



初中数学解题方法

李锦涛 甄玄德 编著

福建人民出版社

初中数学解题方法

李锦涛 甄玄德 编著

福建人民出版社

1988年·福州

内 容 提 要

《中学数理解题方法丛书》是为满足中学生从目前繁重的“题海战术”中解放出来，集中精力学好“双基”、练就本领的需要而编写的。

这本《初中数学解题方法》，以新编初中数学教材的内容和要求为依据，选编了214个典型范例，就初中数学常见的10种题型，提供了19种解答问题的方法。书中探讨各种题型的特点和作用，论点鲜明；所述解题方法与技巧，提法新颖；论述培养解题能力的六条途径，富有新意。使用本书的读者，必将大大加深对数学知识的理解和提高解决数学问题的能力。

初中数学解题方法

李锦坤 甄玄德 编著

福建人民出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

三明市印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 6.125印张 134千字

1989年1月第1版

1989年1月第1次印刷

印数：1—14870

ISBN 7-211-00586-6

G·391 定价：1.55元

目 录

- 一、初中数学题的常见题型…………… (1)
 - 说明题(1)——判断题(4)——计算题(9)——
 - 证明题(13)——作图题(15)——综合题(16)
- 二、初中数学题的一般解法…………… (18)
 - 解答数学题的基本要求(18)——解答数学题的主要步骤(26)——解答数学题的常用方法(33)
- 三、初中数学各种题型的解法…………… (59)
 - 说明题的解题方法(59)——判断题的解题方法(69)——计算题的解题方法(86)——证明题的解题方法(117)——作图题的解题方法(127)——综合题的解题方法(134)
- 四、培养解题能力的主要途径 …………… (148)
 - 掌握双基抓熟练(148)——知识之间抓沟通(151)——运算方法抓技巧(152)——逻辑推理抓严密(157)——一题多解抓比较(161)——解题完成抓总结(165)
- 五、基本练习题 …………… (169)
- 六、基本练习题部分答案与提示 …………… (186)

一、初中数学题的常见题型

初中数学包括代数和几何。

学习数学，不免要推算许多数学题目。这些题目，虽然在内容上千差万别，但是在形式上有的却很类似。于是，根据初中数学题的编制方式和结构特点，可以把数学题目分为说明题、判断题、计算题、证明题、作图题和综合题等六种基本题型。准确地把握这些题型的特点和解法，对培养和提高学生的数学解题能力无疑是有益的。

(一) 说明题

属于说明题类型的有：问答题、填空题、讨论题。

说明题一般要求解答者对提出的问题做正面回答或举例说明。说明题大多是围绕数学基础知识而编制的。解答说明题有利于加深理解、牢固掌握、灵活运用、准确把握数学的法则、公式、定理，以及它们的成立条件和适用范围。

1. 问答题

问答题是以设问的形式提出问题，要求解答者作直接解释或举例说明。

例1—1 回答下列问题：

- (1) 什么叫做同类项？试举例说明。
- (2) 什么叫做算术根？ 5^2 的算术平方根是什么？ a^2 的算术平方根是什么？
- (3) 若 $|a| < |b|$ ，那么 a 一定小于 b 吗？若 $|a| < |b|$ 且

a 、 b 均为负数，那么 a 与 b 的大小关系怎样？

(4) 全等三角形是相似三角形吗？相似三角形是全等三角形吗？为什么？

2. 填空题

填空题是留有空白处的不完整的命题，要求解答者在空白处填上适当的数据、代数式、数学名词、公式或命题，使之成为完整的命题。

例1—2 填空：

(1) 如果一个三角形三边的长分别是 12 cm、16 cm 和 20 cm，那么，这个三角形的最大角是_____度，外接圆半径 $R =$ _____ cm，内切圆半径 $r =$ _____ cm。

(答案： 90° ；10；4.)

(2) 设 $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$ ，则 $\frac{a-b+c}{c} =$ _____。

(答案： $\frac{4}{3}$.)

(3) 两条对角线_____的四边形是平行四边形；两条对角线_____的平行四边形是矩形；两条对角线_____的矩形是正方形。

(答案：互相平分；相等；互相垂直.)

