数理化基础知识丛书

初中数学基础知识
代　数

（第三册）

北京实验中学数学教研室　编

北京教育出版社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识代数(第三册)
北京实验中学数学教研室编
*
北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 5.75印张 124,000字
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷
印数 1—8,300
ISBN 7-5303-0040-7/G·33
定 价：1.60元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写了数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，习题和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础知识和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错、常混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导。对解题的思路、方法、技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识代数》第三册，可以作为校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的教学参考书。

《初中数学基础知识》编写组成员是北京师范大学附属实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任孝娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正。

目 录

第九章　数的开方

一、内 容 提 要

通过本章学习，首先应正确理解平方根（二次方根）立方根（三次方根），n 次方根的概念。

如果存在一个数 x，使 $x^n=a$，那么 x 叫 a 的 n 次方根。求一个数的方根的运算，叫做开方。从定义不难看出，开方运算是乘方运算的逆运算。因此可以从乘方运算的规律去推想开方运算的规律。

学习中要注意弄清算术平方根和平方根的区别与联系。正确掌握有理数、无理数、实数和实数的绝对值等概念。还要学会平方根表、立方根表的查法，利用平方根表和立方根表求任意一个正数的平方根和立方根的近似值。

本章的难点是算术根与实数的绝对值的概念和计算。这两个概念都和数的正、负相联系，而代数式的值的正、负是比较隐蔽的，需要进行判断和讨论。初学者往往感到比较困难，而这种讨论，对于培养抽象思维能力是大有益处的。

二、重点、难点解析

1.　平方根与算术平方根的区别

（1）平方根。

如果 $x^2=a$，那么 x 叫 a 的平方根。因为任何实数的平方都不可能是负数，所以在实数范围内负数没有平方根，亦即在实数范围内负数开平方没有意义。

因为当且仅当 $x=0$ 时，$x^2=0$。所以零的平方根只有零。互为相反数的两个数的平方相等，所以正数的平方根有两个，它们互为相反数。

我们规定：正数的正的平方根叫做算术平方根。零的算术平方根还是零。

（2）算术平方根的本质特征是"非负性"。

提起"算术"两个字，我们总是和小学学过的"算术"联系起来，"算术数"的特点就是不出现负数，因此和算术数联系起来理解算术平方根是有益的。算术平方根不可能是负数，就是说一个非负数的算术平方根一定还是非负数，但不能认为一定是正数，因为零的算术平方根是零。

（3）算术平方根的实际意义。

在实际生活中，有的量是在非负数范围内取值的，比如线段的长度，图形的面积等，假如一个正方形的面积是4平方米，那么这个正方形的边长 x，就应该是4的算术平方根，$x=2$米。正方形的边长是它的面积的算术平方根。

（4）平方根与算术平方根的表示符号。

若 $a>0$，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根；

$-\sqrt{a}$ 表示 a 的负的平方根；

$\pm\sqrt{a}$ 表示 a 的平方根。

零的平方根只有一个（或者理解为两个相等）表示为 $\sqrt{0}$。

下面举几个简单例子：

例1　下列命题是否正确？如果不正确怎样改正？

（1） -5 是25的平方根；（2）25的平方根是 5；

（3） 3 是 9 的平方根；　（4） 9 的算术平方根是3.

解　（1）是正确的。因为 $(-5)^2=25$. 符合平方根的意义；

（2）不正确。25的平方根是 ± 5；

（3）正确。因为 $3^2=9$ 符合平方根的意义。

（4）正确。因为 $3^2=9$，且 $3>0$. 符合算术平方根的意义。

例2　将下列算式改为用语言叙述，并写出计算结果。

（1） $\sqrt{0.04}$；（2） $-\sqrt{1\frac{7}{9}}$；（3） $\pm\sqrt{324}$.

解　（1） $\sqrt{0.04}$ 表示0.04的算术平方根，$\sqrt{0.04}=0.2$；

（2） $-\sqrt{1\frac{7}{9}}$ 表示 $1\frac{7}{9}$ 的负的平方根，$-\sqrt{1\frac{7}{9}}=-1\frac{1}{3}$；

（3） $\pm\sqrt{324}$ 表示 324 的平方根，$\pm\sqrt{324}=\pm 18$.

例3　下列算式是否正确：

（1） $\pm\sqrt{\frac{121}{49}}=\pm\frac{11}{7}$；　（2） $\sqrt{0.25}=\pm 0.5$；

（3） $-\sqrt{2.25}=-1.5$；（4） $\pm\sqrt{0}=0$.

