)$. (图 10.2 给出上述结果)

定理10.2. 设 $R_\delta \in \mathcal{F}(U \times X \times X), \xi_0 \in \mathcal{F}(X), \mu \in \mathcal{F}(U)$, 则

$$(\mu \times \xi_0) \circ R_\delta = \bigcup_{u \in U} \mu(u) \left(\xi_0 \circ R_\delta \,|_u\right) = \bigcup_{x_0 \in X} \xi_0(x_0) \left(\mu \circ R_\delta \,|_{x_0}\right)$$