(4) 函数 $y = -x^2 + 2x - 3$ 经过配方可得 $y =$ _____；其图象的开口_____，对称轴方程是_____，顶点坐标是_____，与 y 轴交点的坐标是_____。

[答案： $-(x-1)^2 - 2$ ；向下； $x = 1$ ； $(1, -2)$ ； $(0, -3)$.]

(5) 一根铁丝长 12 米，要把它围成一个矩形，那么矩形面积 y (平方米) 和其一边长 x (米) 的函数关系式是_____。

自变量的取值范围是_____，面积的最大值是_____。

[答案： $y = x(6-x)$ ； $0 < x < 6$ ；9。]

3. 讨论题

讨论题是条件和结论隐含多种可能的题目。解答者应详尽地探讨在条件所有可能的情况下，相应结论的所有可能的情况。

(1) 关于字母的讨论题

例1—3 解方程 $(m+1)x^2 - 2(m-3)x + m = 0$ 。

(答案：当 $m = -1$ 时， $x = \frac{1}{8}$ ；当 $m < \frac{9}{7}$ 且 $m \neq -1$ 时，

$x = \frac{m-3 \pm \sqrt{9-7m}}{m+1}$ ；当 $m = \frac{9}{7}$ 时， $x = -\frac{3}{4}$ ；当 $m > \frac{9}{7}$

时，方程无解。)

例1—4 m 为何值时，方程 $\frac{2x}{x-3} - 1 = \frac{m}{x-3}$ 无解。

(答案： $m = 6$ 。)

(2) 关于方程解的讨论题

例1—5 不解方程，判断下列方程根的符号：

(1) $3x^2 - x - 4 = 0$ ； (2) $-4x^2 - 11x + 2 = 0$ ；

(3) $5x^2 - 16x + 2 = 0$ ； (4) $x^2 + 14x + 17 = 0$ 。

例1—6 不解方程，讨论下面方程解的情况：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{7}}{2}x + 1 = 0$ ；

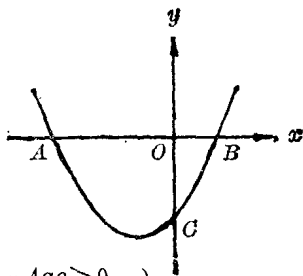
(2) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 0$ 。

(3) 关于函数图象的讨论题

例1—7 m 为何值时，函数 $y = (m-1)x + 2m - 3$ 的图象：
(1) 过原点；(2) 过点 $(-1, 2)$ ；(3) 在 y 轴上的截距为非负数。

(答案: $\frac{3}{2}$; 4; $\geq \frac{3}{2}$.)

例1—8 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 试讨论 a 、 b 、 c 、 $b^2 - 4ac$ 的符号.



(答案: $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$; $b^2 - 4ac > 0$.)

(4) 关于几何图形之间关系的讨论题

例1—9 设两圆的半径为 R 和 r ($R > r$), 圆心距为 d , 试讨论两圆的位置关系.

(答案: $d > R + r$ 时, 外离; $d = R + r$ 时, 外切; $R - r < d < R + r$ 时, 相交; $d = R - r$ 时, 内切; $d < R - r$ 时, 内离; $d = 0$ 时, 同心.)

由于讨论题的结论随条件的变化而变化, 因此, 解答讨论题既可以深化对数学基本知识的理解, 又可以养成全面、系统、缜密考虑问题的习惯和提高分析问题、解决问题的能力, 从而有利于培养思维的灵活性和创造性.

(二) 判断题

属于判断题类型的有: 是非题、选择题、改错题.

判断题是真假混杂的数学习题. 要求解答者辨认真假, 去伪存真, 给出正确结果.

1. 是非题

是非题是真假必居其一的判断题. 它要求解答者在指定的位置上做记号表示真(是)或者假(非).