解　（1）正确；（2）不正确；（3）正确；（4）正确。

在正确理解平方根概念的基础上，为了计算迅速还需要将一些简单数的平方数记熟。如

$11^2=121, 12^2=144, 13^2=169, 14^2=196, 15^2=225,$

$16^2=256, 17^2=289, 18^2=324, 19^2=361, 20^2=400.$

2. 怎样利用平方根表求平方根的近似值

从平方根表中，可以直接查到1.00到99.9之间的算术平方根的近似值。要想利用此表求得表外任意一个正数 N 的平方根的近似值，需要弄清 N 的小数点位置变化与$\sqrt{N}$小数点位置变化的关系。它们的关系可以用以下图表说明：

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
a \arrow[r, shift left, "\text{小数点向右移}m\text{位}"] \arrow[d, "\text{平方}"'] & a\times10^{m} \arrow[l, shift left, "(\text{小数点向左移}m\text{位})"] \arrow[d, "\text{平方}"] \\
a^{2} \arrow[r, shift left, "\text{小数点向右移}2m\text{位}"] & a^{2}\times10^{2m} \arrow[l, shift left, "(\text{小数点向左移}2m\text{位})"]
\end{tikzcd}$$

从平方的规律，不难得出开平方的规律。

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
N \arrow[r, shift left, "\text{小数点向右移}2m\text{位}"] \arrow[d, "\text{开平方}"'] & N\times10^{2m} \arrow[l, shift left, "(\text{小数点向左移}2m\text{位})"] \arrow[d, "\text{开平方}"] \\
\sqrt{N} \arrow[r, shift left, "\text{小数点向右移}m\text{位}"] & \sqrt{N}\times10^{m} \arrow[l, shift left, "(\text{小数点向左移}m\text{位})"]
\end{tikzcd}$$

从以上规律看出，如果正数 N 不在表内，当 $N<1.00$ 时，将 N 的小数点向右移 $2m$ 位（移动位数必须是偶数）。得到表内数 $N\times10^{2m}$，查表求出平方根$\sqrt{N}\times10^{m}$，将所得数的小数点再向左移 m 位，就得到$\sqrt{N}$。当 $N>99.9$ 时，将 N 的小数点向左移 $2m$ 位，得到表内数，查表求出平方根；再将所得数向右移 m 值。就得到$\sqrt{N}$。

例 查表求（1）$\sqrt{0.008753}$；（2）$\sqrt{875300}$。

解　（1）$\sqrt{0.008753}$ ══════ 0.09356

↓小数点向右移4位　　　↑小数点向左移2位

$\sqrt{87.53}$ ══════ 9.356

查　表

（2）$\sqrt{875300}$ ══════ 935.6

↓小数点向左移4位　　　↑小数点向右移2位

$\sqrt{87.53}$ ══════ 9.356

查　表

说明：查表求平方根近似值，容易出现小数点点错位置．解决这个问题可以复查小数点移动方向和位数是否正确；也可以用以下方法检验．

（1）分节法：如果 $N\geqslant 1$，把 N 从小数点向左分节，每两位一节，最后不足两位（只剩一位）也算一节，有几节，那么$\sqrt{N}$就有几位整数．

如果 $0<N<1$，把N 从小数点向右分节，每两位一节，小数点后有几节均为零，那么$\sqrt{N}$小数点后就连续有几个零．

（2）还原法：开平方结果是否正确，可以用平方检验．

3．怎样求立方根

（1）什么叫立方根？

如果 $x^3=a$，那么 x 叫 a 的立方根．

因为正数的立方，还是正数；零的立方为零；负数的立方为负数．所以任意实数的立方根都存在．而且在实数范围内只有一个．

（2）立方根的符号法则．

从立方运算的符号法则，不难得出立方根的符号法则：

正数的立方根为正；负数的立方根为负；零的立方根还是零。

（3）利用立方根表求一个正数的立方根的近似值。

从《立方根表》中我们可以直接查到 0.100 到99.9之间三个数位的数的立方根。要想求表外数的立方根的近似值，就要弄清 N 的小数点移动与 $\sqrt[3]{N}$ 小数点移动的规律。因为 $(a\times10^m)^3=a^3\times10^{3m}$。可见若 a 小数点向右（向左）移动 m 位，那么它的立方数小数点向右（向左）移动 $3m$ 位。可推知被开方数小数点向右（向左）移 $3m$ 位，则它的立方根向右（向左）移 m 位。

例 从查表可知 $\sqrt[3]{0.103}=0.4688$，$\sqrt[3]{1.03}=1.010$，$\sqrt[3]{10.3}=2.176$，根据以上数据求：

（1）$\sqrt[3]{1030}$；（2）$\sqrt[3]{-0.0103}$；（3）$\sqrt[3]{-103}$。

解 （1）

$$\begin{array}{ccc}\sqrt[3]{1030} & = & 10.10;\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{小数点向左移3位}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\text{小数点向右移1位}}\\ \sqrt[3]{1.03} & = & 1.010\end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{ccc}\sqrt[3]{-0.0103} & = & -0.2176;\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{小数点向右移3位}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\text{小数点向左移1位}}\\ \sqrt[3]{-10.3} & = & -2.176;\end{array}$$