例1—10 下面各命题, 正确的在括号内打 \checkmark , 错误的

打×。

- (1) 设 a 、 b 都是实数，若 $|a| = |b|$ ，则 $a = b$ 。
..... ()
- (2) 两个无理数的和一定是无理数。..... ()
- (3) 等腰三角形一边长5cm，一边长2cm，则它的周长是9cm。..... ()
- (4) 圆周角等于它所对的弧的一半，圆心角等于它所对的弧，弦切角等于它所夹的弧的一半。..... ()
- (5) 若一次函数 $y = (k^2 - 1)x + k$ 的图象经过第二、三、四象限，则 k 的取值范围是 $-1 < k < 0$ 。..... ()
- (答案：(1)×；(2)×；(3)×；(4)×；(5)√。)

2. 选择题

选择题是提出问题，又给出若干个备选答案，要求解答者在所提供的诸备选答案中（其中必有正确的或合适的答案）选出正确的或合适的答案的数学题。解答者只要把正确的或合适的答案的代号（有时一个，有时多个）挑选出来，填在指定的位置上，就算完成了答题。

例1—11 对于任意实数，下面各式的值一定为非负数的是（ ）。

- (A) $x^2 + 1$ ； (B) $x^2 - 1$ ；
(C) $\lg x^2$ ； (D) $10(x-1)^2 + 1$ 。

例1—12 根式 $\sqrt{\frac{-x^3}{(x-1)^2}}$ 的最简根式是（ ）。

- (A) $\frac{x\sqrt{-x}}{x-1}$ ； (B) $\frac{-x\sqrt{-x}}{x-1}$ ；
(C) $\frac{x\sqrt{x}}{x-1}$ ； (D) $\frac{-x\sqrt{x}}{x-1}$ 。

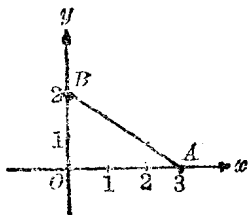
例1-13 已知变量 y 与 x 之间的函数关系可用图中线段 AB 表示, 则该函数关系是 () .

(A) $y = \frac{2}{3}x + 2$ ($0 < x < 3$);

(B) $y = \frac{2}{3}x + 2$ ($0 \leq x \leq 3$);

(C) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ($0 < x < 3$);

(D) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ($0 \leq x \leq 3$).



例1-14 若三角形两条边的垂直平分线的交点在第三条边上, 则这个三角形一定是 () .

(A) 锐角三角形; (B) 直角三角形;

(C) 钝角三角形; (D) 不能确定.

例1-15 如果 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$, 且 $\cos \alpha = -\cos \beta$, 那么 () 式成立.

(A) $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \beta$; (B) $\sin \alpha = \sin \beta$;

(C) $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$; (D) $\sin \alpha = -\sin \beta$.

(答案: D; A; D; B; A、B、C.)

选择题是数学题中新型的、常用的一类客观题。它在内容上涉及面宽、复盖面广; 在形式上花样新、门类多。由于数学选择题概念性强、灵活性大, 因此解答选择题既可以澄清似是而非的认识, 又可以提高应用数学基本知识进行分析和综合、推理和判断的能力。

3. 改错题

改错题是含有这样或那样错误(或含错误的概念, 或含错误的计算, 或含错误的证明, 或含错误的作图等等)的判断题。要求解答者指出错误所在, 说明产生错误原因, 并加

以订正。

例1--16 下面解题正确吗？若不正确，请指出错误并加以订正。

(1) 化简 $\sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(a+1)^2}$ 。

解：原式 = $1-a+a+1=2$ 。

$$\left(\begin{array}{l} \text{答案：} \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(a+1)^2} = \begin{cases} -2a & (a < -1), \\ 2 & (-1 \leq a \leq 1), \\ 2a & (a > 1). \end{cases} \end{array} \right)$$

(2) 因式分解 $6x^2 + 5x + 1$ 。

解：先求出二次三项式的根。

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1,$$

$$\therefore \text{两根是 } -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{原式可以分解成：} \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

[答案： $(3x+1)(2x+1)$ 。]

(3) 已知最简根式 $\sqrt{a^2+a}$ 和 $\sqrt{3a-1}$ 和 $\sqrt{2a+1}$ 是同次根式，求 a 。

解：由同次根式的定义，得

$$a^2 + a = 15 - a.$$

即 $a^2 + 2a - 15 = 0$ 。

解之，得

$$a_1 = -5, a_2 = 3.$$

即为所求。

(答案： $a=3$ 。)

(4) 求函数 $y = \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{x-6}$ 的自变量 x 的取值范围。

解：∵ $y = \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{x-6} = \sqrt{x^2-36}$,

∴ 要使 y 有意义，必须使

$$x^2 - 36 \geq 0.$$

解得 $x \geq 6$ 或 $x \leq -6$.