（3）

$$\begin{array}{ccc}\sqrt[3]{-103} & = & -4.688;\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{小数点向左移3位}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\text{小数点向右移1位}}\\ \sqrt[3]{-0.103} & = & -0.4688.\end{array}$$

说明：求立方根，首先要正确确定计算结果的正、负号。查表求近似值，小数点不要点错。小数点位置是否正确

可以用以下方法检验。

（1）分节法：如果 $N \geqslant 1$，把 N 从小数点向左分节，每三位一节，最后不足三位（一位或两位）也算一节。有几节，那么 $\sqrt[3]{N}$ 就有几位整数。

如果 $0 < N < 1$，把 N 从小数点向右分节，每三位一节。小数点后连续有几节均为零，那么 $\sqrt[3]{N}$ 小数点后就连续有几个零。

（2）还原法：开立方结果是否正确，可以用立方检验。

为了提高计算速度，需要记住一些立方数。

$2^3=8$，$3^3=27$，$4^3=64$，$5^3=125$，$6^3=216$，$7^3=343$。

通过求平方根和立方根的分析，可以体会到，研究一种新的运算规律，如果它的逆运算是你熟悉的，就可以从已知运算的规律，探讨它的逆运算的规律。这种思想方法，在以后的学习中还会经常遇到。

对于求数 a 的平方根或求数 a 的立方根，它们之间既有区别又有联系。数 a 取值范围是不同的，前者只能取非负数，而后者可以取任意的正数、负数和零。

4. 关于 n 次算术根

（1）什么叫 n 次算术根？

正数 a 的正的 n 次方根，叫做 a 的 n 次算术根。零的 n 次算术根还是零。

从以上概念不难看出，n 次算术根的本质特征是"非负数"。

（2）非算术根怎样用算术根表示。

① 当 n 为偶数时：

如果 a 为正数，a 的 n 次方根有两个；正的一个就是算术根，表示为 $\sqrt[n]{a}$；另一个可用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示（即 n 次算术根的相反数）。如21的 4 次算术根表示为 $\sqrt[4]{21}$，另一个 4 次方根表示为 $-\sqrt[4]{21}$。

如果 a 为负数，它的偶次方根不存在。

② 当 n 为奇数时：

如果 a 为正数，a 的 n 次方根只有一个，就是 a 的 n 次算术根 $\sqrt[n]{a}$。

如果 a 为负数，它的 n 次方根就不是算术根，$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$，而 $\sqrt[n]{-a}$ 是算术根，所以非算术根 $\sqrt[n]{a}$ 可以用算术根 $\sqrt[n]{-a}$ 表示，如 $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$。

在运算中，经常将非算术根化为算术根计算。

5*．有理数的三种定义

（1）整数和分数统称有理数。

因为整数可以看成有限小数（小数点后面均为零），分数化为最简分数（分子、分母最大公约数为 1），如果分母的约数中，除 2 和 5 以外没有其它约数，那么它一定能化为有限小数。

如 $\dfrac{3}{200}=\dfrac{3}{2^3\cdot 5^2}=\dfrac{15}{2^3\cdot 5^3}=\dfrac{15}{1000}=0.015$；

如果分母的约数中，有 2 和 5 以外的约数，那么它一定化为无限循环小数。

如 $\dfrac{17}{150}=\dfrac{17}{2\times 3\times 5^2}=0.11\dot{3}$。

---

* 属于选学内容（下同）。

反过来，一个有限小数，它本身就是整数或十进分数（分母是10的方幂）。

如 $3.135=3\frac{135}{1000}=3\frac{27}{200}$；

一个无限循环小数一定也能化为分数，

如 $a=2.5\dot{3}\dot{7}$，则 $100a=253.7\dot{3}\dot{7}$，

$100a-a=253.7\dot{3}\dot{7}-2.5\dot{3}\dot{7}=251.2$

$\therefore\quad a=\frac{2512}{990}=2\frac{532}{990}=2\frac{266}{495}$。

（读者可以用以上的方法，将自己给出的无限循环小数化为分数。无限循环小数化为分数的更一般的方法，到了高中就会学到）

这样有理数还可以定义为：

（2）有限小数或无限循环小数叫有理数。

以上两种定义，对于初步讨论有理数，有它直观的一面，比较好理解。比如：

-32，$21\frac{3}{5}$，0.7，$-2.83\dot{1}50\dot{7}$，都是有理数。$0.020020002\cdots$，$5.535535553\cdots$就不是有理数。

但是对于有的数是不是有理数，用以上定义很难判断。比如$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，你开到某一位，未开尽，也未发现循环，一直开下去，是否一定开不尽呢？是否一定不循环呢？很难说清楚。为了解决这个问题，就需要进一步研究有理数的特征性质。一个整数或一个分数都可以化为两个整数比的形式。反之两个整数比的形式的数，不是整数，就是分数。因此我们给有理数又一种定义：