(答案： $x \geq 6$.)

例1—17 指出下面论证中错误所在，并说明产生错误的原因。

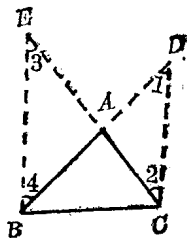
如图所示，设 $\triangle ABC$ 是一个任意三角形。延长 BA 到 D ，使 $AD = AC$ ，延长 CA 到 E ，使 $AE = AB$ ，连结 CD 、 BE 。显然有

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle A.$$

在 $\triangle BDC$ 中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\sin(C + \frac{1}{2}A)}{\sin(\frac{1}{2}A)}.$$

同理 $\frac{CE}{CB} = \frac{\sin(B + \frac{1}{2}A)}{\sin(\frac{1}{2}A)}.$



$$\therefore BD = BA + AD, CE = CA + AE,$$

$$\therefore BD = CE.$$

$$\therefore \sin(B + \frac{1}{2}A) = \sin(C + \frac{1}{2}A).$$

由此得 $\angle B = \angle C$,

$$\therefore AB = AC, \text{ 即任意三角形都是等腰三角形.}$$

初学者学习数学时，常常会发生这样那样的错误：有的概念不清，有的推理无据，有的判断草率，有的作图粗糙，

等等。通过解答改错题，弄清错误的性质和产生错误的原因，既能澄清糊涂概念和错误认识，又能培养严谨周密的推理能力和严肃认真的学习态度。

(三) 计算题

属于计算题类型的有：数式计算题、几何计算题、应用题。

计算题是需要进行数学演算的习题。要求解答者根据题目的要求，从已知的数、式、数与数、式与式、数与式的关系以及式子的结构特点入手，应用数学运算法则、规律和技巧，合理科学地求出结果。

1. 数式计算题

数式计算题是初中代数中最基本、最大量的练习题，它包括数的计算，代数式的化简、变换、求值，函数及函数值的计算，方程和方程组、不等式和不等式组的求解，等等。

例1—18 计算：

$$(1) \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^8 \times \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|,$$

$$(2) \log_2 1 - \lg 0.001 + \log_5 \sqrt{\frac{1}{5}} + 7^{\log_7 \frac{1}{2}},$$

$$(3) (x^2 - x + 5)(x^2 + x - 5);$$

$$(4) \cos 10^\circ - \operatorname{ctg} 47^\circ + \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 137^\circ - \sin 100^\circ.$$

(答案：(1) 0；(2) 3；(3) $x^4 - x^2 + 10x - 25$ ；(4) 1.)

例1—19 化简求值： $15a^2 - \{-4a + [5a - (2a^2 - a)]\}$ ，

其中， $a = -\frac{1}{5}$ 。

(答案： $\frac{27}{25}$.)

例1—20 因式分解:

$$(1) a^2(x-y) - 2a(x-y)^2 - (y-x)^3;$$

$$(2) x^4 - 16x^2 - 5x + 20.$$

[答案: (1) $(x-y)(a-x+y)^2$;

(2) $(x-1)(x-4)(x^2+5x+5)$.]

例1—21 求下列各函数的自变量取值范围:

$$(1) y = 1 - x^2;$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{-x};$$

$$(3) y = \frac{5}{2+3x};$$

$$(4) y = \lg(2-x).$$

(答案: (1) 实数; (2) 非正数; (3) $x \neq -\frac{2}{3}$;

(4) $x < 2$.)

例1—22 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $x = -1$ 时, $y = 0$; 当 $x = 2$ 时, $y = 0$; 当 $x = 3$ 时, $y = 4$. 求其最大值或最小值.

(答案: 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y_{\text{最小值}} = -\frac{9}{4}$.)

例1—23 解方程或方程组:

$$(1) 2 \left[\frac{4}{3}x - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{3}{4}x;$$

$$(2) \begin{cases} 5[2x - (x-y)] = 6(x+y) - 30, \\ y - 2(x+y) = 8(y-x); \end{cases}$$

$$(3) 3x^2 + 5x - 2 = 0;$$

$$(4) \frac{1}{x^2 - 6x + 9} + \frac{1}{2x + 6} + \frac{x}{9 - x^2} = 0;$$

$$(5) \sqrt{2x-5} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4};$$

$$(6) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = -1. \end{cases}$$

(答案: (1) $x = -\frac{12}{7}$; (2) $\begin{cases} x = 18, \\ y = 12, \end{cases}$ (3) $x_1 = \frac{1}{3}$,

$x_2 = -2$; (4) $x = 5$; (5) $x = 7$; (6) $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$)

例1—24 解不等式或不等式组:

(1) $|3x - 2| < \frac{1}{2}$;

(2) $-2x^2 + 4x - 1 > 0$;

(3) $\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{4} > \frac{3}{8}(x+5), \\ \frac{(2x+1)^2}{2} - x(2x-1) \geq -10. \end{cases}$

(答案: (1) $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$; (2) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$;

(3) $-3\frac{1}{2} \leq x < -1.$)

2. 几何计算题

几何计算题包括线段长度、角度大小和图形面积等的计算。

例1—25 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle B = 90^\circ$, $AC = 12\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$, $\triangle AED$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$. 求 AE 、 DE 的长。

(答案: $3\sqrt{2}\text{cm}$; $3\sqrt{2}\text{cm}$.)

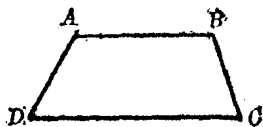
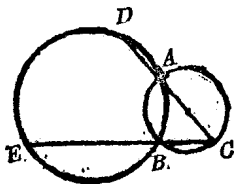


例1—26 如图, A 、 B 为两圆的

交点, AC 为小圆的直径, CA 、 CB 延长线分别交大圆于 D 、 E 。已知 $AC = 12$, $BE = 30$, $BC = AD$, 求 $\angle C$ 的度数。

(答案: 60° 。)

例1-27 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$, 求梯形的面积。



(答案: $50\sqrt{3}\text{cm}^2$ 。)

例1-28 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$, $\angle A = 30^\circ$, 求 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $S_{\triangle ABC}$ 及外接圆半径 R 。

(答案: 有两个解: $\angle B_1 = 60^\circ$ 、 $\angle C_1 = 90^\circ$ 、 $S_1 = 6\sqrt{3}$ 、 $R_1 = 2\sqrt{3}$; $\angle B_2 = 120^\circ$ 、 $\angle C_2 = 30^\circ$ 、 $S_2 = 3\sqrt{3}$ 、 $R_2 = 2\sqrt{3}$ 。)

3. 应用题

应用题是用数学方法解决实际问题的计算题。

例1-29 一轮船航行于两码头之间, 顺水需要 4 小时, 逆水需要 5 小时, 已知水流速度每小时 2 公里, 求船在静水中的速度。

(答案: 18 公里/小时。)

例1-30 某工人原计划 26 小时生产一批零件, 后因每小时多生产 5 件, 用 24 小时不但完成了任务, 而且还比原计划多生产了 60 件。问原计划生产多少零件?

(答案: 780件。)

例1—31 某专业户需要浓度为3%的某种农药5升, 应从浓度为1%和6%的两种农药中各取多少升配制而成?

(答案: 取浓度1%的农药3升, 6%的农药2升。)

例1—32 某渔船在航行中遇险, 发出呼救信号。海难救护船获悉后, 测出渔船的方位角为 45° , 距离为10海里, 正沿着方位角 105° 的方向以9海里/小时的速度驶向某小岛。已知救护船立即以21海里/小时的速度前去营救, 求其航向和靠近渔船所需要的时间。

(答案: 方位角 $66^\circ 47'$; 需要 $\frac{2}{3}$ 小时。)

计算题是初中数学基本题型之一。正确解答数学计算题, 有利于掌握数学的基本知识和基本技能, 有助于提高解决实际问题的计算能力。

(四) 证明题

证明题是给出一个命题, 要求解答者根据公理、定义、定理、法则和公式, 通过计算或逻辑推理, 推断其正确与否。

有的证明题主要是用计算的方法来证明所给命题的真实性。

例1—33 已知: $a+b+c=0$, 求证: $a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=0$ 。

(提示: 对求证的左边进行因式分解。)

例1—34 若 a 、 b 、 c 为实数, 证明方程 $(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$ 恒有实数根。

(提示: 先展开括号整理成 x 的二次方程, 再计算 Δ 的)